Geometria różniczkowa
Lista 3

1. Na otwartej wstędze Möbiusa zadaj strukturę 1-wymiarowej wiązki liniowej nad S^1. Zauważ, że taka wiązka nie ma nigdzie nieznikającego cięcia (czyli takiego cięcia s, że $s(p) \neq 0$ dla każdego p).

2. Niech M będzie gładką rozmaitością, E zbiorem, $\pi\colon E \to M$ epimorfizmem a $\{U_\alpha\}_\alpha$ otwartym pokryciem M. Załóżmy, że mamy dane bijekcje $\phi_\alpha\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbf{R}^k$ tak, że zachodzi $\pi_1 \circ \phi_\alpha = \pi$ oraz złożenie $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^k \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{R}^k$ wyraża się wzorem $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, V) = (p, A(p)V)$ gdzie $A\colon U_\alpha \cap U_\beta \to GL_k(\mathbf{R})$ jest odwzorowaniem gładkim. Pokaż, że $\{\phi_\alpha\}_\alpha$ zadaje na E strukturę wiązki.

3. Zadaj strukturę i sprawdź definicję wiązki dla E^*, $\mathrm{Hom}(E, F)$ i $E \otimes F$ (gdzie E i F są wiązkami nad rozmaitością M).

4. $TS^n \oplus \epsilon = \epsilon^{n+1}$? $TS^3 = \epsilon^3$; a TS^7?

5. Grssmannian $G = G(k, V)$ to rozmaitość k-wymiarowych podprzestrzeni liniowych V. Wiązka tautologiczna nad Grassmannianem G to podrozmaitość $\gamma = \{(W, w) : G \ni W \ni w\} \subset G \times V$. Udowodnij, że γ jest wiązką. Pokaż, że $TG = \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.

6. Sprawdź, że wiązka normalna do podrozmaitości M w $\mathbf{R}^N$ jest wiązką.

7. Niech s będzie nigdzie nieznikającym cięciem wiązki E nad M. Pokaż, że dla pewnej wiązki F nad M mamy $E = \epsilon \oplus F$ (wsk. zadaj na E gładki iloczyn skalarny).

8. Pokaż, że $M(V_1 \times \ldots \times V_n; V_{n+1})$ jest naturalnie izomorficzna z $M(V_1 \times \ldots \times V_n \times V_{n+1}^*; \mathbf{R})$.

9. Pokaż, że jeżeli odwzorowanie $F\colon \Gamma(E_1) \times \ldots \times \Gamma(E_n) \to \Gamma(E_{n+1})$ jest C^∞-wieloliniowe, to F można zinterpretować jako cięcie wiązki $\Gamma(E_1^* \otimes \ldots \otimes E_n^* \otimes E_{n+1})$. Takie cięcia nazywają się polami tensorowymi.

10. Pokaż, że tensor krzywizny F jest C^∞-wieloliniowy (a zatem jest polem tensorowym).

11. Niech M będzie podrozmaitością $\mathbf{R}^N$. Na wiązce normalnej ν_M zadajemy koneksję następująco: $(\nabla_X s)(p)$ to rzut prostopadły na $T_pM^\perp$ pochodnej kierunkowej funkcji $s\colon M \to \mathbf{R}^N$ w kierunku wektora X_p. Sprawdź, że to jest naprawdę koneksja. Zrób podobną na TM. Sprawdź, że koneksje te spełniają warunek $X\langle s, s'\rangle = \langle \nabla_X s, s'\rangle + \langle s, \nabla_X s'\rangle$.

12. Sprawdź, że dla dowolnych funkcji $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty U$ wzór $\nabla_{a^i\partial_i} s^j e_j = a^i(\partial_i s^k + \Gamma_{ij}^k s^j)e_k$ zadaje koneksję na $E|_U$, gdzie ∂_i i e_k to trywializacje odpowiednio $TM|_U$ i $E|_U$.

13. Niech ∇ będzie koneksją liniową. Pokaż, że tensor torsji $\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ jest C^∞-dwuliniowy. Niech Γ_{ij}^k będą symbolami Christoffela ∇ w trywializacji zadanej przez współrzędne. Pokaż, że $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ wtedy i tylko wtedy gdy ∇ jest symetryczna (wsk. zauważ, że gdy to potrzebne możemy założyć $[X, Y] = 0$).

14. Załóżmy, że cięcie s wiązki E zeruje się w p. Udowodnij, że dla dowolnych dwóch koneksji ∇, ∇' na E i dowolnego $X \in \Gamma(TM)$ mamy $(\nabla_X s)(p) = (\nabla'_X s)(p)$.

15. Załóżmy, że na wiązkach E, F zadane są koneksje ∇^E, ∇^F. Spróbuj wyprodukować z nich koneksje na wiązkach E^*, $\mathrm{Hom}(E, F)$ i $E \otimes F$. (Wsk. wymyślaj różne warianty reguły Leibniza.)

16. Sprawdź, że $Id \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E, E))$ jest cięciem równoległym (tzn. dla każdego pola wektorowego X na M zachodzi $\nabla_X Id = 0$) dla koneksji indukowanej z koneksji na E.

17. Niech P będzie projektywnym modułem nad $C^\infty M$, M zwarta. Udowodnij, że istnieje wiązka wektorowa E nad M, taka że $P = \Gamma(E)$, i odwrotnie, dla każdej wiązki wektorowej E nad M moduł $\Gamma(E)$ nad pierścieniem $C^\infty M$ jest projektywny.