Geometria różniczkowa
Lista 2

1. Niech $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ jest immersjonowaną powierzchnią i niech $p \in \Sigma$. Pokaż, że istnieje izometria $\psi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ taka, że $\psi(p) = 0$, $T_0\psi(\Sigma) = Lin\{\partial x, \partial y\}$ i $\psi(\Sigma)$ w otoczeniu 0 wyraża się wykresem funkcji postaci
$$z = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}by^2 + o(x^3 + y^3).$$
2. Niech n będzie polem wektorów normalnych na $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$ i niech $p \in \Sigma$. Definiujemy odwzorowanie kształtu $S\colon T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ wzorem $S(X) = -D_X(n)$, $X \in T_p\Sigma$. Pokaż, że:
   - S jest dobrze określone, tzn. $S(X) \in T_p\Sigma$.
   - Jeżeli $p = 0$ i Σ jest reprezentowana jak powyżej, to w bazie $\partial x, \partial y$ macierz odwzorowania S jest diagonalna z wartościami własnymi a oraz b. Wywnioskuj, że $K = det(S)$.
3. Zbadaj, czy krzywizna Gaussa powierzchni opisanej parametrycznie $\{(r\cos(z), r\sin(z), z) \mid r, z \in \mathbf{R}\}$ jest zerowa.
4. Krzywą $\{(x, f(x), 0)\}$ obracamy w $\mathbf{R}^3$ wokół osi OX. Policz krzywiznę Gaussa powstałej powierzchni obrotowej. Uzasadnij, że "tworzące" tej powierzchni (krzywe będące obrazami wyjściowej przez obroty) są styczne do jednego z kierunków głównych.
5. Podobnie jak w poprzednim zadaniu obracamy krzywą wokół osi OX, ale tym razem parametryzujemy ją długością łuku: $\gamma(t) = (f(t), g(t), 0)$, $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$. Uzasadnij, że wtedy $K = -g''/g$. Korzystając z tego wzoru opisz powierzchnie obrotowe o krzywiźnie -1, 0, 1.
6. Sprawdź, że powierzchnie $P(s,t) = (s\cos t, s\sin t, \log s)$ i $Q(s,t) = (s\cos t, s\sin t, t)$ mają w $P(s,t)$ i $Q(s,t)$ równe krzywizny Gaussa, mimo że $Q(s,t) \mapsto P(s,t)$ nie jest lokalną izometrią. Postaraj się pokazać, że nie istnieje izometria pomiędzy obrazami P i Q.
7. Uzasadnij, że każda zwarta powierzchnia w $\mathbf{R}^3$ ma punkt o dodatniej krzywiźnie Gaussa.
8. Udowodnij, że w $\mathbf{R}^3$ nie ma zwartych powierzchni o krzywiźnie średniej 0.
9. Niech $\gamma\colon (a,b) \to \mathbf{R}^3$ będzie krzywą, taką że $\gamma'(t)$ i $\gamma''(t)$ są – dla każdego t – liniowo niezależne. Określmy $\Gamma\colon (a,b) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \to \mathbf{R}^3$ wzorem $\Gamma(t,s) = \gamma(t) + s\gamma'(t)$ (opisz ten przepis słowami). Pokaż, że Γ jest immersją, a krzywizna Gaussa (obrazu) Γ wynosi 0. Powierzchnie tej postaci nazywamy *stycznościowo rozwijalnymi.*
10. (Lemat Hilberta) Jeśli $k_1(p) > k_2(p)$, przy czym k_1 ma maksimum w p, a k_2 ma minimum w p, to $K(p) \leqslant 0$.
    - Niech (X, Y) będzie reperem ortonormalnym kierunków głównych na otoczeniu p ($SX = k_1X$, $SY = k_2Y$). Niech $\nabla_X Y = aX$, $\nabla_Y X = bY$ dla pewnych funkcji a, b. Wylicz, że $K = -X(b) - Y(a) - (a^2 + b^2)$. Wsk: theorema egregium.
    - Użyj równań Codazziego i warunków $X_p(X(b)) \geqslant 0$, $Y_p(Y(a)) \leqslant 0$ by pokazać, że $X_p(b) \geqslant 0$, $Y_p(a) \geqslant 0$.
11. (Tw. Liebmanna) Spójna zwarta powierzchnia w $\mathbf{R}^3$ o stałej krzywiźnie Gaussa jest sferą.
12. (Tw. Hilberta) Nie ma zupełnych powierzchni M w $\mathbf{R}^3$ o stałej $K = -1$.
    - W otoczeniu każdego punktu takiej powierzchni istnieje *sieć Czebyszewa*: immersja $g\colon (-\epsilon, \epsilon) \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$, taka że wszystkie krzywe postaci $x \mapsto g(x,y)$ i $y \mapsto g(x,y)$ są sparametryzowane długością łuku a ich wektory styczne są izotropowe względem drugiej formy podstawowej (X jest izotropowy, jeżeli $II(X,X) = 0$).
    - Istnieje sieć Czebyszewa $g\colon \mathbf{R}^2 \to M$. Tu należy użyć zupełności.
    - Niech $\omega(x,y)$ oznacza kąt między wektorami $Dg(\partial_x)$, $Dg(\partial_y)$ w $T_{g(x,y)}M$ (tak więc $\omega\colon \mathbf{R}^2 \to (0,\pi)$); wtedy $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} = (-K)\sin\omega$.
    - Nie istnieje funkcja $\omega\colon \mathbf{R}^2 \to (0,\pi)$ spełniająca równanie $\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} = \sin\omega$.