Macierze

Jeżeli nie jest powiedziane inaczej, to $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$. Wyznacznik macierzy definiujemy przez $det(A) = ad - bc$. Macierz odwrotna do A to macierz B taka, że $AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = BA$. Wtedy B oznaczamy przez $B = A^{-1}$.

1 Rozgrzewka

1. Na jaki punkt A przekształca punkt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$?
2. Wymyśl konkretną macierz, kilka punktów i znajdź ich obrazy.
3. Na co A przekształca oś x, oś y, prostą $x = y$?
4. Wyraź jednokładność o skali λ jako macierz.
5. Znajdź przykłady macierzy takich, że $AB \neq BA$.
6. Oblicz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)A$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)A$, $A\left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $A\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Jak opisać słownie wynik takiego działania?
7. Oblicz A^n dla macierzy $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$.
8. Znajdź macierz odwrotną do tych z poprzedniego zadania.
9. Pokaż, że dla dowolnych punktów X i Y istnieje macierz A taka, że $A\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = X$ oraz $A\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = Y$.
10. Czy macierz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ma macierz odwrotną?
11. Znajdź jakieś przekształcenie płaszczyzny w siebie, które nie wyraża się jako macierz.
12. Na jaką figurę odwzorowanie $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$ przekształca okrąg $x^2 + y^2 = 1$?

2 Odwzorowania liniowe

Odwzorowanie $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nazywamy liniowym jeżeli $L(\alpha X + \beta Y) = \alpha L(X) + \beta L(Y)$ dla dowolnych punktów (wektorów) X,Y oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

13. Pokaż, że macierz jest odwzorowaniem liniowym.
14. Pokaż, że odwzorowanie liniowe jest wyznaczone przez swoje wartości na wektorach $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ i $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
15. Pokaż, że każde odwzorowanie liniowe jest macierzą.
16. Pokaż, że zbiór $\{\alpha X + (1-\alpha)Y \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ to prosta przechodząca przez punkty X, Y. Co można powiedzieć o tym punkcie gdy $\alpha \in [0, 1], \alpha > 1, \alpha < 0$?
17. Pokaż, że odwzorowanie liniowe przenosi proste na proste.
18. Pokaż, że odwzorowanie liniowe przenosi środek odcinka na środek odcinka. Jak z tego prosto wywnioskować, że w trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie? (wsk. zadanie 9)
19. Pokaż, że obrót jest odwzorowaniem liniowym. Wyraź obrót przez macierz. Przypomnij sobie liczby zespolone. Jak możesz teraz zinterpretować mnożenie przez liczbę zespoloną?

3 Wyznacznik

20. Niech $B = \left(\begin{smallmatrix} d & -c \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$. Oblicz AB oraz BA. Jak znaleźć macierz odwrotną do A jeżeli $det(A) \neq 0$?

21. Zobacz, że macierze z zadania 6 mają taki sam wyznacznik jak A.

22. Niech O - środek układu współrzędnych i niech X,Y dwa dowolne punkty. Pokaż, że trójkąt OXY ma takie samo pole jak trójkąt OXY' gdzie $Y' = Y + \alpha X$. Podobnie dla $OX'Y$.

23. Pokaż, że podwojone pole trójkąta OXY to wyznacznik macierzy której kolumnami są współrzędne X i Y. (wsk. przesuwaj wierzchołki trójkąta tak aby wylądowały na osiach układu współrzędnych. Jednocześnie śledź co dzieje się z wyznacznikiem macierzy której kolumnami są współrzędne wierzchołków).

24. Pokaż, że jeżeli T jest trójkątem o polu $P(T)$, to pole obrazu $A(T)$ wynosi $det(A)P(T)$.

25. Multiplikatywność wyznacznika: $det(AB) = det(A)det(B)$.