Wstęp do algebry abstrakcyjnej
16 grudnia 2022

Lista 3: Grupy i podgrupy

Zadanie 1. Pokazać, że grupa G, w której każdy $g \in G$ spełnia $g^2 = e$, jest przemienna. Podaj jak najwięcej przykładów takich grup (tzn. takich w których $g^2 = e$).

Zadanie 2. Znaleźć kilka podgrup grupy izometrii płaszczyzny oraz kilka podgrup grupy izometrii liniowych płaszczyzny.

Zadanie 3. Pokazać, że $|G/H| = |H \backslash G|$.

Zadanie 4. Zapisać jako $k\mathbb{Z}$ podgrupy grupy $\mathbb{Z}$:
1) $< 2, 3 >$
2) $< 2, 4, 8 >$,
3) $< 10, 20, 30 >$
4) $< 9, 11 >$.
5) $< 210, 212, 43312 >$

Czy każda podgrupa $\mathbb{Z}$ jest postaci $k\mathbb{Z}$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$?

Zadanie 5. Zapisać w prostszej postaci $6\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z}$.

Zadanie 6. Mówimy, że dwa elementy $g, h \in G$ *komutują*, gdy $gh = hg$. Zbiór wszystkich elementów, które komutują z każdym elementem G tzn. $\{g \in G\colon \text{dla każdego } h \in G \text{ mamy } gh = hg\}$ nazywamy ***centrum*** grupy G i oznaczamy $Z(G)$. Pokazać, że centrum jest podgrupą abelową G - tzn. jest podgrupą G i jest grupą abelową.

Zadanie 7. Podać przykład $H \leq G$ oraz $g \in G$ t. że $gH \neq Hg$.

Zadanie 8. Znaleźć wszystkie $a \in G$, takie że $G =< a >$ dla $G = \mathbb{Z}_6$ i dla $G = \mathbb{Z}_8$.

Zadanie 9. Pokazać, że $\mathbb{Q}$ (w domyśle - z dodawaniem) nie jest skończenie generowalne, tzn. nie istnieją $n \in \mathbb{N}_+$ oraz $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}$ takie że $\mathbb{Q} =< a_1, ..., a_n >$.

Zadanie 10. Pokazać, że grupa Kleina nie jest cykliczna.

Zadanie 11. Pokazać, że każda podgrupa indeksu 2 jest podgrupą normalną.

Zadanie 12. Pokazać, że $Z(G) \trianglelefteq G$. Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 13. Czy przekrój dwóch podgrup normalnych musi być podgrupą normalną?

Zadanie 14. Wyznaczyć wszystkie podgrupy S_3. Które z nich są normalne?

Zadanie 15. Pokazać, że dla $n > 2$ grupa S_n ma trywialne centrum.

WERSJA 0