Wstęp do algebry abstrakcyjnej
5 marca 2023

Lista 4: Grupy i podgrupy raz jeszcze

Podgrupy:

Zadanie 1. "Dlaczego łączność jest przydatna?"
Obliczyć ile jest poprawnych nawiasowań wyrażenia $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ - tzn. wstawień '(' i ')' ustalających kolejność wykonywania niełącznego działania '$\cdot$'.

Zadanie 2. Czy $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}\colon\ x < 0\}$ jest podgrupą $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

Zadanie 3. Powiedzmy, że 200 i 500 leżą w pewnej podgrupie grupy $\mathbb{Z}$. Czy to oznacza, że 700 leży w tej podgrupie? A 1200? A 300? 100?

Zadanie 4. Czy przekrój dwóch podgrup jest podgrupą? A suma? Różnica?

Zadanie 5. Znaleźć trzy podgrupy grupy izometrii płaszczyzny, takie że żadna z tych podgrup nie zawiera się w innej z nich.

Podgrupy generowane, rzędy elementów:

Zadanie 6. Jaki rząd może mieć obrót (w grupie izometrii płaszczyzny)? A translacja?

Zadanie 7. Wyznaczyć rzędy elementów w grupach $\mathbb{Z}_6$ i $\mathbb{Z}$.

Zadanie 8. Wyznaczyć rzędy elementów w grupach S_3 i S_4.

Zadanie 9. Powiedzmy, że element a ma rząd 12, jakie są rzędy elementów $a^2, a^3, a^5, a^{15}, a^{-12}$ oraz a^{-28}?

Zadanie 10. Powiedzmy, że elementy a, b w grupie abelowej G mają rzędy 6 i 10 odpowiednio. Co można powiedzieć o rzędzie ab? Ciekawostka: dla dowolnej trójki $m, n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \cup \{\infty\}$ istnieje (niekoniecznie abelowa) grupa G z elementami a, b t.że $\mathrm{ord}(a) = m$, $\mathrm{ord}(b) = n$ oraz $\mathrm{ord}(ab) = k$.

Zadanie 11. Wyznaczyć podgrupę generowaną przez π w $\mathbb{R}$.

Zadanie 12. Znaleźć tysiąc (parami różnych) podgrup $\mathbb{Q}$ (jak zwykle, z dodawaniem - z mnożeniem nie byłaby to grupa).

Zadanie 13. Załóżmy, że $A \subseteq G$ generuje G, tzn. $< A >= G$. Pokaż, że jeśli dla każdych $a, a' \in A$ mamy $aa' = a'a$, to G jest przemienna.

Zadanie 14. Pokazać, że $\mathbb{R}$ (w domyśle - z dodawaniem) nie jest skończenie generowalne, tzn. nie istnieją $n \in \mathbb{N}_+$ oraz $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ takie że $\mathbb{R} =< a_1, ..., a_n >$.

Zadanie 15. Pokazać, że $\mathbb{Q}$ (w domyśle - z dodawaniem) nie jest skończenie generowalne, tzn. nie istnieją $n \in \mathbb{N}_+$ oraz $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}$ takie że $\mathbb{Q} =< a_1, ..., a_n >$. Wskazówka: weź skończoną kolekcję elementów $A \subseteq \mathbb{Q}$ weź ich podgrupę generowaną $< A >$ i zastanów się jakiej postaci musi być każdy jej element. Czy każdy element $\mathbb{Q}$ musi być tej samej postaci?

WERSJA 0