# Liczby Fibonacciego a wartości własne

## 1 Wartości i wektory własne

Wektorem własnym macierzy $A$ nazywamy niezerowy wektor $v \in \mathbb{R}^2$ taki, że $A(v) = \lambda v$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$. Liczbę $\lambda$ nazywamy wartością własną $A$ związaną z wektorem $v$.

1. Pokaż, że jeżeli $v$ jest wektorem własnym pewnej macierzy, to każda jego niezerowa wielokrotność jest wektorem własnym.
2. Znajdź wektory własne i wartości własne macierzy
   - $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, jeżeli $\lambda \neq \mu$
   - $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
   - $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. Niech $A(v) = \lambda v$. Wylicz wartość $A^n(v)$.
4. Niech $x = \alpha v + \beta w$ gdzie $v$ oraz $w$ są wektorami własnymi macierzy $A$ o wartościach własnych $\lambda$ oraz $\mu$ odpowiednio. Oblicz $A^n(x)$ w terminach liniowej kombinacji $v$ oraz $w$.
5. Niech $A_\alpha$ będzie macierzą obrotu o kąt $\alpha$. Dla jakich kątów $A_\alpha$ ma wektory własne?

## 2 Ciąg Fibonacciego

Ciąg Fibonacciego to ciąg zadany równaniem rekurencyjnym $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ gdzie $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

1. Niech $X_{n+1} = 2X_n + 1$ gdzie $X_0 = 1$. Znajdź jawny wzór na wyraz tego ciągu.
2. Do czego może przydać się jawny wzór na wyraz ciągu? Czy aby wyliczyć $X_n$ potrzeba wykonać $n$ operacji?
3. Znajdź macierz $A$ taką, że $A\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$.
4. Wywnioskuj, że $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$. Wylicz wyrazy $A^n$.
5. Znajdź wszystkie wartości własne $A$. Dla każdej wartości własnej znajdź związany z nią wektor własny.
6. Zinterpretuj geometrycznie macierz $A$.
7. Wyraź $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ za pomocą kombinacji wektorów własnych $A$.
8. Znajdź jawny wzór na $F_n$ (wsk. wykonaj macież $A^n$ na kombinacji liniowej wektorów $v$).
9. Pokaż, że $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ (dla znających wyznacznik).
10. Jakie twierdzenia o liczbach Fibonacciego można łatwo pokazać używając wzoru jawnego?