Seminarium: Własność (T) i zastosowania

Semestr zimowy 2023/2024
Termin: do ustalenia

1 Opis

(T) jest własnością grup topologicznych. Zdefiniowana przez Dawida Każdana pod koniec lat 60 w terminach reprezentacji grup, służyła do badania krat w grupach Liego (na przykład $SL_n(Z)$ jest kratą w $SL_n(R)$). Okazało się, że sama własność i zjawiska z nią związane mają zastosowania w wielu dziedzinach matematyki oraz informatyki teoretycznej. W szczególności można konstruować, często efektywnie, różne interesujące obiekty matematyczne. Mimo, że własność (T) została zdefiniowana prawie 60 lat temu, zagadnienia z nią związane są dalej aktywnie badane.

Seminarium podzielimy na dwie części. W pierwszej omówimy podstawowe zagadnienia związane z własnością (T) oraz pokażemy, że grupy typu $SL_n(Z)$ mają własność (T). Będzie to mieszanka geometrii, algebry liniowej i analizy. W części drugiej omówimy niektóre zastosowania: konstrukcje ekspanderów (rodzin grafów o ekstremalnych własnościach), kodów korekcyjnych, szybką zbieżność spacerów losowych do rozkładu jednostajnego i związane z tym algorytmy służące do losowania elementów grup skończonych.

Będzie potrzebna dobra znajomość algebry liniowej, podstawy teorii miary, topologii i teorii grup. Analiza funkcjonalna oraz teoria reprezentacji grup będzie przydatna ale z tych działów będziemy uzupełniali wiedzę w razie potrzeb.

Podstawowy podręcznik: B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette, Kazhdan's Property (T)

2 Plan

Plan wykładów (może podlegać modyfikacjom).

W1. Własność (T). Definicja, stała Każdana, średniowalność, topologia Fella [1, Rozdziały 1.1 oraz 1.2].

W2. Podstawowe własności grupy z (T) [1, Rozdział 1.3]. Ciała lokalne, liczby p-adyczne [1, Załącznik D.4], [7, Rozdział 12], W3. Grupy Liego i kraty. Miara Haara. $SL_n(Z)$ jest kratą w $SL_n(R)$ [6, Rozdział 7] oraz [5].

W4. $SL_n(K)$ ma własność (T) dla $n > 2$ i K ciała lokalnego [1, Rozdział 1.4].

W5. Ekspandery I. Definicja kombinatoryczna, probabilistyczny dowód istnienia [3, Rozdział 1]. Konstrukcja za pomocą (T) [3, Rozdział 3.3]. Definicja spektralna [3, Rozdział 4.2].

W6. Ekspandery II. Spacery losowe [8, Rozdział 10.1] i tw. Alona-Boppany [2, Rozdział 5].

W7. Kody korekcyjne [8, Rozdział 28].

W8. Konstrukcja kodów korekcyjnych za pomoca ekspanderów [8, Rozdział 29].

W9. Grupa automorfizmów grupy wolnej, spacery losowe na grupach i product replacement algorithm [4].

Dodatkowe zagadnienia:

W10. Metoda spektralna (dowodzenie własności (T) za pomocą szacowania spektrum grafów skończonych)

W11. Komputerowo wspomagane sposoby dowodzenia własności (T) i semidefinite programming.

W12. Wyżej wymiarowe ekspandery i wyżej wymiarowa własność (T).

Literatura

[1] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe, and Alain Valette. *Kazhdan's Property (T)*, volume 11 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[2] Shlomo Hoory, Nathan Linial, and Avi Wigderson. Expander graphs and their applications. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 43(4):439–561, 2006.

[3] Alexander Lubotzky. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, volume 125 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. With an appendix by Jonathan D. Rogawski.

[4] Alexander Lubotzky and Igor Pak. The product replacement algorithm and Kazhdan's property (T). *J. Amer. Math. Soc.*, 14(2):347–363, 2001.

[5] Sebastian Michler. An example of arithmetic groups.

[6] Dave Witte Morris. *Introduction to arithmetic groups*. Deductive Press, [place of publication not identified], 2015.

[7] Władysław Narkiewicz. *Teoria liczb*. PWN, 2003.

[8] Daniel Spielman. *Spectral and algebraic graph theory*.