Wstęp do algebry abstrakcyjnej
14 kwietnia 2023

Lista 7: homomorfizmy

Zadanie 1. Uzasadnij, że złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem, a funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem.

Zadanie 2. Rozważmy funkcję $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, gdzie $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}_+$ mają standardowe struktury grupy (dodawanie i mnożenie), a $\exp x = e^x$. Uzasadnij, że jest to homomorfizm i rozstrzygnij czy jest mono- i/lub epimorfizmem.

Zadanie 3. Pokaż, że dla $g \in G$ t. że $\operatorname{ord} g < \infty$ i homomorfizmu $f\colon G \to H$ mamy $\operatorname{ord} f(g) < \infty$ oraz $\operatorname{ord} f(g) \mid \operatorname{ord} g$.

Zadanie 4. Czy istnieje homomorfizm z $\mathbb{Z}_6$ w S_3? A izomorfizm?

Zadanie 5. Znaleźć wszystkie homomorfizmy:

1) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,
2) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$,
3) $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$.

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie homomorfizmy $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{10}$.

Zadanie 7. Pokazać, że (b) i (c)[1] z obszerniejszej definicji homomorfizmu wynikają z warunku (a)[2].

Zadanie 8. Czy obraz (zbiór wartości) homomorfizmu musi być podgrupą? Jeśli tak, to czy ta podgrupa musi być normalna?

Zadanie 9. Dla homomorfizmu $f\colon G \to H$ przez $\ker f$ oznaczamy podzbiór G składający się z elementów posyłanych przez f na e_H (tzn. $\ker f = \{g \in G\colon f(g) = e_H\} = f^{-1}[\{e_h\}]$). Czy jądro jest podgrupą G? Jeśli tak, to czy jest to pogrupa normalna?

Zadanie 10. Pokazać, że homomorfizm $f\colon G \to H$ jest mono- dokładnie wtedy, gdy $\ker f = \{e_G\}$.

Zadanie 11. Kiedy podgrupę można zrealizować jako obraz pewnego homomorfizmu? A kiedy jako jądro?

Zadanie 12. Uzasadnić, że dla każdego $a \in G$ odwzorowanie $\varphi_a\colon G \to G$ zadane przez $\varphi_a(g) = aga^{-1}$ jest automorfizmem grupy G. Takie automorfizmy nazywamy ***automorfizmami wewnętrznymi*** grupy G.

Zadanie 13. Sprawdzić, że zbiór automorfizmów G, oznaczany przez $\operatorname{Aut} G$ jest grupą (z działaniem składania automorfizmów).

Zadanie 14. Rozważyć funkcję $\varphi : G \to \operatorname{Aut} G$ zadaną przez $\varphi(g) = \varphi_g$ (jak w Zadaniu 12). Uzasadnij, że jest to homomorfizm. Wywnioskuj, że automorfizmy wewnętrzne tworzą podgrupę grupy automorfizmów. Sprawdź czy φ musi być monomorfizmem (wskazówka: wyznacz jądro φ). Sprawdź czy musi być na - tzn. czy dla każdej grupy G każdy jej automorfizm jest wewnętrzny?

WERSJA 0

[1] przenoszenie przez homomorfizm elementu neutralnego na element neutralny i elementu odwrotnego na element odwrotny
[2] tj. że dla każdych $g, g' \in G$ mamy $f(gg') = f(g)f(g')$