Wstęp do algebry abstrakcyjnej
22 września 2022

Listoskrypt 0: półgrupy i monoidy

Zajawka:

Algebra abstrakcyjna zajmuje się badaniem własności struktur algebraicznych, takich jak poznane przez nas półgrupy i monoidy, oraz wielu innych np. grup, pierścieni, ciał, modułów, algebr...
Okazuje się, że wiele występujących w matematyce obiektów posiada w naturalny sposób jakąś strukturę algebraiczną - gdy taką strukturę dojrzymy, to możemy zastosować wypracowane w algebrze narzędzia do badania własności takiego obiektu.

Przypomnienie:

Działanie w zbiorze X to po prostu funkcja dwuargumentowa, która bierze parę elementów zbioru X i przypisuje tej parze jakiś element **zbioru** X.

Działanie jest łączne, gdy w wyrażeniach typu $(a * b) * (c * d)$ możemy poprzestawiać nawiasy (ale w poprawny sposób: np. napis ")$(a * b(*) * c()$" nie jest poprawny) i wynik się nie zmieni. Wtedy też możemy pisać $a * b * c * d$ (bez nawiasów), ponieważ wynik nie będzie zależał od kolejności, w której $*$ jest wykonywane. Aby sprawdzić, że działanie jest łączne wystarczy dla każdych $a, b, c \in X$ zweryfikować, że $(a * b) * c = a * (b * c)$. Zbiór X wraz z **łącznym** działaniem w nim nazywamy ***półgrupą***.

Zadanie 1. Podaj przykład niełącznego działania.

Jeżeli w X jest taki element e, którego domnażanie, czy to z lewej, czy to z prawej, nic nie zmienia, to element ten nazywamy ***elementem neutralnym***. Precyzując poprzednie zdanie $e \in X$ jest elementem neutralnym, gdy dla każdego $x \in X$ mamy $x * e = x = e * x$. Taki element, jeśli istnieje, to jest jedyny. Ważne aby pamiętać, że element ten **musi** leżeć w zbiorze X. Częstym błędem jest też sprawdzanie neutralności tylko z jednej strony - tj. domnażając go np. tylko z lewej.

Półgrupę w której jest element neutralny nazywamy ***monoidem***[1]. Każdy monoid jest półgrupą, ale nie każda półgrupa jest monoidem.

Zadanie 2. Znajdź przykład półgrupy, która nie jest monoidem.

Działanie jest ***przemienne***, gdy możemy zamienić argumenty $*$ miejscami, tj. dla każdych $a, b \in X$ mamy $a * b = b * a$.

Zerem w półgrupie $(X, *)$ nazywamy taki element $z \in X$, który zachowuje się jak zero w liczbach całkowitych z mnożeniem, tzn. domnożenie go z którejkolwiek ze stron do dowolnego elementu X będzie zwracało z. Precyzując musimy sprawdzić, czy dla każdego $x \in X$ mamy $z * x = z = x * z$. Nazwa jest troszkę niefortunna, gdyż np. w $(\mathbb{Z}, +)$ element 0 nie jest zerem w znaczeniu tej definicji. Podobnie jak w przypadku elementu neutralnego, zero również **musi** leżeć w X.

WERSJA 0

[1] Z technicznego punktu widzenia monoidy można rozpatrywać jako 'struktury bogatsze' niż półgrupy tzn. nie jako pary $(X, *)$, lecz trójki $(X, *, e)$. Co to dokładniej znaczy w praktyce zobaczymy przy omawianiu podstruktur i homomorfizmów, czyli 'podzbiorów z odziedziczoną strukturą' i 'funkcji zachowujących strukturę (algebraiczną)'.