Wstęp do algebry abstrakcyjnej
7 października 2022

Listoskrypt 2: Homomorfizmy półgrup i monoidów

Homomorfizmy półgrup:

Tym razem będziemy zajmować się funkcjami między dwiema półgrupami X, Y. Naiwnie można by po prostu rozważać wszystkie funkcje $X \longrightarrow Y$, ale takie podejście do sprawy ignoruje działania w naszych półgrupach. Dlatego nas będą interesować tylko specjalne funkcje - tzn. takie, które *zachowują działanie*.

Definicja 1. Niech $(X, \oplus)$ oraz $(Y, \otimes)$ będą półgrupami. Mówimy, że funkcja $f\colon X \longrightarrow Y$ jest ***homomorfizmem półgrup***, gdy dla każdych $x, x' \in X$ mamy $f(x \oplus x') = f(x) \otimes f(x')$.

Po co zajmować się homomorfizmami? Homomorfizmy pojawiają się naturalnie w wielu dziedzinach matematyki i są same w sobie ciekawymi obiektami. Często pewne własności półgrup można równoważnie zapisać w terminach istnienia/nieistnienia określonego typu homomorfizmu. Czasami pytanie w jednej półgrupie można zamienić za pośrednictwem homomorfizmu na prostsze pytanie w innej półgrupie.

Definicja 2. Homomorfizm półgrup $f\colon X \longrightarrow Y$ między półgrupami $(X, \oplus)$ a $(Y, \otimes)$ nazywamy:
1) ***monomorfizmem*** półgrup, gdy f jest różnowartościowa,
2) ***epimorfizmem*** półgrup, gdy f jest "na",
3) ***endomorfizmem*** półgrup, gdy dziedzina i przeciwdziedzina to ta sama półgrupa, tj. $(X, \oplus) = (Y, \otimes)$,
4) ***izomorfizmem*** półgrup, gdy f jest monomorfizmem i epimorfizmem, czyli gdy f jest bijekcją.
5) ***automorfizmem*** półgrup, gdy f jest endomorfizmem i izomorfizmem.

Mówimy, że półgrupy $(X, \oplus)$ i $(Y, \otimes)$ są ***izomorficzne***, gdy istnieje izomorfizm między nimi.

Izomorficzne półgrupy są 'z punktu widzenia algebry takie same'.

Zadanie 1. Pokazać, że jeśli półgrupy X i Y są izomorficzne oraz X ma element neutralny e_X, to w Y istnieje element neutralny e_Y. Ponadto pokazać, że dla każdego izomorfizmu $f\colon X \to Y$ mamy $f(e_X) = e_Y$.

Zadanie 2. Wskazać przykład półgrup X, Y posiadających elementy neutralne e_X, e_Y odpowiednio oraz homomorfizmu półgrup $f\colon X \to Y$ takiego, że $f(e_X) \neq e_Y$. Czy można taki przykład skontruować, wymagając by f było monomorfizmem? Co, gdy wymagamy by było epimorfizmem?

Zadanie 3. Pokazać, że półgrupa przemienna i nieprzemienna nie mogą być izomorficzne. (Przypomnienie: półgrupa jest przemienna, gdy jej działanie jest przemienne. Półgrupa jest nieprzemienna, gdy nie jest przemienna.)

Homomorfizmy monoidów:

W przypadku monoidów musimy, tak jak to było na ostatnim listoskrypcie, zwrócić szczególną uwagę na element neutralny:

Definicja 3. Niech $(X, \oplus, e_X)$ oraz $(Y, \otimes, e_Y)$ będą monoidami. Mówimy, że funkcja $f\colon X \longrightarrow Y$ jest ***homomorfizmem monoidów***, gdy dla każdych $x, x' \in X$ mamy $f(x \oplus x') = f(x) \otimes f(x')$ oraz $f(e_X) = e_Y$.

Wariant Definicji 2 dla monoidów jest praktycznie taki sam - wystarczy wszystkie wystąpienia słowa *półgrupa* zamienić na słowo *monoid*.[1] Tak samo jak w przypadku półgrup, izomorficzne monoidy mają takie same algebraiczne własności.

[1]Dla śmieszkujących informatyków: nie chodzi o słowa w sensie formalnym (skończone ciągi liter), tzn. opisywana zamiana powinna uwzględniać deklinację rzeczownika *monoid*.

Zadania:

Zadanie 4. Pokazać, że obraz homomorfizmu monoidów jest podmonoidem przeciwdziedziny. Zauważyć, analizując przedstawiony dowód, że analogicznie jest dla homomorfizmów półgrup.

Zadanie 5. Czy złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem?

Zadanie 6. Pokazać, że zbiór wszystkich endomorfizmów półgrupy z operacją składania funkcji jest monoidem.

Zadanie 7. Dla homomorfizmu monoidów f pokazać, że przeciwobraz singletonu elementu neutralnego przeciwdziedziny jest podmonoidem dziedziny.

Zadanie 8. Niech X, Y będą monoidami, $x \in X$ elementem odwracalnym w X, a $f\colon X \to Y$ homomorfizmem monoidów. Pokazać, że $f(x)$ jest odwracalny w Y oraz $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$.

Zadanie 9. Pokazać, że $\mathbb{Z}_3$ i $\mathbb{Z}_6$, wyposażone w mnożenie modulo 3 i 6 odpowiednio, są monoidami. Dowieść, że funkcja $\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_6$ zadana poprzez

$$0 \mapsto 0$$
$$1 \mapsto 4$$
$$2 \mapsto 2$$

jest homomorfizmem półgrup, ale nie jest homomorfizmem monoidów.

Zadanie 10. Znaleźć monomorfizm monoidów $(\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, \cdot)$.

Zadanie 11. Ile jest endomorfizmów monoidu $(\mathbb{Z}_2, +)$?

Zadanie 12. Ile jest endomorfizmów monoidu $(\mathbb{Z}, +)$?

Dla chętnych (nie obowiązuje na sprawdzianach etc.):

Definicja 4. Niech X będzie półgrupą. ***Kongruencją*** w X nazywamy relację równoważności $\sim$ spełniającą dla każdych $a, b, x, y \in X$

$$(x \sim y \wedge a \sim b) \implies ax \sim by$$

Zadanie 13. Zdefiniować, w terminach działania w X, działanie w zbiorze klas abstrakcji relacji $\sim$ (oznaczanym $X/_\sim$) tak, aby otrzymać półgrupę.

Zadanie 14. Pokazać, że dla homomorfizmu półgrup relacja $\sim$ zdefiniowana na dziedzinie f poprzez

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

jest kongruencją.

Zadanie 15. Czy każda kongruencja pochodzi od pewnego homomorfizmu (jak w Zadaniu 14)?

Zadanie 16. Mówimy, że półgrupa X ma ***własność skracania***, gdy dla dowolnych $a, x, y \in X$ mamy

$$ax = ay \implies x = y.$$

Wytłumaczyć czemu implikacja odwrotna zawsze zachodzi. Wskazać przykład półgrupy bez własności skracania.