Wstęp do algebry abstrakcyjnej
31 marca 2023

Lista 6: podgrupy normalne i grupa ilorazowa

Podgrupy normalne:

Zadanie 1. Pokaż, że każda podgrupa grupy abelowej jest podgrupą normalną.

Zadanie 2. Czy podgrupa grupy D_n złożona z obrotów jest podgrupą normalną?

Zadanie 3. Czy S_3 (precyzyjniej - zbiór takich permutacji $\sigma \in S_4$, dla których $\sigma(4) = 4$) jest podgrupą normalną w S_4?

Zadanie 4. Pokazać, że grupę dihedralną D_4 można zrealizować jako podgrupę S_4 (tzn. w S_4 jest podgrupa izomorficzna z D_4). Sprawdzić czy jest to podgrupa normalna.

Zadanie 5. Czy przekrój dwóch podgrup normalnych musi być podgrupą normalną?

Zadanie 6. Czy jeśli zachodzi $A \trianglerighteq B \trianglerighteq C$, to czy mamy $A \trianglerighteq C$? Wskazówka: rozważyć S_4 i jej podgrupy A_4 (parzyste permutacje) oraz $V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ (uzasadnić, że jest to podgrupa).

Zadanie 7. Wyznaczyć wszystkie podgrupy S_3. Które z nich są normalne? Wskazówka: każda podgrupa grupy skończonej jest skończenie generowalna. Ponadto jeśli $a \in H \leq G$, to $\langle a \rangle \subseteq H$.

Zadanie 8. Mówimy, że dwa elementy $g, h \in G$ *komutują*, gdy $gh = hg$. Zbiór wszystkich elementów, które komutują z każdym elementem G tzn. $\{g \in G\colon \text{dla każdego } h \in G \text{ mamy } gh = hg\}$ nazywamy ***centrum*** grupy G i oznaczamy $Z(G)$. Pokazać, że centrum jest podgrupą abelową G - tzn. jest podgrupą G i jest grupą abelową.

Zadanie 9. Pokazać, że $Z(G) \trianglelefteq G$. Kiedy zachodzi równość?

Zadanie 10. Pokazać, że dla $n > 2$ grupa S_n ma trywialne centrum.

Grupa ilorazowa:

Zadanie 11. Napisz tabelkę działania w $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (przypominam, że elementy tej grupy to warstwy). Jaki ma ona rząd? Które ze znanych nam grup mają taki rząd? Czy któraś z nich jest izomorficzna z tą grupą ilorazową?

WERSJA 0