Geometria różniczkowa
Lista 6

1. Udowodnij, że jeśli $\gamma\colon (0,1) \to M$ jest geodezyjna i $\lim_{t\to 0^+} \gamma(t) = p$, to istnieje $v \in T_pM$, taki że $\gamma = \gamma_v$.
2. Podaj przykład metryki riemannowskiej na 2 wymiarowym torusie, takiej że pewne dwa punkty torusa da sie połączyć nieprzeliczalnie wieloma geodezyjnymi.
3. Opisz geodezyjne w produkcie dwóch rozmaitości riemannowskich.
4. Niech (M, g) będzie n wymiarową rozmaitością riemannowską.
   - Pokaż, że $Ric(X, Y) = Ric(Y, X)$
   - Niech g_λ będzie przeskalowaną metryką g, tzn: $g_\lambda(X, Y) = \lambda^2 g(X, Y)$. Pokaż, że $Ric_{g_\lambda} = Ric_g$ oraz $\kappa_{g_\lambda} = \lambda^{-2}\kappa_g$.
   - Pokaż, że $Ric(X, X) = \Sigma_{i=2}^n \kappa(X, e_i)$ gdzie $X, e_2, \ldots, e_n$ jest bazą ON przestrzeni stycznej.
5. Skrytykuj następującą wariację na temat krzywizny Ricciego: $NieRic(X, Y) = Tr(Z \mapsto R(X, Y)Z)$.
6. Pokaż, że cofnięcie wiązki jest wiązką.
7. Pokaż, że krzywizny sekcyjne wyznaczają pełny tensor krzywizny. Dokładniej: niech V będzie przestrzenią z iloczynem skalarnym. Załóżmy, że R i R' są 3-liniowymi odwzorowaniami $V \times V \times V \to V$ spełniającymi wszystkie cztery tożsamości (symetrie krzywizny) z wykładu. Załóżmy też, że dla każdej ortonormalnej pary wektorów $X, Y \in V$ zachodzi $\langle R(X, Y)Y, X\rangle = \langle R'(X, Y)Y, X\rangle$. Udowodnij, że wówczas $R = R'$. Czy jeśli założymy tylko, że powyższa równość zachodzi dla par wektorów (X, Y) pochodzących z pewnej ortonormalnej bazy V, to teza pozostanie prawdziwa?
8. Niech $M = M_{n\times n}(\mathbf{R})$ i niech G będzie podrozmaitością M i zarazem grupą z operacją mnożenia macierzy. Załóżmy ponadto, że G jest zawarta w zbiorze macierzy ortogonalnych. Przestrzenie styczne T_xG możemy utożsamiać z podprzestrzeniami M, bo M jest przestrzenią liniową. Niech $\mathrm{Lie}(G) = T_eG$ (gdzie $e = I$) i niech iloczyn skalarny na Lie będzie zadany wzorem $\langle a, b\rangle = \mathrm{Tr}(ab^T)$. Z $a \in \mathrm{Lie}(G)$ wiążemy pole wektorowe X_a na G zadane tak: $(X_a)_x = xa$ (sprawdź, że $(X_a)_x \in T_xG$); pola tej postaci nazywamy *lewoniezmienniczymi*. Wreszcie na G zadajemy metrykę Riemanna żądając, by iloczyn skalarny dwóch pól lewoniezmienniczych był funkcją stałą (innymi słowy jeśli $u, v \in T_xG$, to $\langle u, v\rangle_x = \langle x^{-1}u, x^{-1}v\rangle_e$). Niech ∇ będzie koneksją Levi-Civity tej metryki, zaś R tensorem krzywizny koneksji ∇. Uzasadnij, że
   (a) Elementy $\mathrm{Lie}(G)$ to macierze antysymetryczne oraz, że iloczyn skalarny na $\mathrm{Lie}(G)$ jest dodatnio określony.
   (b) Dla dowolnego $y \in G$ przekształcenia $G \ni x \mapsto yx \in G$ oraz $G \ni x \mapsto xy \in G$ są izometriami powyższej metryki Riemanna.
   (c) $t \mapsto e^{ta}$ (eksponens macierzy) jest krzywą całkową pola X_a.
   (d) $\phi_t^a(x) = xe^{ta}$ jest potokiem pola X_a.
   (e) $[X_a, X_b] = X_{[a,b]}$ (gdzie $[a, b] = ab - ba$).
   (f) Jeśli X, Y, Z są polami lewoniezmienniczymi, to
   $$\langle [X, Y], Z\rangle = \langle [Z, X], Y\rangle, \qquad \nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \qquad R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z].$$
   (g) G ma nieujemną krzywiznę sekcyjną, tzn. dla dowolnego $x \in G$ i dowolnych $u, v \in T_xG$ mamy $\langle R(u, v)v, u\rangle \geqslant 0$.
   (h) Dla $a \in \mathrm{Lie}(G)$ geodezyjna γ_a jest dana wzorem $\gamma_a(t) = e^{ta}$.
   (i) Dla $a \in \mathrm{Lie}(G)$ eksponens riemannowski $exp_e(a)$ pokrywa sie z eksponensem macierzowym e^a.