Wstęp do algebry abstrakcyjnej
23 września 2022

Listoskrypt 1: Podstruktury

Podstruktury:

Rozważmy zbiór liczba naturalnych $\mathbb{N}$ i zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jeżeli wyposażymy $\mathbb{R}$ w działanie dodawania, to staje się on półgrupą. Ale ponieważ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, to dodawanie na $\mathbb{R}$ można aplikować do elementów $\mathbb{N}$. Okazuje się, że dodając (tym odziedziczonym z $\mathbb{R}$ dodawaniem) dwie liczby naturalne dostajemy ponownie liczbę naturalną, więc dodawanie liczb rzeczywistych, ograniczone do liczb naturalnych okazuje się być działaniem[1] w $\mathbb{N}$. W ogólnym przypadku tak wcale nie musi być:

Zadanie 1. Podać przykład półgrupy $(X, *)$ i podzbioru $A \subseteq X$, dla których A nie jest zamknięte na działanie $*$, tzn. można znaleźć dwa elementy $a, b \in A$ takie, że $a * b \notin A$.

Wyróżnimy te z podzbiorów X, które zachowują się kulturalnie:

Definicja 1. Niech $(X, *)$ półgrupa. Podzbiór $A \subseteq X$ nazywamy podpółgrupą, gdy A jest zamknięty na działanie $*$, a precyzyjniej dla każdych $a, b \in A$ mamy $a * b \in A$.

W przypadku monoidów pojawia się dodatkowy problem w postaci elementu neutralnego. Definicja podmonoidu zakłada, że wybór elementu neutralnego jest częścią informacji o monoidzie, dlatego też dodatkowo wymagamy, by element neutralny leżał w podmonoidzie.

Definicja 2. Niech $(X, *, e)$ monoid. Podzbiór $A \subseteq X$ podmonoidem, gdy A jest zamknięty na działanie $*$ oraz $e \in A$.

Zadanie 2. Niech A podpółgrupa półgrupy $(X, *)$. Pokazać, że $(A, *)$ jest półgrupą.[2]

Zadanie 3. Niech N podmonoid monoidu $(M, *, e)$. Pokazać, że $(N, *, e)$ jest monoidem.[3]

Poniższy przykład powinien wyjaśnić jak zabierać się za tego typu zadania.

Przykład 1. Oznaczmy przez $2\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych parzystych. Zbiór $\{0\}$ jest podpółgrupą $(2\mathbb{N}, \cdot)$ i monoidem, ale nie jest podmonoidem.

Dowód. Weźmy dowolne element $x, y \in \{0\}$. Ponieważ $\{0\}$ jest zbiorem jednoelementowym, to $x = y = 0$. Zatem $xy = 0 \cdot 0 = 0 \in \{0\}$. Zatem $\{0\}$ jest zamknięty na mnożenie, więc jest podpółgrupą[4].
Zauważmy, że 0 jest elementem neutralnym w półgrupie $\{0\}$, bowiem dla każdego $x \in \{0\}$ mamy $0 \cdot x = 0 \cdot 0 = 0 = x = 0 = 0 \cdot 0 = x \cdot 0$. Zatem $\{0\}$ jest monoidem z elementem neutralnym 0. Półgrupa $(2\mathbb{N}, \cdot)$ nie jest monoidem, ponieważ dla każdego $n \in 2\mathbb{N}$ mamy $2n \neq 2$, co przeczy neutralności n. Ale w definicji podmonoidu wymagamy, aby większy zbiór był monoidem, więc pytanie o to, czy $\{0\}$ jest podmonoidem $(2\mathbb{N}, \cdot)$ nie ma sensu.

QUOD
ERAT
DEM■

[1]Formalnie działaniem na $\mathbb{N}$ nie jest to samo dodawanie co na $\mathbb{R}$, tylko jego *ograniczenie* do $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ale w praktyce to ograniczenie oznacza się prawie zawsze tym samym symbolem. Tak też będziemy na ogół robić - także w przypadku innych półgrup/monoidów.

[2]Oczywiście mamy na myśli ograniczenie **funkcji** $*$ do $A \times A$, lub inaczej - ograniczenie **działania** $*$ do A.

[3]Ktoś mógłby się tu pokusić o alternatywne sformułowanie definicji podmonoidu - podpółgrupa, która jest monoidem. Niestety, jak pokazuje Zadanie 8 (i mniej dobitnie Przykład 1) prowadzi to do nierównoważnej definicji.

[4]Będziemy, tu i w przyszłości, nadużywać trochę języka pisząc 'półgrupa X' zamiast półgrupa '$(X, *)$', gdy wiadomo o jakie działanie chodzi.

Zadanie 4. Pokazać następujące własności:

1) Dla półgrupy X podzbiory $\emptyset$ oraz X są podpółgrupami.
2) Dla monoidu X z elementem neutralnym e podzbiory $\{e\}$ oraz X są podmonoidami.
3) $\emptyset$ nie jest podmonoidem żadnego monoidu
4) $(\mathbb{N}, \cdot)$ jest podpółgrupą i podmonoidem zarówno $(\mathbb{R}, \cdot)$ jak i $(\mathbb{Z}, \cdot)$
5) $(\mathbb{N}, +)$ jest podpółgrupą i podmonoidem zarówno $(\mathbb{R}, +)$ jak i $(\mathbb{Z}, +)$
6) $(2\mathbb{N}, \cdot)$ jest podpółgrupą $(\mathbb{R}, \cdot)$, ale nie jest jego podmonoidem.

Zadanie 5. Niech M monoid, a A, B jego podmonoidy. Pokazać, że $A \cap B$ jest podmonoidem M.

Zadanie 6. Niech A podmonoid B, a B podmonoid C. Pokazać, że A jest podmonoidem C.

Zadanie 7. Niech A, B podmonoidy C oraz $A \subseteq B$. Pokazać, że A jest podmonoidem B.

Zadanie 8. Niech $(\mathbb{Z}_6, \cdot_6)$ będzie zbiorem reszt modulo 6 z mnożeniem modulo 6. Sprawdzić, że jest to monoid. Zweryfikować, że w monoidzie $(\mathbb{Z}_6, \cdot_6, 1)$ podzbiór $\{2, 4\}$ jest podpółgrupą i monoidem, ale nie jest podmonoidem.

WERSJA 2