

Lista 5: Podgrupy generowane i warstwy

Podgrupy generowane:

Zadanie 1. Niech Q_8 oznacza grupę kwaternionów. Znaleźć podgrupy Q_8 (wypisać ich elementy): $\langle i \rangle$, $\langle j \rangle$ oraz $\langle i, j \rangle$.

Zadanie 2. Czy grupa skończona musi być skończenie generowalna? Czy grupa skończenie generowalna musi być skończona?

Warstwy:

Zadanie 3. Wyliczyć indeks $[S_4 : \langle (1, 2), (1, 2, 3) \rangle]$.

Zadanie 4. Powiedzmy, że G ma rząd 60, jakie są możliwe rzędy jej elementów? Jakie są możliwe rzędy jej podgrup? Jakie są możliwe indeksy jej podgrup w niej ($[G : H]$)? Wskazówka: w pokazywaniu istnienia przydatna może okazać się pewna skończona grupa cykliczna.

Zadanie 5. Wypisać elementy warstw $4 + 3\mathbb{Z}_{12}$, $3\mathbb{Z}_9 + 3$, $(1, 2)A_3$ (w S_3), $A_3(1, 2)$ (w S_3) oraz $5 + \{0\}$ (w \mathbb{Z}).

Zadanie 6. Wypisać lewe i prawe warstwy (ich elementy) podgrupy $\langle i \rangle$ w grupie kwaternionów.

Zadanie 7. (przypominam, że deklarujemy tylko **całe** zadania) Czy poniższe elementy leżą w tej samej lewej warstwie podgrupy H w grupie G . Czy leżą w tej samej prawej warstwie (Hg)?

- 1) 2 i 3, $H = 3\mathbb{Z}$, a $G = \mathbb{Z}$.
- 2) 2 i 3, $H = 3\mathbb{Z}_5$, a $G = \mathbb{Z}_5$.
- 3) $(1, 2)$ i $(1, 2, 3)$, $H = \langle (2, 3) \rangle$, a $G = S_3$

Zadanie 8. Pokazać, że $|G/H| = |H \backslash G|$ dla skończonej G .

Zadanie 9. Pokazać, że $|G/H| = |H \backslash G|$ dla dowolnej G . Wskazówka - przypisanie $gH \mapsto Hg$ nie jest szukaną bijekcją, ale może jakieś podobne już jest...