

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: nauczycielska

Agnieszka Sołtys

Teoria płaszczyzny afinicznej

Praca magisterska
Napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wstęp

Przez płaszczyznę afiniczną rozumie się tradycyjnie strukturę złożoną z dwóch zbiorów: punktów i prostych, związanych ze sobą relacją incydencji. Jest ona przedmiotem zainteresowań geometrii afinicznej opartej na trzech aksjomatach incydencji oraz aksjomacie równoległości. Istnieje rodzina modeli płaszczyzny afinicznej, gdzie punktami są pary elementów dowolnego ciała a proste to zbiory punktów spełniające równanie liniowe. Takie modele istotnie różnią się między sobą. Możemy wskazać te, których liczba punktów jest skończona, a tym samym istnieje skończona liczba prostych. Są to modele przy budowie, których korzystamy z ciał skończonych. Istotnie różnią się one od modeli z ciałami nieskończonymi. Więcej, modele skończone różnią się także między sobą min liczbą punktów i prostych.

W pracy, którą przedstawiam można wyróżnić dwa zasadnicze cele. Pierwszy, to prezentacja modeli płaszczyzny afinicznej wraz z dowodami spełniania przez nie wszystkich aksjomatów geometrii afinicznej, obu aksjomatów Desarguesa oraz dwóch aksjomatów Pappusa. Drugim celem jest przedstawienie dowodu, że nie ma innych modeli geometrii afinicznej niż te przedstawione w pierwszej części pracy.

Materiał zawarty w pracy, nie jest zupełnie nowy. Pierwszy w języku polskim pełny wykład podstaw geometrii afinicznej przedstawiła Wanda Szmielew w książce "Od geometrii afinicznej do euklidesowej". Jednak praca moja to samodzielne opracowanie całkiem elementarnego ujęcia tych zagadnień. Opisu dokonałam z myślą o możliwym wykorzystaniu tej pracy przez zdolnych uczniów liceum lub na zajęciach dla studentów matematyki specjalności nauczycielskiej.

Spis treści

<i>Wstęp</i>	1
<i>Aksjomaty pappusowskiej płaszczyzny afinicznej</i>	3
1.1. Pojęcia pierwotne	3
1.2. Aksjomaty	3
<i>Modele algebraiczne płaszczyzny afinicznej</i>	6
2.1. Opis modelu K^2 – interpretacja pojęć pierwotnych	6
2.2. Weryfikacja drugiego aksjomatu incydencji	6
2.3. Niejednoznaczność równań dla prostych	8
2.4. Sprawdzenie pierwszego aksjomatu incydencji	9
2.5. Weryfikacja trzeciego aksjomatu incydencji	11
2.6. Sprawdzenie aksjomatu równoległości	11
2.7. Sprawdzenie pierwszego aksjomatu Desarguesa	13
2.8. Dowód drugiego aksjomatu Desarguesa	17
2.9. Sprawdzenie zachodzenia aksjomatów Pappusa	20
2.10. Przykładowe modele płaszczyzny afinicznej	20
<i>Własności płaszczyzny afinicznej wyprowadzone z aksjomatów</i>	22
3.1. Równoległość relacją przechodnią	22
3.2. Równoliczność pęków prostych	24
3.3. Definicja rzutu równoległego	25
3.4. Równoliczność zbioru punktów należących do prostych	25
3.5. Równoliczność zbiorów prostych o jednym kierunku	27
3.6. „Układ współrzędnych”	28
<i>Działania i ich własności na prostej</i>	30
4.1. Dodawanie	30
4.2. Mnożenie	33
<i>Izomorficzność ciał na dwóch osiach</i>	36
5.1. Odwzorowanie	36
5.2. Sprawdzenie czy Π jest izomorfizmem	36
<i>Równania prostych</i>	39
6.1. Lemat	39
6.2. Równania prostych	41

ROZDZIAŁ 1

Aksjomaty pappusowskiej płaszczyzny afinicznej

Każda próba przedstawienia teorii geometrii elementarnej wiąże się z wprowadzeniem pewnych pojęć geometrycznych, których nie definiuje się w zwykłym sensie. Zwane są one *pojęciami pierwotnymi*. Należą do nich np. pojęcie punktu, prostej czy płaszczyzny. Posiadają one pewne własności i zachodzą między nimi związki. Zdania wyrażające te własności i związki, przyjmowane bez dowodu, nazywamy *aksjomatami*. Przystępując do budowania (czy raczej przekazywania) teorii pappusowskiej płaszczyzny afinicznej sporządzamy listę pojęć pierwotnych i twierdzeń przyjmowanych bez dowodów – aksjomatów. Wszystkie pojęcia, które pojawią się w dalszych rozdziałach będą już dokładnie określone, pozostałe twierdzenia będą miały dowody.

1.1. Pojęcia pierwotne

Aksjomaty geometrii dają niejawne definicje wszystkich niezdefiniowanych terminów geometrycznych, jak „prosta”, „punkt”, „relacja incydencji” itd. W rzeczywistości fizycznej pod pojęciem „punkt” kryje się bardzo mały przedmiot, taki jak kropka narysowana ołówkiem, natomiast „linia prosta” jest to abstrakcja naciągniętej nici. W świecie realnym nie znajdziemy idealnego punktu czy prostej. Możemy jednak bez trudu podać ich modele. Dla naszej teorii przyjmiemy trzy pojęcia pierwotne:

1. punkt,
2. prosta,
3. relacja incydencji (leżenia punktu na prostej).

Inne pojęcia pojawiające się w treści aksjomatów są zdefiniowane za pomocą pojęć pierwotnych.

1.2. Aksjomaty

Metoda aksjomatyczna w geometrii została zapoczątkowana przez Euklidesa z Aleksandrii. Jest on autorem pierwszego znanego w pełni wykładu geometrii opracowanego tą metodą. W rozdziale tym przywołam treść aksjomatów, które tworzą *geometrię afiniczną*. Są to aksjomaty incydencji oraz aksjomat równoległości.

Jeśli dołączymy do nich jeszcze dwa aksjomaty Desarguesa i dwa aksjomaty Pappusa to mamy do czynienia z *pappusowską geometrią afiniczną*^{*}. Dla przejrzystszego

^{*} W obecności aksjomatów incydencji i aksjomatu równoległości oba aksjomaty Desarguesa oraz pierwszy aksjomat Pappusa wynika z drugiego aksjomatu Pappusa. Dowód tego faktu znajduje się w książce Wandy Szemielew „Od geometrii afinicznej do euklidesowej” (Tw. 3.3.7 str.51). W przedstawionej pracy korzystamy z wszystkich podanych wyżej aksjomatów. Dla ułatwienia rozumowania nie staramy się zredukować liczby aksjomatów.

przedstawienia treści aksjomatów posłużymy się rysunkami, które jedynie schematycznie reprezentują obiekty występujące w aksjomatach.

Pierwszy aksjomat incydencji

Dla dowolnych różnych punktów A i B istnieje dokładnie jedna prosta p przechodząca przez te punkty.

Drugi aksjomat incydencji

Na każdej prostej leżą przynajmniej dwa punkty.

Trzeci aksjomat incydencji

Istnieją trzy punkty nie leżące na jednej prostej.

Aksjomat równoległości

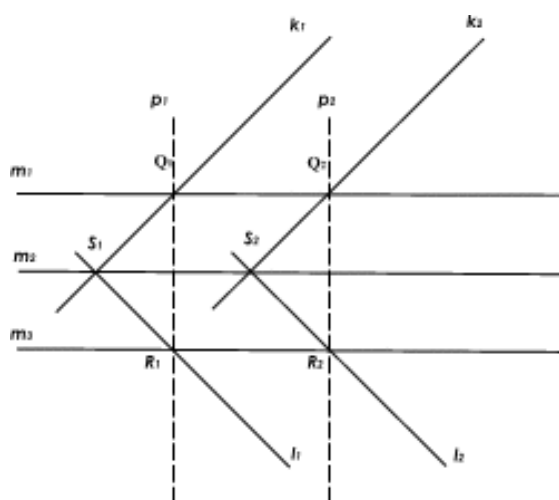
Jeśli punkt A nie leży na prostej p , to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkt A i nie przecinająca p .

DEFINICJA 1

Proste l_1 i l_2 nazywamy równoległymi, gdy nie przecinają się, tzn. nie mają punktów wspólnych lub, gdy są jedną i tę samą prostą.

Pierwszy aksjomat Desarguesa

Treść aksjomatu (relacje pomiędzy odpowiednimi prostymi) jest schematycznie zilustrowana za pomocą poniższego rysunku.

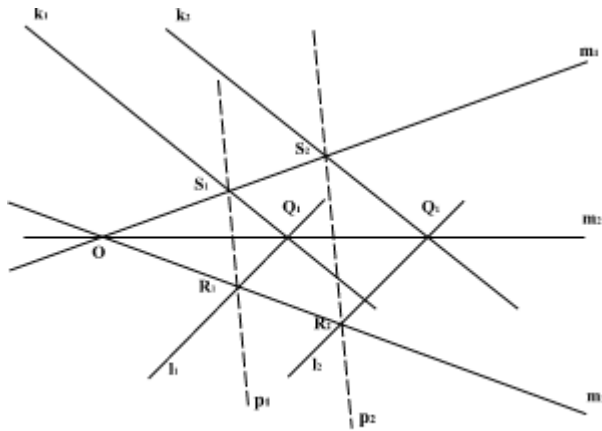


Rys. 1.1.

Jeśli $m_1 \parallel m_2 \parallel m_3$ oraz $l_1 \parallel l_2$ i $k_1 \parallel k_2$ to $p_1 \parallel p_2$.

Drugi aksjomat Desarguesa

Proste m_1, m_2, m_3 mają punkt wspólny O i są różne. Natomiast proste k_1, k_2 i l_1, l_2 nie przechodzą przez punkt O . Sytuację schematycznie obrazuje poniższy rysunek.



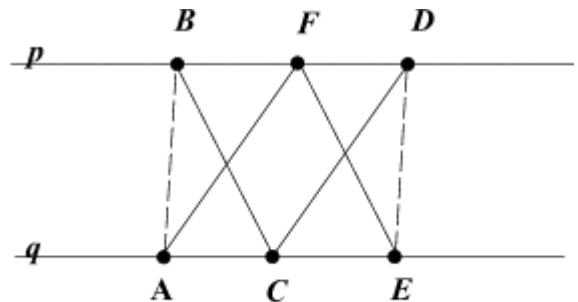
Rys. 1.2.

Jeśli proste m_1, m_2, m_3 mają jeden punkt wspólny oraz $l_1 \parallel l_2$ i $k_1 \parallel k_2$ to $p_1 \parallel p_2$.

Pierwszy aksjomat Pappusa

Proste p, q są równoległe i różne. Natomiast punkty A, C, E należące do prostej q , punkty B, F, D leżą na prostej p . Sytuację schematycznie przedstawia rysunek 1.3.

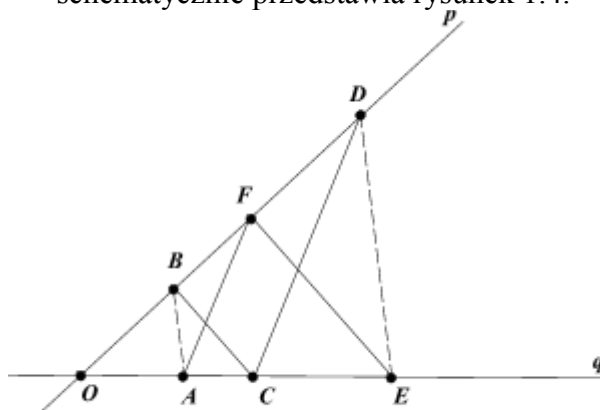
Jeżeli $p \parallel q$, $AF \parallel CD$ i $BC \parallel EF$ to prosta AB jest równoległa do prostej DE ($AB \parallel DE$).



Rys. 1.3.

Drugi aksjomat Pappusa

Proste p i q są różne i mające punkt wspólny O . Punkty A, C, E należące do prostej q , natomiast punkty B, F, D leżą na prostej p , wszystkie punkty są różne od punktu O . Sytuację schematycznie przedstawia rysunek 1.4.



Rys. 1.4.

Jeżeli proste p i q mają punkt wspólny oraz $AF \parallel CD$ i $BC \parallel EF$ to $AB \parallel DE$.

ROZDZIAŁ 2

Modele algebraiczne płaszczyzny afinicznej

W rozdziale tym przedstawimy pewną rodzinę modeli pappusowskiej płaszczyzny afinicznej. Punktem wyjścia w opisie każdego z tych modeli będzie wybór ciała K . Opisując model zajmiemy się pojęciami pierwotnymi, przyjętymi w rozdziale pierwszym. Dalszą część poświęcimy na wykazanie, że aksjomaty pappusowskiej geometrii afinicznej są twierdzeniami prawdziwymi w modelu.

2.1. Opis modelu K^2 – interpretacja pojęć pierwotnych

Zajmiemy się modelem pappusowskiej płaszczyzny afinicznej. Model nazwijmy K^2 .

Niech K będzie dowolnym przemiennym ciałem.

Za płaszczyznę w modelu tym przyjmujemy zbiór punktów $K^2 = \{(x; y) : x, y \in K\}$.

Oto, w jaki sposób zinterpretujemy pojęcia pierwotne w modelu K^2 :

1. Punktami będą pary elementów z ciała K $(x; y)$.
2. Proste utożsamiamy ze zbiorami punktów spełniających równanie $Ax + By + C = 0$, gdzie elementy A, B, C należą do ciała K . Dodatkowo przyjmujemy, że współczynniki A i B nie znikają jednocześnie.
3. Każdy punkt, którego współrzędne spełniają równanie prostej należy do tej prostej - relacja incydencji.

Pokażemy, że w modelu K^2 spełnione są wszystkie przytoczone w rozdziale 1 aksjomaty.

2.2. Weryfikacja drugiego aksjomatu incydencji

Weźmy dowolną prostą wyrażoną równaniem $Ax + By + C = 0$ gdzie $A, B, C \in K$.

Musimy znaleźć dwa różne punkty, które należą do tej prostej, czyli spełniają jej równanie.

Rozważymy dwa przypadki, gdy $B \neq 0$ w równaniu prostej oraz drugi dla $B = 0$.

2.2.1. Przypadek, gdy $B \neq 0$ w równaniu prostej p

Dla ułatwienia rachunków przekształcimy równanie prostej:

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Punkt na płaszczyźnie zadany jest jednoznacznie przez dwie współrzędne. Naszym zadaniem jest znaleźć dwa różne punkty, których współrzędne będą spełniać równanie prostej zapisane wyżej.

Na początek znajdziemy ogólną postać punktów leżących na zadanej prostej p . Pierwsze współrzędne punktów będą równe odpowiednio a . Drugą współrzędną uzyskamy z równania prostej: $b = -\frac{A}{B}a - \frac{C}{B}$. Zatem ogólna postać punktów leżących na prostej p jest następująca:

$$P = \left(a; -\frac{A}{B}a - \frac{C}{B} \right) \quad \text{dla dowolnego } a \in K.$$

Zauważmy, iż przyjmując różne a otrzymujemy różne pary współrzędnych a tym samym różne punkty, które leżą na prostej p .

Przypomnijmy, że naszym zadaniem jest wskazać dwa punkty należące do prostej p . Wyżej wyprowadziliśmy ogólną postać punktów spełniających równanie zadanej prostej i potrafimy, dobierając różne pierwsze współrzędne, wskazać różne punkty. Dodatkowo wiemy, że w ciele K istnieją przynajmniej dwa różne elementy, jest to element neutralny dla dodawania oraz element neutralny mnożenia. Zatem istnieją przynajmniej dwa punkty spełniające dane równanie prostej.

2.2.2. Przypadek, gdy $B = 0$ w równaniu prostej p

Zgodnie z przyjętą interpretacją prostych w modelu jeśli $B = 0$ to, $A \neq 0$. Dokonując kilku przekształceń otrzymujemy równanie prostej:

$$Ax + C = 0$$

$$Ax = -C$$

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Punkty należące do tej prostej mają równe pierwsze współrzędne. Ogólna postać punktu na prostej jest następująca: $P = \left(-\frac{C}{A}; b \right)$ gdzie $b \in K$ jest dowolne. Zauważmy, że dla różnych b otrzymamy różne punkty. Współrzędne punktów należą do ciała K , a w ciele mamy przynajmniej dwa różne elementy (mowa o nich w poprzednim podpunkcie), to mamy pewność, że istnieją przynajmniej dwa różne punkty spełniające równanie prostej p .

2.3. Niejednoznaczność równań dla prostych

W modelu K^2 prostą opisuje równanie liniowe $Ax + By + C = 0$, gdzie A, B, C są elementami ciała K . Jednak nie ma tu jednoznaczności równania prostej. Ta sama prosta może być opisana za pomocą różnych równań.

LEMAT 1

Na to by równania $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ przedstawiały tę samą prostą, potrzeba i wystarcza, żeby: $A_2 = \lambda \cdot A_1$ i $B_2 = \lambda \cdot B_1$ i $C_2 = \lambda \cdot C_1$ gdzie $\lambda \neq 0$ jest pewnym elementem z K .

DOWÓD ($\Leftarrow$)

Prosta to zbiór punktów, których współrzędne spełniają zadane równanie. Weźmy dowolny punkt z zbioru pierwszej prostej $(x_0; y_0)$. Punkt ten spełnia równanie prostej, do której należy, zatem prawdziwe jest równanie $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$. Jeżeli przemnożymy je przez element $\lambda \neq 0$ z ciała K , to jego rozwiązaniem nadal będzie para $(x_0; y_0)$. Otrzymane równanie $\lambda \cdot A_1x_0 + \lambda \cdot B_1y_0 + \lambda \cdot C_1 = 0$ jest równaniem drugiej prostej. Zatem pokazaliśmy, że elementy zbioru, jakim jest pierwsza prosta zawierają się w drugim zbiorze (drugiej prostej). Dowolny punkt należący do drugiej prostej spełnia jej równanie, zatem prawdziwe jest równanie: $\lambda \cdot A_1x_1 + \lambda \cdot B_1y_1 + \lambda \cdot C_1 = 0$. Ponieważ czynnik λ jest elementem ciała K , więc istnieje element do niego odwrotny $\lambda^{-1} \neq 0$. Korzystając z własności ciała K mnożymy równanie przez element λ^{-1} . Otrzymujemy równanie $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$, które opisuje pierwszą prostą. Jego rozwiązaniem nadal jest punkt $(x_1; y_1)$. Pokazaliśmy, że wszystkie elementy zbioru tworzącego drugą prostą zawierają się w zbiorze pierwszej prostej. Wyżej pokazaliśmy zawieranie w drugą stronę, zatem zbiory punktów zadane powyższymi równaniami pokrywają się, czyli równania opisują tę samą prostą.

DOWÓD ($\Rightarrow$)

Wiemy, że oba równania opisują tę samą prostą. Ponieważ, zgodnie z drugim aksjomatem incydencji istnieją, co najmniej dwa rozwiązania (dwa punkty) układ równań:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Zgodnie z metodą Cramera, wyznacznik główny i pomocnicze muszą być równe zero, aby układ miał więcej niż jedną parę rozwiązań. Zatem mamy:

$$W = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B_2 = A_2A_1^{-1}B_1.$$

Ponieważ współczynniki przy x i y w równaniu prostej są elementami ciała K , więc ich iloczyn też jest elementem ciała, zatem niech $\lambda = A_2A_1^{-1}$. Podstawiając tę równość do wyznacznika głównego, otrzymujemy $B_2 = \lambda \cdot B_1$, jedną z równości lematu.

Obliczamy wyznaczniki pomocnicze:

$$W_x = \begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix} = -C_1B_2 + C_2B_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = B_2B_1^{-1}C_1.$$

Wiemy, że współczynnik B_2 jest wielokrotnością B_1 , uwzględniając to w powyższym równaniu otrzymujemy kolejną równość z lematu: $C_2 = \lambda \cdot C_1$.

Drugi wyznacznik, też musi być równy zeru, zatem mamy:

$$W_y = \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix} = -C_2 A_1 + C_1 A_2 = 0 \Leftrightarrow A_2 = C_2 C_1^{-1} A_1.$$

Uwzględniając równanie dla współczynników C otrzymujemy: $A_2 = \lambda \cdot A_1$. To kończy dowód implikacji.

Pokazując prawdziwość implikacji w obie strony udowodniliśmy LEMAT 1.

2.4. Sprawdzenie pierwszego aksjomatu incydencji

Weźmy dwa dowolne, różne punkty $P_1=(a_1; b_1)$ i $P_2=(a_2; b_2)$ o współrzędnych z ciała K . Rozważymy dwa przypadki. Pierwszy, gdy pierwsze współrzędne punktów są różne ($a_1 \neq a_2$) oraz drugi przypadek, gdy pierwsze współrzędne są równe ($a_1 = a_2$) a drugie różne ($b_1 \neq b_2$).

2.4.1. Przypadek, gdy $a_1 \neq a_2$

Zgodnie z treścią aksjomatu musimy pokazać, że przez punkty P_1 i P_2 przechodzi dokładnie jedna prosta. Niech szukana prosta p wyraża się wzorem $Ax + By + C = 0$.

Szukane równanie na pewno nie jest takie, że $B=0$, bo pierwsze współrzędne punktów należących do prostej są różne.

Dla ułatwienia rachunków przedstawimy pozostałe dwa współczynniki szukanej prostej jako wielokrotności B : $A = A' B$, $C = C' B$. Że tak można, wynika to z faktu, że elementy A , B , C należą do ciała. Wystarczy więc wziąć $A' = AB^{-1}$, $C' = CB^{-1}$.

Równanie szukanej prostej p można przedstawić w następujących równoważnych formach:

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A' Bx + By + C' B &= 0 \\ (2.2.) \quad A' x + y + C' &= 0. \end{aligned}$$

Zgodnie z treścią aksjomatu prosta p ma przechodzić przez punkty P_1, P_2 , zatem ich współrzędne muszą spełniać równanie prostej p . Podstawiamy współrzędne obu punktów do równania (2.2.) i otrzymujemy układ równań liniowych o niewiadomych A' i C' .

$$\begin{cases} A' a_1 + b_1 + C' = 0 \\ A' a_2 + b_2 + C' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A' a_1 + C' = -b_1 \\ A' a_2 + C' = -b_2 \end{cases}$$

Stosując metodę Cramera obliczymy wartości A' i C' .

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} = a_1 - a_2$$

Zgodnie z założeniem $a_1 \neq a_2$, zatem $a_1 - a_2 \neq 0$, czyli $W \neq 0$. Obliczymy wyznaczniki pomocnicze.

$$W_{A'} = \begin{vmatrix} -b_1 & 1 \\ -b_2 & 1 \end{vmatrix} = -b_1 + b_2 \qquad W_{C'} = \begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ a_2 & -b_2 \end{vmatrix} = -a_1 b_2 + a_2 b_1$$

Korzystając z faktu, iż wyznacznik główny jest różny od zera, obliczamy A' i C' .

$$A' = \frac{W_{A'}}{W} = \frac{-b_1 + b_2}{a_1 - a_2} \qquad C' = \frac{W_{C'}}{W} = \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 - a_2}$$

Znaleźliśmy A' i C' , które są wyznaczone jednoznacznie przez współrzędne punktów P_1 i P_2 . Znajdując A' i C' wyznaczyliśmy A i C .

$$(2.3.) \qquad A = B \cdot \frac{(b_2 - b_1)}{(a_1 - a_2)} ; \qquad B \neq 0 ; \qquad C = B \cdot \frac{(-a_1 b_2 + a_2 b_1)}{(a_1 - a_2)} .$$

Otrzymaliśmy kilka równań prostej, jednak na mocy LENATU1 wiemy, że opisują one jedną prostą. W ten sposób pokazaliśmy istnienie dokładnie jednej prostej przechodzącej przez dwa dowolne, różne punkty.

2.4.2. Przypadek, gdy $a_1 = a_2$ oraz $b_1 \neq b_2$

W szukanym równaniu prostej p współczynnik $B = 0$, bo pierwsze współrzędne punktów P_1 i P_2 należących do tej prostej są równe. Natomiast współczynnik A szukanego równania nie może być równy zeru, zgodnie z interpretacją prostych w modelu. Uwzględniając powyższe wnioski równanie szukanej prostej p można przedstawić następująco:

$$(2.4.) \qquad Ax + C = 0 .$$

Podstawiając do równania współrzędne punktów P_1 i P_2 otrzymujemy układ tożsamyh równań liniowych. W rezultacie otrzymujemy równanie: $Aa_1 + C = 0$, skąd wynika, że $C = -Aa_1$. Uwzględniamy to w równaniu (2.4.) i dokonujemy serii przekształceń:

$$Ax - Aa_1 = 0$$

$$Ax = Aa_1$$

$$x = a_1 .$$

Otrzymujemy równania prostej przechodzącej przez punkty P_1 i P_2 dowolnie wybrane. Zatem znaleźliśmy równia prostej p różniące się jedynie o wielokrotność współczynników, na mocy LENATU 1 wiemy, że takie równania opisują te samą prostą. Czyli istnieje jedyna prosta zawierająca punkty P_1 i P_2 i jest ona zależna jedynie od doboru punktu P_1 a konkretniej od jego pierwszej współrzędnej.

2.5. Weryfikacja trzeciego aksjomatu incydencji

Naszym zadaniem jest pokazać trzy różne punkty P_1, P_2, P_3 nie leżące na jednej prostej. Oczywiście współrzędne tych punktów muszą być elementami ciała K . Niech będą to takie punkty:

$$P_1 = (0; 0), \quad P_2 = (0; 1), \quad P_3 = (1; 0).$$

Współrzędne tych punktów są elementami ciała K , ponieważ 0 jest elementem neutralnym dodawania, natomiast 1 elementem neutralnym mnożenia.

Punkty P_1 i P_2 leżą na wspólnej prostej o równaniu $x = 0$, natomiast punkt P_3 nie należy do tej prostej, ponieważ jego pierwsza współrzędna jest różna od 0. Przez punkty $P_1 \neq P_2$ przechodzi, w modelu K^2 , dokładnie jedna prosta, w tym wypadku o równaniu $x=0$, zatem znaleźliśmy trzy różne punkty nie leżące na jednej prostej.

2.6. Sprawdzenie aksjomatu równoległości

Zgodnie z założeniami aksjomatu mamy punkt $P=(x_0; y_0)$, gdzie x_0 i $y_0 \in K$, nie leżący na prostej p zadanej równaniem: $Ax + By + C = 0$. Szukamy równań prostych k przechodzących przez punkt P i nie przecinających prostej p . Niech szukane proste k wyraża się równaniami $Ex + Fy + G = 0$ gdzie $E, F, G \in K$.

Rozważymy dwa przypadki: pierwszy, gdy współczynnik B jest różny od zera oraz drugi, gdy B jest równe zero.

2.6.1. Przypadek, gdy $B \neq 0$

Proste k mają przechodzić przez punkt P , czyli współrzędne punktu muszą spełniać równania prostych. Zatem prawdziwa jest równość: $Ex_0 + Fy_0 + G = 0$. Przekształcając równanie otrzymujemy: $-(Ex_0 + Fy_0) = G$. Uwzględniając powyższy warunek w równaniach prostych k otrzymamy:

$$Ex + Fy - (Ex_0 + Fy_0) = 0.$$

Zgodnie z założeniem, proste p i k nie mogą mieć punktów wspólnych. Czyli współczynnik F w równaniach prostych k musi być różny od zera, w przeciwnym razie proste k mają punkty wspólne z prostą p , a to jest sprzeczne z założeniem. Dodatkowo układ równań:

$$\begin{cases} Ex + Fy = Ex_0 + Fy_0 \\ Ax + By = -C \end{cases}$$

nie ma rozwiązań.

Zgodnie z metodą Cramera, aby układ nie miał rozwiązań wyznacznik główny musi być równy zero oraz jeden z wyznaczników pomocniczych różny od zera. Zatem:

$$W = \begin{vmatrix} E & F \\ A & B \end{vmatrix} = EB - AF = 0 \quad \Leftrightarrow \quad EB = AF \quad (2.5.)$$

$$W_x = \begin{vmatrix} Ex_0 + Fy_0 & F \\ -C & B \end{vmatrix} = EBx_0 + FBy_0 + FC$$

Do wyznacznika pomocniczego podstawmy równanie (2.5.) i przekształcamy:

$$AFx_0 + FBy_0 + FC = F(Ax_0 + By_0 + C).$$

To, że współczynnik F jest różny od zera zostało wyjaśnione wyżej. Natomiast $Ax_0 + Bx_0 \neq C$, bo punkt $P = (x_0; y_0)$ nie spełnia równania prostej p . Ponieważ $F \neq 0$ oraz $Ax_0 + By_0 \neq -C$, zatem tak jak chcieliśmy wyznacznik pomocniczy jest różny od zera $W_x \neq 0$.

Przekształcając równanie 2.5. otrzymujemy $E = \frac{A}{B}F$. Uwzględniamy to w równaniu na współczynnik G i otrzymujemy: $G = -F\left(\frac{A}{B}x_0 + y_0\right)$. W ten sposób uzyskaliśmy równania liniowe o współczynnikach różniących się o wielokrotność, czyli współczynnik F różny od zera. Na, mocy LEMATU 1 wiemy, że takie równania opisują tę samą prostą. Czyli mamy równanie prostej k o współczynnikach:

$$E = \frac{A}{B}F ; \quad F \neq 0 ; \quad G = -F\left(\frac{A}{B}x_0 + y_0\right).$$

2.6.2. Przypadek, gdy $B = 0$

Uwzględniając powyższy warunek otrzymujemy równanie prostej p : $Ax + C = 0$, gdzie zgodnie z interpretacją w modelu K^2 , $A \neq 0$. Współczynnik F w równaniach prostych k musi być równy zero i $E \neq 0$, takie warunki zapewnią brak punktów wspólnych prostych k i p . Zatem otrzymamy równanie prostej k : $Ex + G = 0$. Uwzględniając założenie, iż punkt $P = (x_0; y_0)$ ma należeć do prostych k , otrzymujemy: $G = -Ex_0$.

Znaleźliśmy równania prostych k wyznaczając współczynniki odpowiednio:

$$E \neq 0 ; \quad F = 0 ; \quad G = -Ex_0.$$

Wszystkie równania różnią się jedynie o wielokrotność współczynników, więc na mocy LEMATU 1 opisują tę samą prostą. Czyli znaleźliśmy jedyną prostą k .

2.6.3. WNIOSEK

Z powyższego dowodu aksjomatu równoległości można wyciągnąć dodatkowy wniosek, który będzie przydatny w dalszej części pracy.

Każdą równoległą do prostej zadanej równaniem $Ax + By + C = 0$ i różną od niej można wyrazić równaniem $Ax + By + C' = 0$ dla $C' \neq C$.

We wcześniejszych podpunktach wykazaliśmy, że dla prostej $Ax + By + C = 0$ i punktu $P(x_0; y_0)$ nie leżącym na tej prostej możemy znaleźć równanie prostej równoległej, zawierającej punkt P . Równanie takiej prostej zależy jedynie od współrzędnych punktu P .

$$AB'x + BB'y - B'(Ax_0 + By_0) = 0$$

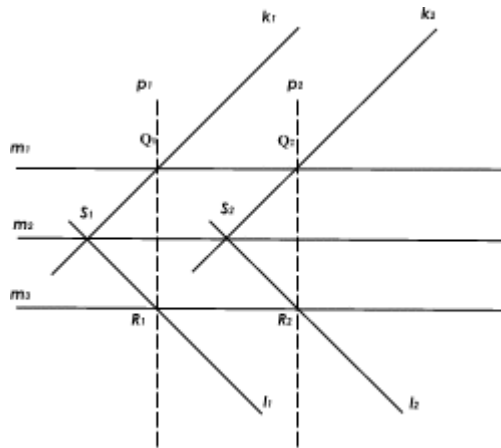
Jeśli weźmiemy $B' = 1$ otrzymamy równanie prostej: $Ax + By - (Ax_0 + By_0) = 0$.

Otrzymaliśmy równanie prostej równoległej do prostej $Ax + By + C = 0$ różniące się tylko ostatnim współczynnikiem, zatem możemy zapisać je tak:

$$Ax + By + C' = 0 \quad \text{gdzie} \quad C' = -(Ax_0 + By_0)$$

Współczynnik C' zależy jedynie od współrzędnych punktu P , który możemy dobrać dowolnie byle nie leżał na prostej $Ax + By + C = 0$. Dobierając kolejno punkt P możemy wyznaczyć równania wszystkich prostych równoległych do danej prostej.

2.7. Sprawdzenie pierwszego aksjomatu Desarguesa



Rys. 1.1.

Dla ułatwienia przebiegu rozumowania jeszcze raz przedstawimy rysunek schematycznie ilustrujący treść aksjomatu.

Na mocy WNIOSKU 2.6.3. możemy założyć, że proste m_1, m_2, m_3 zadane są równaniami:

$$m_1: \quad Ax + By + C_1 = 0$$

$$m_2: \quad Ax + By + C_2 = 0$$

$$m_3: \quad Ax + By + C_3 = 0.$$

Niech proste l_1 i l_2 wyrażają następujące równania (korzystając z WNIOSKU 2.6.3.):

$$l_1: \quad A_1x + B_1y + D = 0$$

$$l_2: \quad A_1x + B_1y + E = 0.$$

Wiemy, że proste l_1 i m_3 mają punkt wspólny, R_1 zatem istnieje rozwiązanie układu równań tych prostych. Para spełniająca układ równań wyznacza punkt R_1 . Stosując metodę Cramera rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By = -C_3 \\ A_1x + B_1y = -D. \end{cases}$$

Wyznacznik główny dla niewiadomych x i y :

$$W = \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} = AB_1 - A_1B.$$

Dla $AB_1 \neq A_1B$ obliczamy wyznaczniki pomocnicze.

$$W_x = \begin{vmatrix} -C_3 & B \\ -D & B_1 \end{vmatrix} = -C_3B_1 + DB, \quad W_y = \begin{vmatrix} A & -C_3 \\ A_1 & -D \end{vmatrix} = -AD + A_1C_3$$

Znaleźliśmy współrzędne punktu R_1 dla $AB_1 \neq A_1B$:

$$R_1 = \left(\frac{DB - C_3 B_1}{AB_1 - A_1 B}, \frac{A_1 C_3 - AD}{AB_1 - A_1 B} \right).$$

Postępując analogicznie otrzymamy współrzędne punktu R_2 , wspólnego dla prostej m_3 i l_2 . Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By = -C_3 \\ A_1 x + B_1 y = -E. \end{cases}$$

Otrzymujemy współrzędne punktu wspólnego dla prostych m_3 i l_2 .

$$R_2 = \left(\frac{EB - C_3 B_1}{AB_1 - A_1 B}, \frac{A_1 C_3 - AE}{AB_1 - A_1 B} \right) \quad \text{dla} \quad AB_1 \neq A_1 B.$$

W ten sam sposób wyznaczamy współrzędne punktu S_l , przecięcia prostych m_2 i l_1 . Rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By = -C_2 \\ A_1 x + B_1 y = -D. \end{cases}$$

otrzymujemy współrzędne punktu S_l .

$$S_l = \left(\frac{DB - C_2 B_1}{AB_1 - A_1 B}, \frac{A_1 C_2 - AD}{AB_1 - A_1 B} \right) \quad \text{dla} \quad AB_1 \neq A_1 B.$$

Szukamy punktu S_2 , wspólnego dla prostej m_2 i l_2 współrzędne punktu uzyskamy znajdując parę rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} Ax + By = -C_2 \\ A_1 x + B_1 y = -E. \end{cases}$$

Zatem współrzędne punktu wspólnego dla prostych m_2 i l_2 to:

$$S_2 = \left(\frac{EB - C_2 B_1}{AB_1 - A_1 B}, \frac{A_1 C_2 - AE}{AB_1 - A_1 B} \right) \quad \text{dla} \quad AB_1 \neq A_1 B.$$

Niech proste $k_1 || k_2$ na mocy WNIOSKU 2.6.3. wyrażają odpowiednio równania:

$$\begin{aligned} k_1: & \quad A_2 x + B_2 y + F = 0 \\ k_2: & \quad A_2 x + B_2 y + G = 0. \end{aligned}$$

Dodatkowo wiemy, że punkt S_1 leży na prostej k_1 natomiast punkt S_2 na prostej k_2 . Czyli współrzędne punktów muszą spełniać równania odpowiednich prostych. Podstawiając punkt S_1 do równania prostej k_1 otrzymamy nowe równanie prostej o postaci:

$$k_1: \quad A_2x + B_2y + \frac{A_2(DB - C_2B_1) + B_2(A_1C_2 - AD)}{A_1B - AB_1} = 0.$$

Postępując analogicznie z punktem S_2 i prostą k_2 otrzymamy następujące równanie tej prostej:

$$k_2: \quad A_2x + B_2y + \frac{A_2(EB - C_2B_1) + B_2(A_1C_2 - AE)}{A_1B - AB_1} = 0.$$

Szukamy punktu wspólnego prostych m_1 i k_1 , nazwijmy go Q_1 . Jego współrzędne są rozwiązaniem układu równań obu prostych. Znajdziemy je rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \frac{A_2(DB - C_2B_1) + B_2(A_1C_2 - AD)}{A_1B - AB_1} = 0 \end{cases}.$$

Zatem punkt jest równy:

$$Q_1 = \left(\frac{A_2B(DB - C_2B_1) + BB_2(A_1C_2 - AD) + B_2C_1(AB_1 - A_1B)}{(AB_1 - A_1B)(A_2B - AB_2)}, \right. \\ \left. \frac{A_2A(DB - C_2B_1) + AB_2(A_1C_2 - AD) + A_2C_1(AB_1 - A_1B)}{(A_1B - AB_1)(A_2B - AB_2)} \right).$$

Natomiast współrzędne punktu Q_2 to para będąca rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} Ax + By + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \frac{A_2(EB - C_2B_1) + B_2(A_1C_2 - AE)}{A_1B - AB_1} = 0 \end{cases}.$$

Rozwiązując układ otrzymamy następujące współrzędne punktu:

$$Q_2 = \left(\frac{A_2B(EB - C_2B_1) + BB_2(A_1C_2 - AE) + B_2C_1(AB_1 - A_1B)}{(AB_1 - A_1B)(A_2B - AB_2)}, \right. \\ \left. \frac{A_2A(EB - C_2B_1) + AB_2(A_1C_2 - AE) + A_2C_1(AB_1 - A_1B)}{(A_1B - AB_1)(A_2B - AB_2)} \right).$$

Dla punktów Q_1 i R_1 szukamy równania prostej przechodzącej przez nie, prostej p_1 . Natomiast prosta p_2 ma zawierać punkty: Q_2 i R_2 . Korzystając ze wzoru (2.3.) wyprowadzonego we wcześniejszym momencie tej pracy wyznaczamy współczynniki równań obu prostych przechodzących przez dwa zadane punkty.

Naszym celem jest pokazać, że $p_1 \parallel p_2$. Na mocy WNIOSKU 2.6.3. wystarczy pokazać, że współczynniki przy „ x ” i „ y ” w równaniach prostych są sobie równe.

Wyznaczamy współczynnik przy „ x ” w równaniu prostej p_1 .

$$\begin{aligned} & \frac{A_2 A (DB - C_2 B_1) + AB_2 (A_1 C_2 - AD) + A_2 C_3 (AB_1 - A_1 B)}{(A_1 B - AB_1)(A_2 B - AB_2)} + \frac{(A_1 C_3 - AD)}{(A_1 B - AB_1)} = \\ & = \frac{A_1 C_3 (A_2 B - AB_2) + AC_2 (A_1 B_2 - A_2 B_1) + A_2 C_3 (AB_1 - A_1 B)}{(A_1 B - AB_1)(A_2 B - AB_2)} \end{aligned}$$

Współczynnik przy „ x ” w równaniu prostej p_2 :

$$\begin{aligned} & \frac{A_2 A (EB - C_2 B_1) + AB_2 (A_1 C_2 - AE) + A_2 C_3 (AB_1 - A_1 B)}{(A_1 B - AB_1)(A_2 B - AB_2)} + \frac{(A_1 C_3 - AE)}{(A_1 B - AB_1)} = \\ & = \frac{A_1 C_3 (A_2 B - AB_2) + AC_2 (A_1 B_2 - A_2 B_1) + A_2 C_3 (AB_1 - A_1 B)}{(A_1 B - AB_1)(A_2 B - AB_2)}. \end{aligned}$$

Zatem w obu równaniach prostych p_2 i p_1 współczynniki przy „ x ” są równe. Sprawdzimy teraz współczynniki przy „ y ”. Korzystamy w tym celu ze wzoru (2.3.).

W równaniu prostej p_1 mamy:

$$\begin{aligned} & \frac{(DB - C_3 B_1)}{(AB_1 - A_1 B)} - \frac{A_2 B (DB - C_2 B_1) + BB_2 (A_1 C_2 - AD) + B_2 C_1 (AB_1 - A_1 B)}{(AB_1 - A_1 B)(A_2 B - AB_2)} = \\ & = \frac{B_1 C_3 (B_2 A - A_2 B) + BC_2 (A_2 B_1 - A_1 B_2) + B_2 C_1 (AB_1 - A_1 B)}{(AB_1 - A_1 B)(A_2 B - AB_2)}. \end{aligned}$$

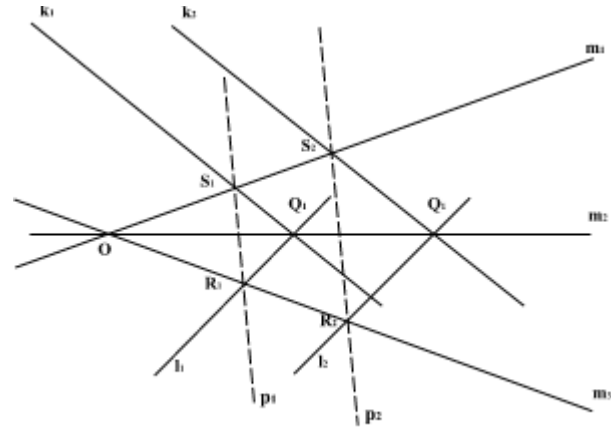
Teraz wyznaczmy współczynniki przy „ y ” w równaniu prostej p_2 korzystając ze wzoru (1.3) dla punktów R_2 i Q_2 . Zatem mamy:

$$\begin{aligned} & \frac{(EB - C_3 B_1)}{(AB_1 - A_1 B)} - \frac{A_2 B (EB - C_2 B_1) + BB_2 (A_1 C_2 - AE) + B_2 C_1 (AB_1 - A_1 B)}{(AB_1 - A_1 B)(A_2 B - AB_2)} = \\ & = \frac{B_1 C_3 (B_2 A - A_2 B) + BC_2 (A_2 B_1 - A_1 B_2) + B_2 C_1 (AB_1 - A_1 B)}{(AB_1 - A_1 B)(A_2 B - AB_2)}. \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że współczynniki przy „ x ” i „ y ” w obu równaniach są równe, zgodnie z WNIOSKIEM 2.6.3. proste p_1 i p_2 są równoległe. Zatem pokazaliśmy, że w modelu K^2 zachodzi aksjomat Desarguesa.

2.8. Dowód drugiego aksjomatu Desarguesa

Jeszcze raz przedstawimy schematyczny rysunek treści aksjomatu.



Rys. 1.2.

2.8.1. Przypadek, gdy punktu $O = (0; 0)$

Proste, m_1 , m_2 , m_3 mają punkt wspólny O , czyli współrzędne punktu spełniają równanie każdej prostej. Zatem otrzymujemy równania poszczególnych prostych:

$$\begin{aligned} m_1 : & \quad Ax + By = 0 \\ m_2 : & \quad A_1x + B_1y = 0 \\ m_3 : & \quad A_2x + B_2y = 0. \end{aligned}$$

Korzystając z własności prostych równoległych zawartych we WNIOSKU 2.6.3. otrzymujemy równania prostych l_1 i l_2 :

$$\begin{aligned} l_1 : & \quad Ex + Fy + G_1 = 0 \\ l_2 : & \quad Ex + Fy + G_2 = 0, \end{aligned}$$

oraz prostych k_1 i k_2 :

$$\begin{aligned} k_1 : & \quad Kx + Ly + M_1 = 0 \\ k_2 : & \quad Kx + Ly + M_2 = 0. \end{aligned}$$

Szukamy współrzędnych punktów R_1 i R_2 , które są odpowiednio miejscami przecięć prostych

m_1 i l_1 oraz m_1 i l_2 . Współrzędne punktu R_1 muszą spełniać jednocześnie równania prostych m_1 i l_1 , czyli są rozwiązaniem następującego układu równań liniowych:

$$\begin{cases} Ax + By = 0 \\ Ex + Fy = -G_1. \end{cases}$$

Zgodnie z metodą Cramera wyznacznik główny musi być różny od zera (proste nie są równoległe, więc mają punkt wspólny), czyli $AF \neq BE$. Wyznaczniki pomocnicze to odpowiednio:

$$W_x = \begin{vmatrix} 0 & B \\ -G_1 & F \end{vmatrix} = BG_1 \quad W_y = \begin{vmatrix} A & 0 \\ E & -G_1 \end{vmatrix} = -AG_1$$

Zatem otrzymaliśmy współrzędne punktu R_1 :

$$R_1 = \left(\frac{BG_1}{AF - BE}; \frac{-AG_1}{AF - BE} \right).$$

Natomiast współrzędne punktu wspólnego dla prostych m_1 i l_2 są równe:

$$R_2 = \left(\frac{BG_2}{AF - BE}; \frac{-AG_2}{AF - BE} \right).$$

Punkt Q_1 jest miejscem przecięcia prostej m_2 i l_1 . Szukamy jego współrzędnych analogicznie jak wyżej rozwiązując układ:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = 0 \\ Ex + Fy = -G_1. \end{cases}$$

Otrzymujemy punkt:

$$Q_1 = \left(\frac{-B_1G_1}{A_1F - B_1E}; \frac{A_1G_1}{A_1F - B_1E} \right).$$

Punkt Q_2 jest wspólny dla prostych m_2 i l_2 . Postępując jak wyżej znajdujemy jego współrzędne:

$$Q_2 = \left(\frac{-B_1G_2}{A_1F - B_1E}; \frac{A_1G_2}{A_1F - B_1E} \right).$$

Do prostej k_2 należy punkt R_1 , zatem jego współrzędne spełniają równanie prostej stąd otrzymujemy:

$$k_1: \quad Kx + Ly + \frac{G_1(AL - KB)}{AF - BE} = 0.$$

Natomiast punkt R_2 należy do prostej k_2 , zatem jego współrzędne spełniają jej równanie, co daje:

$$k_2: \quad Kx + Ly + \frac{G_2(AL - KB)}{AF - BE} = 0.$$

Proste m_3 i k_1 mają wspólny punkt S_1 . Współrzędne punktu muszą spełniać oba równania prostych. Rozwiązując tak zbudowany układ równań otrzymujemy:

$$S_1 = \left(\frac{-B_2G_1(KB - AL)}{(A_2L - KB_2)(AF - BE)}; \frac{A_2G_1(KB - AL)}{(A_2F - EB_2)(AF - BE)} \right).$$

Punkt S_2 jest punktem należącym do prostej m_3 , k_2 . Postępując jak wyżej wyznaczamy współrzędne tego punktu. Otrzymujemy:

$$S_2 = \left(\frac{-B_2G_2(KB - AL)}{(A_2L - KB_2)(AF - BE)}; \frac{A_2G_2(KB - AL)}{(A_2F - EB_2)(AF - BE)} \right).$$

Musimy pokazać, że proste p_1 i p_2 są równoległe. Wiemy, że prosta p_1 zawiera punkt S_1 i Q_1 , dwa dane punkty w sposób jednoznaczny wyznaczają równanie prostej. Podobnie jest z prostą p_2 , na której leżą dane punkty S_2 i Q_2 . Korzystając z WNIOSKU 2.6.3. wystarczy gdy pokażemy równość współczynników przy „ x ” i „ y ” w równaniach obu prostych aby zapewnić o równoległości prostej p_1 i p_2 .

Wyznaczamy współczynnik przy „ x ” dla prostej p_1 korzystając ze wzoru (2.3).

$$\frac{\frac{A_2 G_1 (KB - AL)}{(A_2 L - KB_2)(AF - BE)} - \frac{A_1 G_1}{A_1 F - B_1 E}}{\frac{-B_1 G_1}{A_1 F - B_1 E} + \frac{-B_2 G_1 (KB - AL)}{(A_2 L - KB_2)(AF - BE)}} =$$

$$\frac{BKE(A_2 B_1 - A_1 B_2) + LA_2 A_1 (A_1 B - AB_1) + A_1 KB_2 (AB_2 - A_2 B)}{KFB_2 (B_1 A - A_1 B) + AB_2 L (A_1 F - EB_1) + B_1 A_2 L (EB - AF)}$$

Współczynnik przy „ x ” dla prostej p_2 :

$$\frac{\frac{A_2 G_2 (KB - AL)}{(A_2 L - KB_2)(AF - BE)} - \frac{A_1 G_2}{A_1 F - B_1 E}}{\frac{-B_1 G_2}{A_1 F - B_1 E} + \frac{-B_2 G_2 (KB - AL)}{(A_2 L - KB_2)(AF - BE)}} =$$

$$\frac{BKE(A_2 B_1 - A_1 B_2) + LA_2 A_1 (A_1 B - AB_1) + A_1 KB_2 (AB_2 - A_2 B)}{KFB_2 (B_1 A - A_1 B) + AB_2 L (A_1 F - EB_1) + B_1 A_2 L (EB - AF)} .$$

Zatem pokazaliśmy, iż w obu równaniach współczynniki przy „ x ” są równe. Współczynniki, przy „ y ” są równe 1. Na mocy WNIOSKU 2.6.3. pokazaliśmy iż $p_1 \parallel p_2$, a tym samym dla tego szczególnego przypadku zachodzi drugi aksjomat Desarguesa.

2.8.2. Przypadek dla dowolnego punktu O

Powyżej rozpatrzyliśmy szczegółowo przypadek, gdy punkt O (wspólny dla trzech prostych m_1, m_2, m_3) miał współrzędne równe $(0; 0)$. W pozostałych przypadkach, gdy $O = (x_0; y_0)$ zawsze możemy zmieniając współrzędne doprowadzić do przypadku szczególnego gdzie $O = (0; 0)$.

W tym celu wprowadzimy w K^2 nowe współrzędne x', y' za pomocą wzorów:

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Pokażemy, że zbiór punktów zadanych równaniem $Ax + By + C = 0$ w pierwotnych współrzędnych wyraża się analogicznym równaniem, ze zmienionymi współczynnikami A, B, C względem nowych współrzędnych. Do równania prostej wyrażonego powyżej

wstawiamy wzory na nowe współrzędne: $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$. Otrzymujemy równanie:

$$A(x' + x_0) + B(y' + y_0) + C = 0 .$$

Po wykonaniu serii przekształceń mamy:

$$\begin{aligned} Ax' + Ax_0 + By' + By_0 + C &= 0, \\ Ax' + By' + (Ax_0 + By_0 + C) &= 0. \end{aligned}$$

Jak widać zmianie uległ tylko jeden współczynnik w równaniu prostej, nazwijmy go C' :

$$C' = Ax_0 + By_0 + C.$$

Sprawdźmy czy C' jest elementem ciała K , jeśli tak to uzyskane równanie jest zgodne z interpretacją prostych w naszym modelu. Współrzędne punktu O są elementami z ciała K , współczynniki A, B, C także należą do ciała K , zatem C' jest elementem z tego samego ciała.

Zatem po zmianie współrzędnych dostaniemy równanie prostej zmienione o współczynnik „wolny”.

Teraz przypadek dla dowolnego punktu O sprowadza się do przypadku z punktu 2.8.1. Pokazaliśmy, iż $p_1 \parallel p_2$, a tym samym drugi aksjomat Desarguesa zachodzi w modelu K^2 .

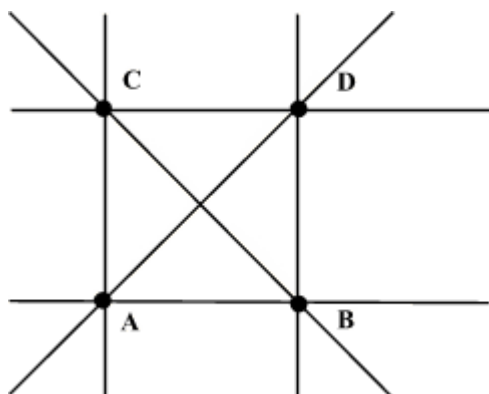
2.9. Sprawdzenie zachodzenia aksjomatów Pappusa

Dowody spełnienia obu aksjomatów w modelu K^2 przeprowadza się podobnie jak dowody dla aksjomatów Desarguesa. Nie wykraczają one poza prezentowany w pracy poziom trudności, jednak ze względu na ich obszerność pomijamy je.

2.10. Przykładowe modele płaszczyzny afinicznej

Dla ułatwienia czytelnikowi dalszej lektury przedstawimy konkretne przykłady modeli K^2 , co właściwie sprowadza się do zaprezentowania różnych ciał K . Zajmiemy się dwoma przypadkami przedstawionymi za pomocą rysunków. W pierwszym modelu ciałem będą reszty z dzielenia przez dwa, drugi przykład to ciało reszt dzielenia przez trzy.

2.10.1. Model dla $K^2 = (\mathbb{Z}_2)^2$



Rys. 2.1.

W modelu tym są cztery punkty o współrzędnych:

$$\begin{aligned} A &= (0; 0), \quad B = (1; 0), \\ C &= (0; 1) \quad \text{i} \quad D = (1; 1). \end{aligned}$$

Obok za pomocą schematycznego rysunku 2.1.

przedstawiliśmy jak wygląda model $(\mathbb{Z}_2)^2$.

W modelu tym reszty z dzielenia przez 2 to ciało K , które ma dwa elementy 0 i 1 oraz działanie dodawania i mnożenia. Należy tu pamiętać, iż wszystkie operacje wykonujemy w ciele reszt z dzielenia przez dwa, zatem dla przypomnienia przedstawimy tabelę dodawania w tym ciele.

	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabela dodawania w ciele $\mathbb{Z}_2$

Możemy wyróżnić sześć prostych reprezentowanych równaniami:

$$\begin{aligned}x &= 0; \\y &= 0; \\x + 1 &= 0; \\y + 1 &= 0; \\x + y &= 0; \\x + y + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Punkt, którego współrzędne spełniają równanie prostej należy do tej prostej. Zatem punkty A i B należą do prostej o równaniu $y = 0$, punkty A i C do prostej $x = 0$, A i D do prostej o równaniu $0 = x + y$, do prostej $0 = x + 1$ należą punkty B i D , do $0 = y + 1$ punkty C i D , punkty C i B leżą na prostej $0 = x + y + 1$.

2.10.2. Model dla $K^2 = (\mathbb{F}_3)^2$

W modelu tym ciała tworzą elementy będące resztami z dzielenia przez trzy. Ciało to ma trzy elementy $0, 1, 2$. Poniższy rysunek obrazuje schematycznie nasz model.

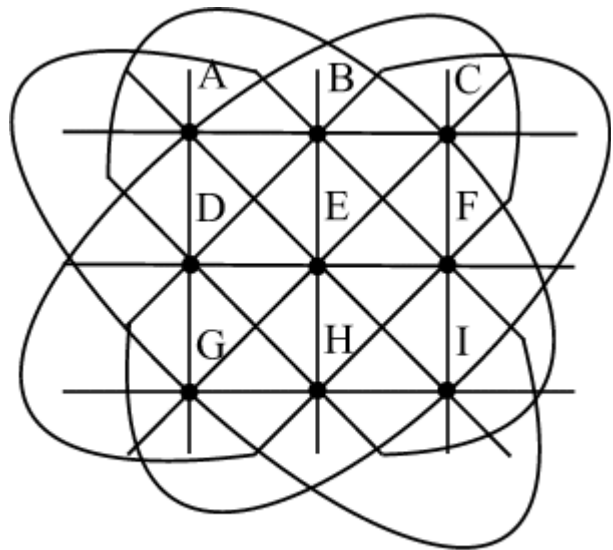
Pojęcia pierwotne dla tego modelu to:
punkt – mamy dziewięć punktów:

$$A=(0;2), B=(1;2), C=(2;2),$$

$$D=(0;1), E=(1;1), F=(2;1),$$

$$G=(0;0), H=(1;0), I=(2;0);$$

prosta – wyróżniamy dwanaście prostych każda jest wyrażona wzorem $ax + by + c = 0$, gdzie współczynniki a, b, c są elementami ciała $(\mathbb{F}_3)^2$, czyli należą do zbioru $\{0,1,2\}$.



Rys. 2.2.

relacja incydencji – punkt należy do danej prostej jeśli jego współrzędne spełniają równanie, którym wyrażona jest prosta.

ROZDZIAŁ 3

Własności płaszczyzny afinicznej wyprowadzone z aksjomatów

W rozdziale tym przedstawimy kilka własności wynikających bezpośrednio z aksjomatów incydencji oraz aksjomatu równoległości. Dotyczą one równoliczności punktów na dwóch prostych oraz równoliczności prostych w pęku i prostych równoległych o jednym kierunku. Pokażemy, że relacja równoległości jest przechodnia. Na koniec budujemy „układ współrzędnych” z dwóch różnych prostych o jednym punkcie wspólnym.

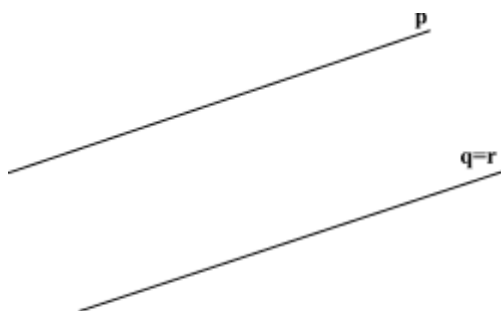
3.1. Równoległość relacją przechodnią

Pokażemy, że równoległość prostych jest własnością przechodnią. Nasze zadanie sprowadza się do pokazania, że jeśli $p \parallel q$ i $q \parallel r$ to $p \parallel r$. Wniosek ten jest bardzo istotny w budowaniu teorii, może znacznie uprościć postępowanie przy dowodzeniu twierdzeń, czy uzasadnianiu wniosków. Warto w miejscu tym przypomnieć, iż równoległość prostych rozumiemy na dwa sposoby. Proste równoległe nie mają ze sobą żadnych punktów wspólnych lub pokrywają się. Rozpatrzmy dwa przypadki położenia prostych p, q, r .

3.1.1. Przypadek, gdzie $p \parallel q$ i $q \parallel r$ oraz $r = q, p \neq q$

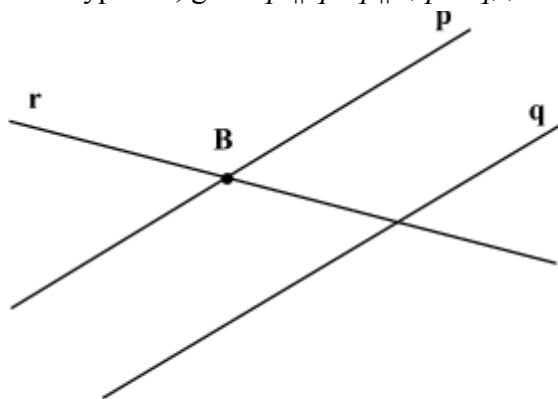
Musimy pokazać, że zachodzi $p \parallel r$.

Prosta p jest równoległa do prostej q , wiemy, że są to różne proste. Dodatkowo prosta q jest równoległa do prostej r . Jest jeszcze jedna informacja, mianowicie proste r i q są sobie równe. Zatem tak naprawdę prosta q i r to ta sama prosta.



Rys. 3.1.

Z faktu, że $p \parallel q$ wynika równoległość prostych p i r , bo prosta r jest równa prostej q . Sytuację obrazuje schematycznie rysunek 3.1.

3.1.2. Przypadek, gdzie $p \parallel q$ i $q \parallel r$, $p \neq q$, $r \neq q$ 

Rys. 3.2.

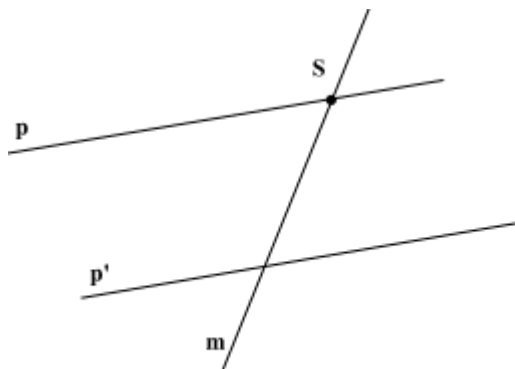
Proste p i q są równoległe i różne, czyli nie mają ze sobą punktów wspólnych, ta sama sytuacja dotyczy prostych q i r . Mamy pokazać, że proste r i p też nie mają ze sobą punktów wspólnych lub, że są równe.

Udowodnimy, że tak jest metodą nie wprost, czyli założmy, że proste p i r nie są równoległe, zatem mają punkt wspólny B (punkt przecięcia obu prostych). Sytuację obrazuje schematycznie rysunek 3.2.

Punkt B należy do prostej p oraz do prostej r . Nie należy on do prostej q , zgodnie z założeniem, iż proste p i q nie mają żadnych punktów wspólnych. Na mocy aksjomatu równoległości istnieje jedna prosta równoległa do prostej q przechodząca przez punkt B , jest nią prosta p . Tu dochodzimy do sprzeczności, ponieważ założyliśmy, iż prosta q jest różna od r . Zatem prawdą jest, że wszystkie trzy proste są do siebie równoległe ($p \parallel q \parallel r$).

Rozpatrywanie przypadków z punktów 3.1.1 i 3.1.2. kończy dowód o przechodniości relacji równoległości

3.1.3. WNIOSEK



Rys. 3.3.

Z powyższego dowodu można wyciągnąć dodatkowy wniosek, którego treść obrazuje schematycznie rysunek 3.3.

Jeśli prosta p jest różna od prostej m i przecina ją oraz prosta $p' \parallel p$ i różna od p , to p' też jest różna od prostej m i przecina ją w dokładnie jednym punkcie.

DOWÓD:

Zgodnie z założeniem WNIOSKU 3.1.3 że, prosta p i m mają wspólny punkt S (nie są równoległe i są różne) oraz $p \parallel p'$.

Mamy pokazać, że $m \neq p'$ i prosta m przecina prostą p' (proste m i p' nie są równoległe).

Dowód przeprowadzimy metodą nie wprost. Założmy, że m jest równoległa do prostej p' .

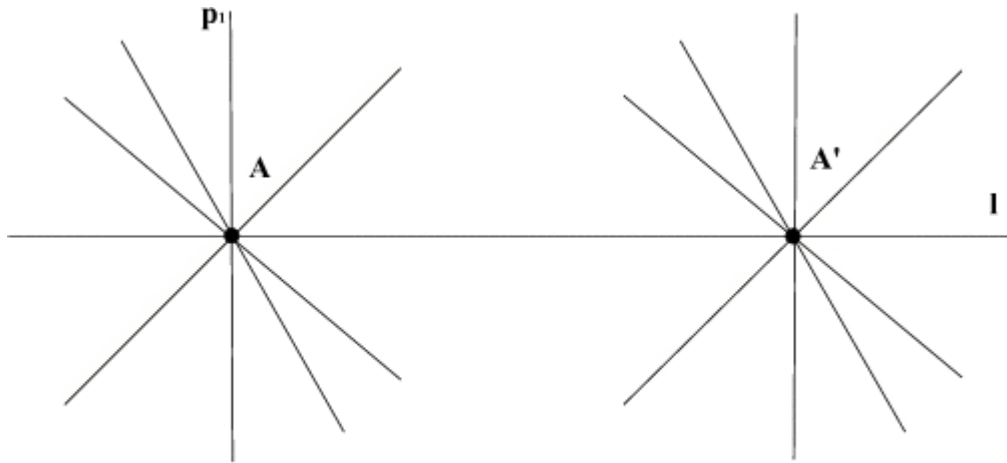
Ponieważ prosta p i p' są równoległe i różne, więc nie mają punktów wspólnych.

W szczególności punkt S nie należy do prostej p' . Zatem na mocy aksjomatu równoległości istnieje jedna prosta przechodząca przez punkt S równoległa do p' i jest to prosta p .

Dostaliśmy sprzeczność z założeniem, że istnieje druga taka prosta, mianowicie m , zatem prosta m nie może być równoległa do p' . Ponieważ nie jest równoległa do p' więc ją przecina.

3.2. Równoliczność pęków prostych

Mamy pęk prostych przechodzących przez punkt A oraz pęk prostych przechodzących przez punkt A' , gdzie $A \neq A'$, oba punkty leżą na jednej prostej l , tak jak na schematycznym rys. 3.4.



Rys. 3.4.

Bierzemy kolejno proste z pęku A , różne od prostej l wyznaczonej przez punkty A i A' . Zaczynamy od prostej p_1 , z aksjomatu o jedności prostej przechodzącej przez dwa różne punkty wiemy, że A' nie należy do prostej p_1 (tylko jedna prosta, l zawiera oba punkty A i A') zatem na mocy aksjomatu równoległości istnieje prosta p_1' przechodząca przez punkt A' taka, że $p_1' \parallel p_1$. W ten sposób możemy dla każdej prostej z pęku A znaleźć prostą równoległą należącą do pęku A' . Szczególnym przypadkiem jest prosta l . Szukana dla niej prosta równoległa przechodząca przez punkt A' to prosta l , ona sama.

Takie odwzorowanie zbioru prostych z jednego pęku na zbiór prostych drugiego pęku jest różnowartościowe. Każdym dwóm różnym prostym p_1, p_2 należącym do pęku A możemy wskazać jedyne proste p_1', p_2' równoległe do danych przechodzące przez punkt A' . Na mocy aksjomatu równoległości wiemy, że proste p_1', p_2' są różnymi prostymi. Odwzorowanie jest „na”, ponieważ każdej prostej z pęku A' możemy przyporządkować dokładnie jedną prostą z pęku A . W tym celu dla prostej p wyznaczamy prostą równoległą przechodzącą przez punkt A . Obrazem zbioru prostych A' przez to przekształcenie jest pęk prostych A .

Mamy, zatem wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie zbioru punktów z jednego pęku na zbiór prostych drugiego pęku, czyli zbiory te są równoliczne (niezależnie od tego, czy są skończone czy nieskończone).

3.3. Definicja rzutu równoległego

Zajmiemy się zdefiniowaniem rzutu równoległego. Rzut ten będzie nam bardzo pomocny w dalszej części pracy.

Dana jest prosta m , na którą będziemy rzutować, oraz prosta p (nie równoległa do prostej m) – kierunek rzutowania.

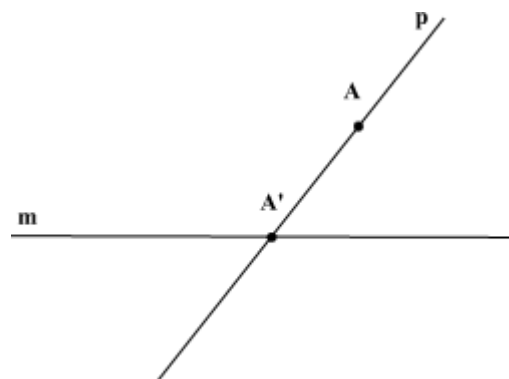
Zajmiemy się trzema przypadkami położenia punktu A , który chcemy rzutować na prostą m .

W pierwszym punk nie należy do prostej m , ale leży na prostej p . Drugi przypadek, to położenie punktu poza prostą m i p . Ostatni to taki, gdzie punkt A należy do prostej m .

3.3.1. Przypadek, gdy punkt $A \in p$ i $A \notin m$

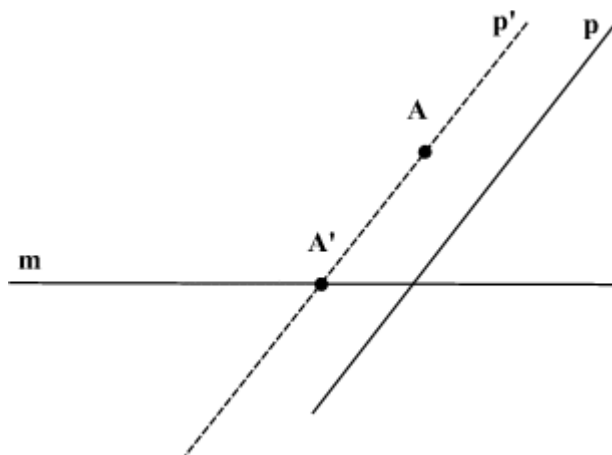
Punkt A leży na prostej p , ale nie należy do prostej m , sytuację obrazuje schematycznie rysunek 3.5.

Rzutem punktu A na prostą m w kierunku p jest punkt A' , punkt przecięcia prostej p i m .



Rys. 3.5.

3.3.2. Przypadek, gdy punkt $A \notin p$ i $A \notin m$



Rys. 3.6.

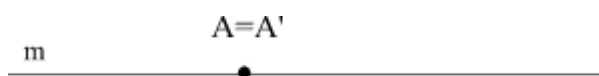
schematycznie
rysunek 3.6.

Jeśli punkt A nie leży na prostej p to na mocy aksjomatu równoległości istnieje dokładnie jedna prosta równoległa do p zawierająca punkt A , nazwijmy ją p' . Z wniosku 3.1.3 wiemy, że prosta p' przecina prostą m , przecina go w punkcie A' .

Całą sytuację obrazuje

3.3.3. Przypadek, gdy punkt $A \in m$

W przypadku, gdy punkt A leży na prostej m – tej na którą mamy rzutować – to on sam dla siebie jest rzutem na prostą m .



Rys. 3.7.

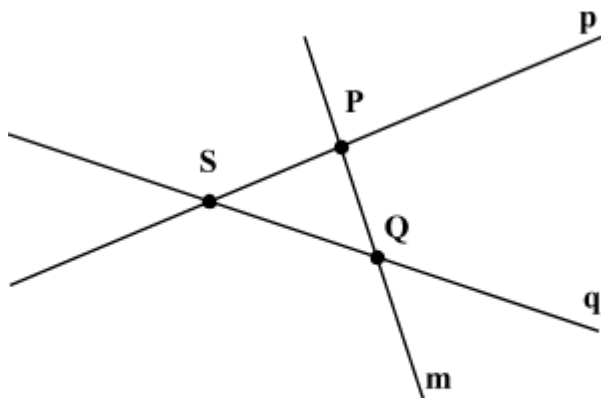
3.4. Równoliczność zbioru punktów należących do prostych

W punkcie tym pokażemy, że zbiory punktów należących do prostej są równoliczne, czyli każda prosta ma tyle samo punktów. Własność ta jest prawdziwa niezależnie od tego czy zbiory te są skończone czy też nie.

Rozpatrzmy dwa przypadki, pierwszy, gdy dwie proste przecinają się w jednym punkcie i drugi, gdy nie mają punktów wspólnych.

3.4.1. Proste mają punkt wspólny

Mamy dane dwie różne proste p i q , które przecinają się w punkcie S . Prowadzimy prostą m tak by przecinała obie proste w dwóch różnych punktach, punkty spełniają dodatkowy warunek, żaden z nich nie jest równy punktowi S (rys. 3.8.).



Rys. 3.8.

Prosta m nie jest równoległa do prostej p ani do prostej q , ponieważ ma z nimi po jednym punkcie wspólnym. Nie jest też równa żadnej z tych dwóch prostych gdyż nie zawiera punkty S należącego do prostej p i q .

Każdy punkt prostej p rzutujemy na prostą q w kierunku prostej m . Punkt S jest szczególny, ponieważ należy do prostej q , na którą rzutujemy, czyli jest on sam dla siebie obrazem.

3.4.2. Proste nie mają punktów wspólnych

W przypadku, gdy proste p i q są równoległe wybieramy dowolny punkt na prostej p oraz punkt na prostej q . Prowadzimy przez te punkty prostą, nazwiemy ją prostą m , tak jak w powyższym przypadku będzie ona kierunkiem rzutowania. Na mocy wniosku 3.1.3. prosta m nie jest równoległa do żadnej z prostych p i q . Dalej postępujemy analogicznie jak powyżej.

3.4.3. Uzasadnienie, że odwzorowanie jest wzajemnie jednoznaczne

Odwzorowanie jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym (bijekcją), gdy jest różnowartościowe oraz „NA” jednocześnie. Dla przypomnienia przytoczymy definicje różnowartościowości oraz suriekcji.

DEFINICJA różnowartościowości

f nazywa się *funkcją różnowartościową* jeśli wartość funkcji f dla różnych elementów zbioru X są różne.

DEFINICJA suriekcji

Mówimy, że f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y jeśli $f(X) = Y$, a więc każdy element zbioru Y jest obrazem, co najmniej jednego elementu zbioru X .

Sformułowane wyżej odwzorowanie jest różnowartościowe, gdyż dla każdych dwóch różnych punktów Q i Q' należących do prostej q możemy znaleźć odpowiadające im punkty na prostej p . Na mocy WNIOSKU 3.1.3 wiemy, że punkty te są różne, ponieważ proste m i m' są równoległe oraz różne więc przecinają prostą p w dwóch różnych punktach P i P' .

Aby wykazać, że odwzorowanie jest „NA”, wystarczy pokazać, iż każdemu elementowi ze zbioru punktów należących do prostej p można przyporządkować punkt na prostej q .

W tym celu każdy punkt prostej p rzutujemy na prostą q . Obrazem prostej q prze to odwzorowanie jest prosta p . Zatem istnieje dla każdego punktu z prostej p jego jedyny obraz na prostej q .

3.5. Równoliczność zbiorów prostych o jednym kierunku

Przez pojęcie kierunku rozumiemy rodzinę wszystkich prostych równoległych do dowolnie ustalonej prostej. Różne kierunki wyznaczają proste nie będące równoległe i różne.

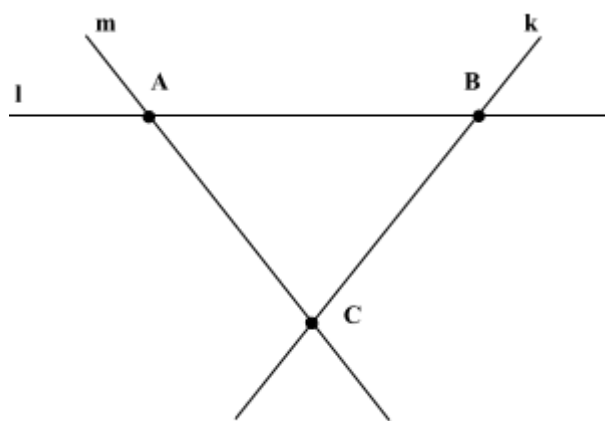
Na początek pokażemy, że istnieją, co najmniej trzy kierunki. Skorzystamy z tego faktu przy dowodzie równoliczności zbioru prostych o jednym kierunku.

3.5.1. WNIOSEK

Z aksjomatu o istnieniu trzech punktów nie należących do jednej prostej (trzeci aksjomat incydencji) można wyciągnąć poniższy wniosek.

Istnieją, co najmniej trzy kierunki.

Na mocy przywołanego wyżej aksjomatu mamy trzy punkty A, B, C . Tak jak obrazuje sytuację rysunek 3.9. punkty A i B leżą na jednej prostej l , natomiast punkt C nie należy do tej prostej.



Rys. 3.9.

Na mocy drugiego aksjomatu incydencji przez punkt C i punkt B przechodzi dokładnie jedna prosta k . Nie jest ona równoległa do prostej l (ma punkt wspólny B z prostą l), nie jest też równa prostej l , ponieważ zawiera punkt nie należący do prostej l , punkt C .

Zatem proste l i k wyznaczają dwa różne kierunki.

Przez punkt A i C przechodzi dokładnie jedna prosta m , różna od prostych k i l – nie zawiera ich punktu wspólnego B . Nie jest też równoległa do prostej k , ponieważ ma z nią punkt wspólny C . Prosta m przecina prostą l w punkcie A , czyli nie jest do niej równoległa. Zatem prosta m wyznacza trzeci, różny od dwóch pozostałych kierunek.

Pokazaliśmy, że istnieją, co najmniej trzy kierunki.

3.5.2. Równoliczność zbiorów prostych o jednym kierunku

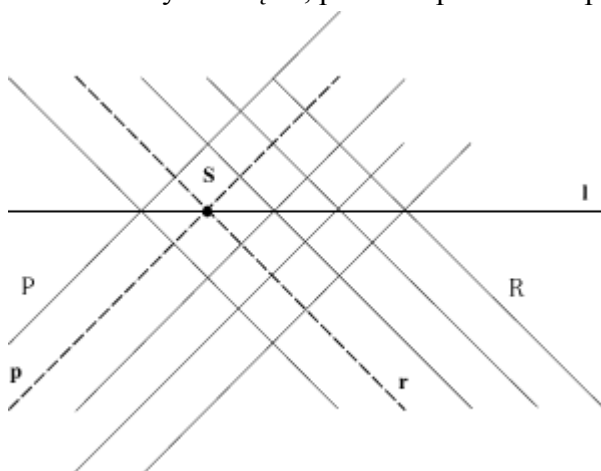
Mamy dane dwie nie równoległe proste p i r . Prosta p z wszystkimi prostymi do niej równoległymi tworzy rodzinę P prostych równoległych o tym samym kierunku. Analogicznie prosta r wyznacza kierunek prostych równoległych – rodzina R .

Z wniosku 3.5.1. wiemy, że istnieją przynajmniej trzy kierunki. Zatem prowadzimy prostą l , która będzie wyznaczać trzeci kierunek (patrz rysunek 3.11.).

Prosta p przecina prostą l w jednym punkcie, niech będzie to punkt S . Na mocy wniosku 3.1.3 każda prosta z rodziny prostych P przecina prostą l w dokładnie jednym punkcie.

Podobnie jest z prostymi z rodziny R , ponieważ prosta r ma z prostą l punkt wspólny Q , więc na mocy wniosku 3.1.3 każda prosta równoległa do prostej r przecina prostą l w jednym punkcie.

Niech odwzorowanie Φ przyporządkowuje prostej p z rodziny P prostą r należącą do rodziny R taką że, prosta ta przechodzi przez punkt S wspólny dla prostej l oraz p .



Rys. 3.10.

Odwzorowanie Φ jest różnowartościowe, ponieważ dwie różne proste p_1 i p_2 z zbioru P przecinają się w dwóch różnych punktach z prostą l , punkcie odpowiednio S_1 i S_2 . Przez te punkty przechodzą dwie różne, równoległe proste r_1 oraz r_2 , które są obrazami odpowiednio prostej p_1 i p_2 przez przekształcenie Φ .

Natomiast do każdej prostej z rodziny R można wskazać prostą z rodziny P . Mianowicie przez punkt wspólny dla prostej l i r prowadzimy prostą równoległą w tym samym kierunku co pozostałe proste z rodziny P , na mocy aksjomatu równoległości wiemy,

że istnieje jedyna taka prosta zawierająca punkt S . Obrazem rodziny R przez odwzorowanie Φ jest rodzina prostych P . Zatem odwzorowanie Φ jest „na”. Ponieważ przekształcenie Φ jest różnowartościowe i „na” jednocześnie, więc jest wzajemnie jednoznaczne.

Wskazaliśmy wzajemnie jednoznaczne przekształcenie odwzorowujące zbiór prostych równoległych o jednym kierunku na zbiór prostych równoległych w innym kierunku. Zatem zbiory te są równoliczne (niezależnie od tego czy są skończone czy nieskończone).

3.6. „Układ współrzędnych”

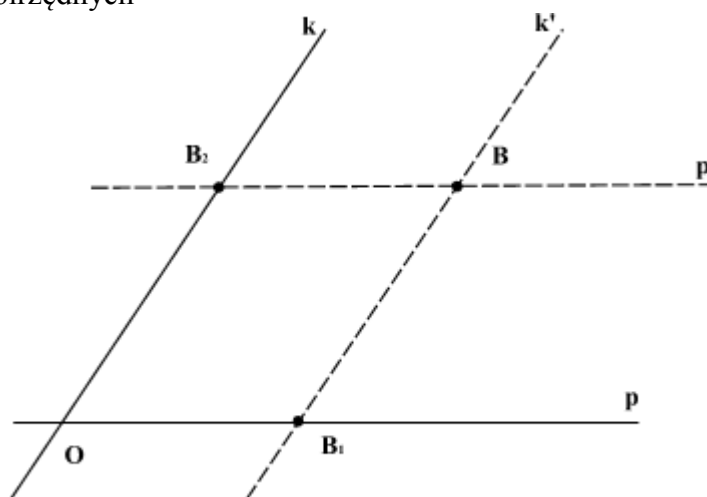
Mamy dwie dowolne różne proste k i p . Proste przecinają się w punkcie O . Taki układ prostych

z wyróżnionym punktem przecięcia nazwiemy układem współrzędnych a proste k i p osiami. Każdy punkt w tym układzie współrzędnych jest wyznaczony jednoznacznie przez parę punktów leżących na prostej p i k , punkty te nazywamy współrzędnymi. Wyróżniony punkt O ma wyjątkowe współrzędne jest nimi para $(O; O)$.

3.6.1. Sposób przypisania punktom współrzędnych

Dany jest układ prostych p i k oraz wyróżniony punkt O .

Mamy punkt B nie należący do żadnej z prostych p i k , tak jak na rysunku 3.12.



Rys. 3.12.

Na mocy aksjomatu równoległości istnieje jedna prosta p' zawierająca punkt B i równoległa do prostej p .

Z wniosku 3.1.3. wiemy, że proste k i p' przecinają się w jednym punkcie B_2 .

Analogicznie istnieje jedyna prosta k' równoległa do k , zawierająca punkt B . Prosta ta ma jeden punkt wspólny B , prostą p .

Stąd wynika, że punkt B ma wyznaczone jednoznacznie współrzędne – punkty na prostej p i k . Natomiast wyróżniony punkt O będący punktem przecięcia osi ma współrzędne $(O; O)$.

3.6.2. Jednoznaczność wyznaczania punktu za pomocą współrzędnych

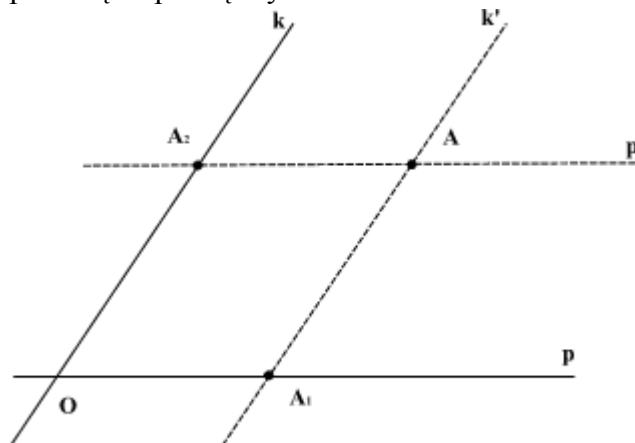
Dany jest układ dwóch prostych k i p oraz wyróżniony punkt O .

Na prostej p leży punkt A_1 , punkt A_2 należy do prostej k , oba punkty są różne od punktu O (rys. 3.11.).

Na mocy aksjomatu równoległości przez punkt A_1 przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do prostej k , nazwijmy ją k' .

Natomiast przez punkt A_2 przechodzi jedyna prosta równoległa do prostej p , prosta p' .

Z wniosku 3.1.3. wiemy, że proste p' i k' przetną się w jednym punkcie A . Stąd widać, że punkty $(A_1; A_2)$ – współrzędne – wyznaczają jednoznacznie punkt A .



Rys. 3.11.

ROZDZIAŁ 4

Działania i ich własności na prostej

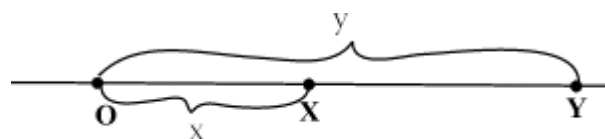
W rozdziale tym pokażemy, że prosta z wyróżnionymi punktami O i I zachowuje wszystkie własności charakterystyczne dla ciała. Można na niej zdefiniować działanie dodawania z neutralnym elementem O i mnożenia z elementem neutralnym I . Dodawanie i mnożenie są działaniami przemennymi i łącznymi. Zachodzi też rozdzielnosc mnożenia względem dodawania. Istnieją elementy odwrotne i przeciwne. Wybrane własności udowodnimy.

4.1. Dodawanie

Na prostej l mamy wyróżniony punkt O oraz punkty X i Y . Część prostej ograniczonej punktami O i X będziemy intuicyjnie nazywać wektorem x , o początku w punkcie O i końcu w X .

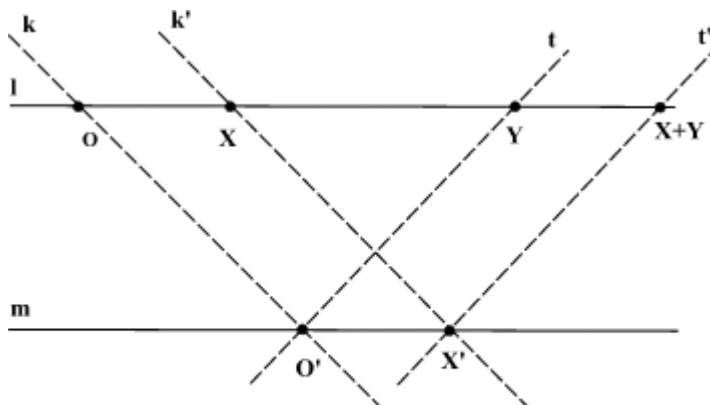
Podobnie wektor y ma początek w punkcie O i koniec w punkcie Y .

Sytuację obrazuje rysunek 4.1. Takie obiekty mają za zadanie jedynie intuicyjnie przybliżyć rozumowanie czytelnikowi.



Rys. 4.1.

4.1.1. Definicja dodawania



Rys. 4.2.

Dodawanie punktów, intuicyjnych wektorów x i y ogranicza się do wyznaczenia wektora $x + y$, czyli punktu $X + Y$ na prostej l , będącego końcem wektora. Zgodnie z intuicją operacja dodawania sprowadza się do prze-niesienia wektora x , tak by jego początkiem był punkt Y a nie O jak do tej pory. W tym celu wykorzystamy rzut równoległy punktu na prostą opisanego w punkcie 3.3 tej pracy.

Wybieramy prostą m , równoległą do prostej l , ale od niej różną - na nią będziemy rzutować. Przez punkt O prowadzimy prostą k (kierunek rzutowania).

Zgodnie z definicją rzutu równoległego punkt przecięcia prostej k z prostą m jest obrazem punktu O , dla nas niech będzie to O' . Analogicznie wyznaczamy obraz punktu X na prostej m (patrz rys. 4.2.).

Następnie rzutujemy punkty O' i X' na prostą l , tak by obrazem punktu O' był punkt Y . Zatem kierunek rzutowania wyznacza prosta t przechodząca przez punkty O' i Y . Obrazem punktu X' będzie poszukiwany punkt $X + Y$.

4.1.2. Niezależność dodawania od wyboru prostej, na którą rzutujemy i kierunku rzutowania

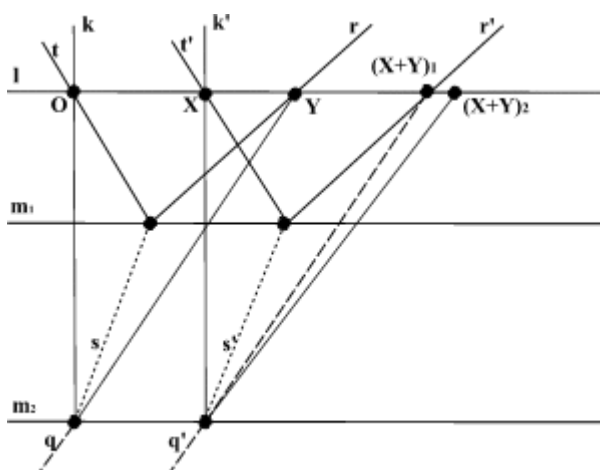
Dodawanie ma być operacją uniwersalną, niezależną od obiektów drugorzędnych (wykorzystywanych do jej zdefiniowania). W punkcie tym pokażemy, że nie zależy ona od wyboru prostej, na którą rzutujemy, ani od prostej wyznaczającej kierunek rzutu.

Wybieramy prostą m_2 równoległą do prostej l , różną od m_1 . Na tę prostą będziemy rzutować punkty O i X w kierunku innym niż przy rzutowaniu na prostą m_1 . Sytuację schematycznie obrazuje rysunek 4.3.

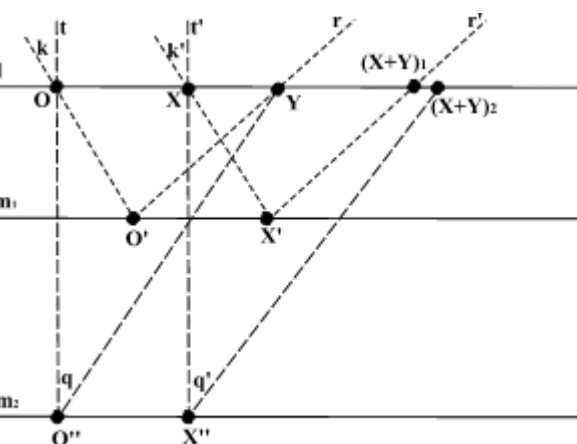
Następnie według zdefiniowanej metody dodawania przenosimy punkt O'' i X'' na prostą l , tak by obrazem punktu O'' był punkt Y .

Naszym celem jest pokazać, że $(X+Y)_1 = (X+Y)_2$.

DOWÓD:



Rys. 4.4.



Rys. 4.3.

Wiemy, że proste l , m_1 , m_2 są równoległe oraz $t \parallel t'$, $k \parallel k'$.

Na mocy pierwszego aksjomatu Desarguesa proste s i s' są równoległe (patrz schematyczny rysunek 4.4.).

Z kolei, ponieważ $s \parallel s'$ i $r \parallel r'$ to proste q i q' są równoległe zgodnie z tym samym aksjomatem.

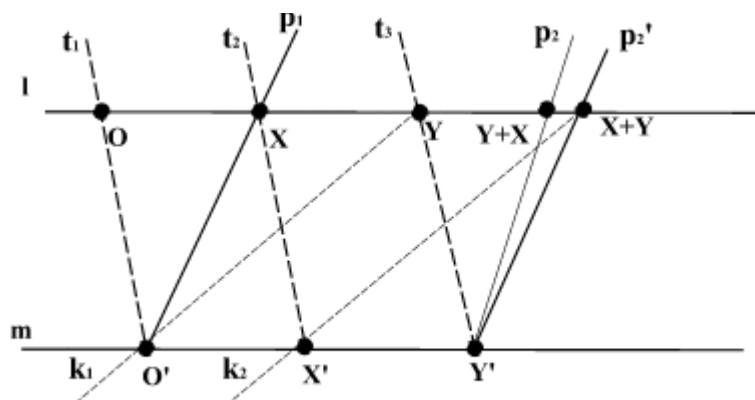
Z aksjomatu równoległości wiemy, że przez punkt nie należący do prostej przechodzi tylko jedna prosta równoległa, zatem prosta q' jest równa prostej przechodzącej przez punkt $(X+Y)_2$. Czyli punkt $(X+Y)_1$ jest równy punktowi $(X+Y)_2$. To kończy dowód, że

operacja dodawania nie zależy od wyboru prostych pomocniczych.

4.1.3. Przemienność dodawania

Musimy pokazać, iż przy wykonywaniu operacji dodawania punktów nie ma znaczenia, kolejność dodawania, czyli rzutowania punktów na prostą. Zadanie sprowadza się do udowodnienia, że punkt $X+Y$ i $Y+X$ to te same punkty.

Przy pomocy prostej m równoległej do l dodajemy punkt X do Y . W tym celu prowadzimy dwie proste równoległe, t_1 przechodzącą przez punkt O oraz t_2 zawierającą punkt X . Proste przecinają prostą m każda w jednym punkcie, odpowiednio O' , X' (patrz rysunek 4.5.).



Rys. 4.5.

Następnie prowadzimy prostą k_1 przez punkty O' i Y oraz równoległą do niej prostą k_2 zawierającą punkt X' . Proste k_2 i l mają punkt wspólny $X+Y$.

Aby dodać punkt Y do X prowadzimy prostą t_3 , równoległą do prostej t_1 , przechodzącą przez punkt Y . Prosta ta przecina prostą m w punkcie Y' .

Przez punkty O' i X prowadzimy prostą p_1 , następnie p_2 równoległą do niej zawierającą punkt Y' . Prosta ta przecina prostą l w punkcie $Y+X$.

Naszym zadaniem jest pokazać, że punkt $X+Y$ jest równy punktowi $Y+X$.

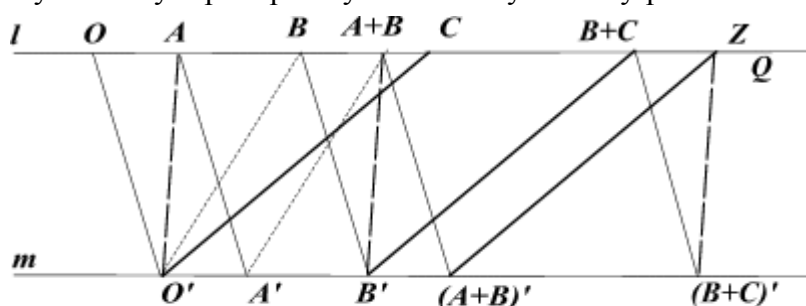
Powyżej opisane operacje dają sytuację gdzie prosta t_2 jest równoległa do prostej t_3 oraz $k_1 \parallel k_2$. Wiemy też, że prosta l jest równoległa do m , bo tak je dobraliśmy. Zatem na mocy pierwszego twierdzenia Pappusa mamy $p_1 \parallel p_2'$. Powołując się na aksjomat równoległości prosta p_2 i p_2' to ta sama prosta, która przecina prostą l w jednym punkcie, stąd punkt $Y+X$ jest równy punktowi $X+Y$.

Kończy to dowód przemienności dodawania.

4.1.4. Łączność dodawania

Aby pokazać własność łączności dla działania dodawania należy pokazać, że punkt $Z=(A+B)+C$ jest równy punktowi $A+(B+C)=Q$, gdzie A , B , C to dowolne, różne punkty leżące na jednej prostej, powiedzmy l .

Dodajemy punkt A i B . W tym celu rzutujemy punkty A i O na prostą m równoległą do prostej l i różną od niej. Następnie powstały punkt A' rzutujemy na prostą l w kierunku wyznaczonym przez punkty O' i B . Uzyskaliśmy punkt $A+B$. Punkt ten dodajemy do punktu



Rys. 4.6.

C rzutując go najpierw na prostą m w kierunku prostej OO' , a następnie na prostą l w kierunku prostej $O'C$.

W efekcie otrzymujemy punkt $Z=(A+B)+C$.

Sytuację schematycznie obrazuje rysunek 4.6.

Aby dodać punkt B do C rzutujemy B na prostą m w kierunku prostej OO' i otrzymujemy punkt B' . Następnie punkt ten rzutujemy na prostą l tym razem w kierunku prostej $O'C$ tak otrzymujemy punkt $B+C$. Uzyskany punkt dodajemy do punktu A rzutując go na prostą m w kierunku prostej OO' , następnie uzyskany punkt $(B+C)'$ rzutujemy na prostą l w kierunku prostej $O'A$. W efekcie otrzymujemy punkt $Q=A+(B+C)$.

Wykonanie powyższych operacji dodawania punktów stworzyło sytuację, gdzie mamy proste parami równoległe, mianowicie prosta $m \parallel l$ bo tak wybraliśmy prostą m . Prosta AA' równoległa do prostej BB' oraz $O'B \parallel A'(A+B)$. Zatem na mocy pierwszego aksjomatu Pappusa mamy równoległość prostych $O'A$ i $B'(A+B)$.

Stosując jeszcze raz pierwszy aksjomat Pappusa dla prostych $B'(B+C) \parallel (A+B)'Z$ oraz $(A+B)' \parallel (B+C)(B+C)'$, otrzymujemy równoległość prostej $B'(A+B)$ i $Z(B+C)'$. Z rozdziału trzeciego tej pracy wiemy, że równoległość jest relacją przechodnią, zatem prosta $Z(B+C)'$ jest równoległa również do prostej $O'A$.

Na mocy aksjomatu równoległości wiemy, że przez punkt $(B+C)'$ przechodzi tylko jedna prosta równoległa do prostej $O'A$, zatem punkt Q jest równy punktowi Z , czyli $(A+B)+C=A+(B+C)$.

4.2. Mnożenie

By czytelnikowi bliższa była idea opisanej poniżej definicji mnożenia, przedstawimy jej uzasadnienie w znanej mu geometrii euklidesowej operując jej twierdzeniem.

Przypadek, schematycznie zobrazowany za pomocą rysunku 4.7, spełnia założenia twierdzenia Talesa.

Mianowicie, proste l i l_1 tworzą kąt, którego ramiona przecinają proste równoległe t i t' wyznaczając odcinki OI oraz OX , OA , OB . Gdzie długość odcinka OI jest równa 1.

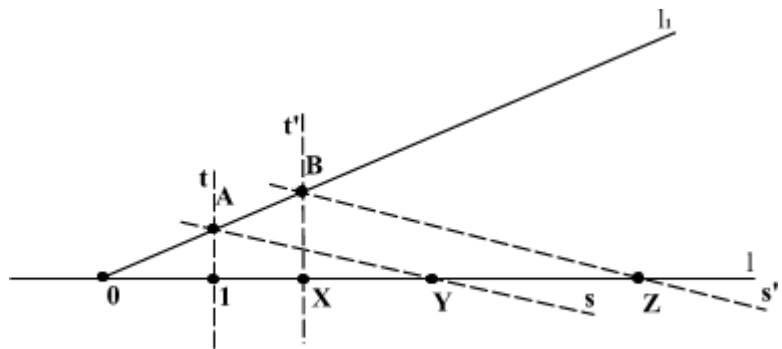
Zatem na mocy twierdzenia Talesa prawdziwa jest

proporcja: $\frac{1}{|OX|} = \frac{|OA|}{|OB|}$. Ten

sam kąt przecinają dwie inne proste równoległe s i s'

i wyznaczają na prostej l dwa nowe odcinki OY , OZ . Dla tego przypadku prawdziwa jest

równość: $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OY|}{|OZ|}$.



Rys. 4.7.

Podstawiając pierwsze równanie do drugiego i przekształcając otrzymujemy: $|OZ| = |OX| \cdot |OY|$. Zatem OZ jest odcinkiem o długości równej iloczynowi długości odcinków OX i OY .

Ideę tą przenosimy do naszej teorii stosując zamiast długości odcinka wektory zdefiniowane na początku tego rozdziału.

4.2.1. Definicja mnożenia

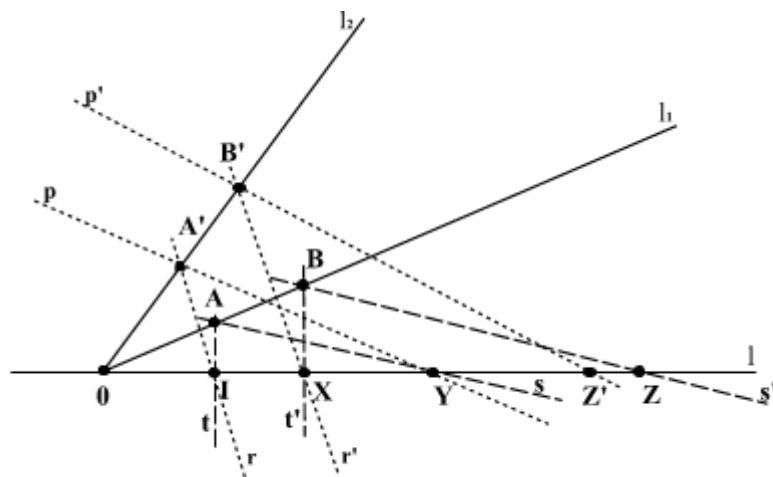
Mnożenie punktów, intuicyjnych wektorów x i y ogranicza się do wyznaczenia wektora xy , czyli punktu $Z = X \cdot Y$ na prostej l . Można operację intuicyjnie rozumieć jako przeniesienia wektora x , tak by jego początkiem był punkt Y a nie O jak do tej pory. W tym celu wykorzystamy rzut równoległy punktu na prostą mającą punkt wspólny z prostą l .

Wyznaczamy prostą l_1 , przecinającą prostą l w punkcie O , na nią będziemy rzutować. Przez punkty X i I prowadzimy proste równoległe odpowiednio t , t' (rys. 4.7). Proste te mają punkty wspólne z prostą l_1 , A i B .

Następnie rzutujemy punkty A i B na prostą l , tak by obrazem punktu A był punkt Y .

Zatem kierunek rzutowania wyznacza prosta s przechodząca przez punkty A i Y . Obrazem punktu B będzie poszukiwany punkt $Z = X \cdot Y$.

4.2.2. Niezależność mnożenia od wyboru prostej, na którą rzutujemy i kierunku



Rys. 4.8.

Wybieramy prostą l_2 mającą punkt wspólny O z prostą l , różną od l_1 .

Na tę prostą będziemy rzutować punkty I i X w kierunku innym niż przy rzutowaniu na prostą l_1 .

Następnie według zdefiniowanej metody mnożenia przenosimy punkt A' i B' na prostą l , tak by obrazem punktu A' był punkt Y .

Naszym celem jest udowodnić, że $Z=Z'$. Sytuację schematycznie obrazuje rysunek 4.8.

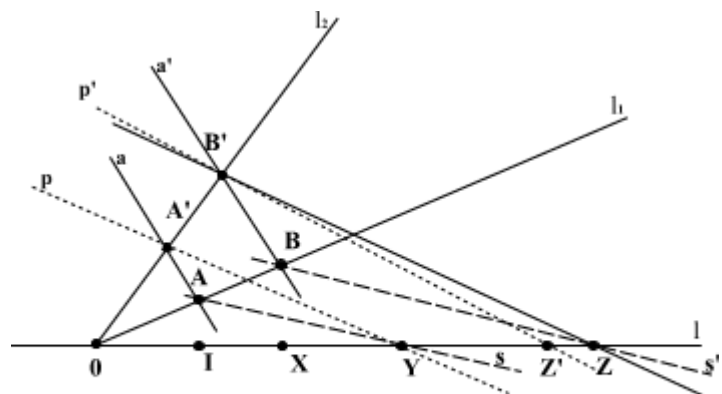
DOWÓD:

Wiemy, że proste l , l_1 , l_2 mają punkt wspólny O i są różne, oraz $t \parallel t'$, $r \parallel r'$.

Na mocy drugiego aksjomatu Desarguesa prosta a zawierająca punkty A , A' jest równoległa do prostej a' przechodzącej przez punkty B i B' , są równoległe (patrz rysunek 4.9.). Ponieważ $s \parallel s'$ i $a \parallel a'$ to prosta p i p' są równoległe zgodnie z drugim aksjomatem Desarguesa.

Zatem prosta p' przecina prostą l w tym samym punkcie co prosta s' , punkcie Z .

Tu dochodzimy do sprzeczności



Rys. 4.9.

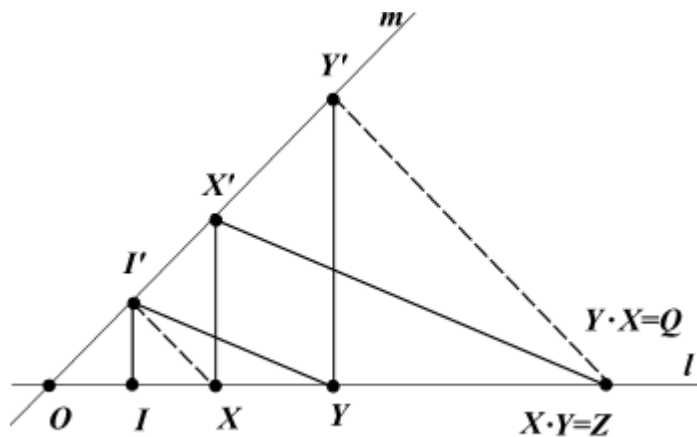
z założeniem, że prosta p' przecina prostą l w punkcie różnym od Z

4.2.3. Przemienność mnożenia

Naszym celem jest pokazanie, że mnożąc punkty X i Y otrzymujemy ten sam wynik, co przy mnożeniu punktu Y z punktem X . Czyli, że nie ma znaczenia kolejność rzutowania punktów na prostą. Zadanie sprowadza się do udowodnienia, że punkt $Z = X \cdot Y$ jest równy punktowi $Q = Y \cdot X$.

Mamy prostą l zawierającą punkty będące elementami neutralnymi dodawania i mnożenia, odpowiednio punkt O, I . Przez punkt O prowadzimy pomocniczą prostą m , różną od l . Na nią rzutujemy punkty I i X prowadząc dwie, różne proste równoległe, otrzymujemy punkty I', X' . Następnie rzutujemy je na prostą l w kierunku wyznaczonym przez prostą $I'X$. Tak otrzymujemy punkt Z , równy iloczynowi $X \cdot Y$. Sytuację obrazuje rysunek 4.10.

Punkt Q wyznaczamy rzutując na prostą punkt Y w kierunku prostej II' . Otrzymany punkt Y' rzutujemy na prostą l w kierunku wyznaczonym przez prostą $I'X$. Uzyskany punkt jest równy $Y \cdot X$.



Rys. 4.10.

równa prostej $Y'Q$ a tym samym punkt Q jest równy punktowi Z . Pokazując równość punktów, udowodniliśmy równanie $Y \cdot X = X \cdot Y$ a to kończy dowód przemienności mnożenia.

Powyżej opisane operacje mnożenia dają sytuację, w której wyróżniamy parami równoległe proste: $I'Y \parallel X'Q$ oraz $X'X \parallel Y'Y$. W tym przypadku możemy skorzystać z drugiego aksjomatu Pappusa na mocy, którego wiemy, że prosta $I'X$ jest równoległa do prostej $Y'Q$. Zgodnie z aksjomatem równoległości przez punkt nie należący do prostej przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa, zatem prosta $Y'Z$ jest

ROZDZIAŁ 5

Izomorficzność ciał na dwóch osiach

W rozdziale tym pokażemy, że dwie proste – ciała, przecinające się w jednym punkcie O – osie – są izomorficzne. Czyli istnieje odwzorowanie jednej prostej w drugą będące izomorfizmem. Przez izomorfizm na przykład ciała K na ciało K' rozumiemy takie odwzorowanie wzajemnie jednoznaczne K na K' , które zachowuje działania w ciałach. Pokażemy, że istnieje takie odwzorowanie jednej prostej na drugą oraz jest bijekcją i zachowuje działania.

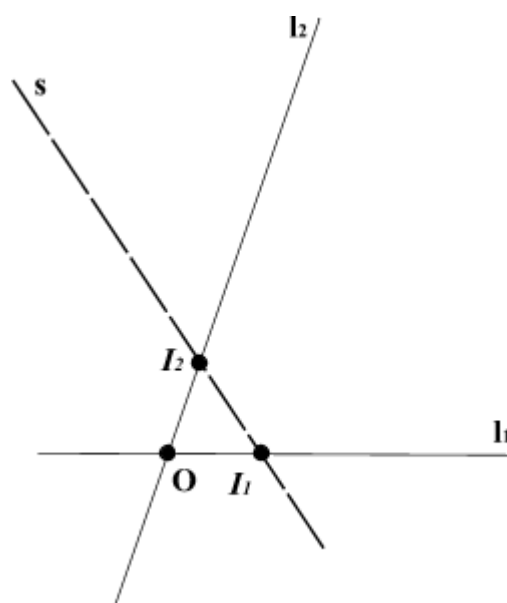
5.1. Odwzorowanie

Mamy dany układ współrzędnych z osiami l_1 i l_2 o wspólnym punkcie O .

Na każdej prostej wyróżniony jest punkt I , jako element neutralny mnożenia.

Jak pokazaliśmy w poprzednim rozdziale prosta jest ciałem z działaniami mnożenia i dodawania.

Nasze poszukiwane odwzorowanie Π , będzie rzutem równoległym (zdefiniowanym w punkcie 3.3 tej pracy) wszystkich punktów ze zbioru, jakim jest jedna prosta na drugą prostą w kierunku prostej s . Natomiast prosta s jest jednoznacznie wyznaczona przez dwa punkty leżące na różnych osiach, są to elementy neutralne mnożenia punkty I_1 i I_2 . Sytuację schematycznie przedstawia rysunek 5.1.



Rys. 5.1.

5.2. Przekształcenie Π jest izomorfizmem

Aby odwzorowanie było izomorfizmem musi spełniać dwa warunki. Jest wzajemnie jednoznaczne i zachowuje działania.

Odwzorowanie jest wzajemnie jednoznaczne (bijekcją), gdy jest różnowartościowe oraz „NA” jednocześnie. Że tak jest pokazaliśmy w punkcie 3.4.3 tej pracy.

Pokażemy, że odwzorowanie Π zachowuje oba działania, mnożenie i dodawanie.

Mamy dwa dowolne, różne punkty należące do osi l_1 , X_1 i Y_1 . Punkty X_2 i Y_2 leżące na prostej l_2 są obrazami punktów odpowiednio X_1 i Y_1 uzyskanymi przez odwzorowanie Π , zdefiniowane w punkcie 5.1.

5.2.1. Odwzorowanie Π zachowuje dodawanie

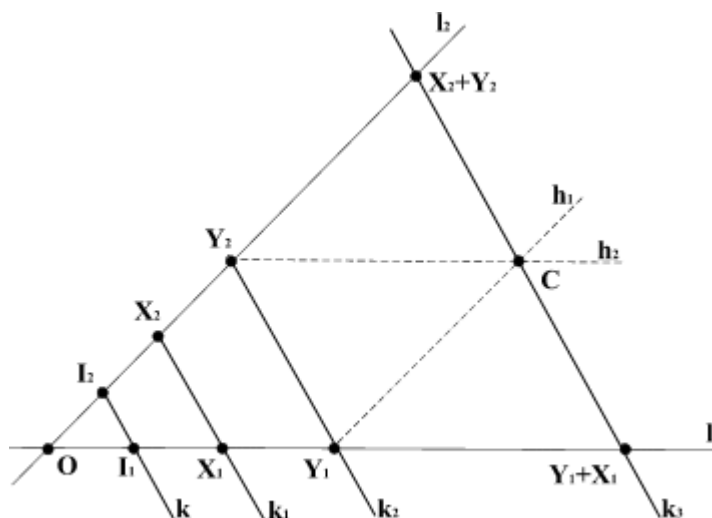
Naszym zadaniem jest pokazać, że odwzorowanie Π zachowuje dodawanie, czyli że prawdziwa jest równość $\Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$. Sytuacja sprowadza się do udowodnienia, że punkt $X_2 + Y_2$ jest obrazem punktu $X_1 + Y_1$ przez odwzorowanie Π .

Pokażemy prawdziwość równania: $X_2 + Y_2 = X_1 + Y_1$.

DOWÓD

Przez punkt X_1 prowadzimy prostą h_1 równoległą do osi l_2 . Podobnie przez punkt Y_2 prowadzimy prostą h_2 taką, że $h_2 \parallel l_1$. Proste h_1 , h_2 przecinają się w punkcie C .

Przez ten punkt prowadzimy prostą k_3 równoległą do prostej k . Sytuację obrazuje schematycznie rysunek 5.2.



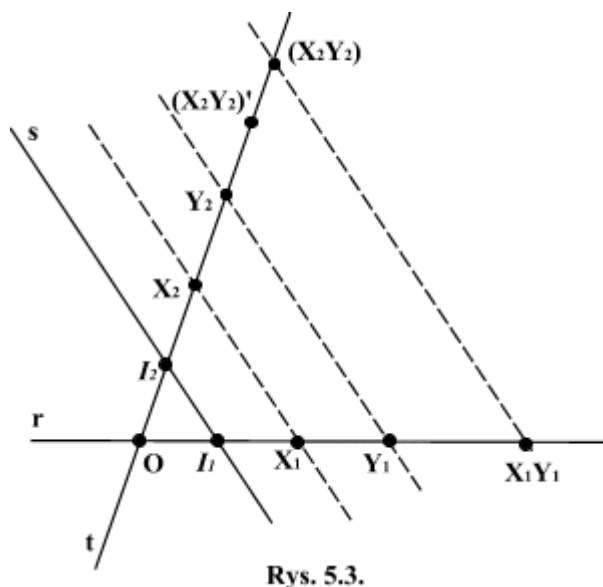
Rys. 5.2.

Prosta k_3 przecina obie osie. Zauważmy, że, $l_2 \parallel h_1$ oraz $l_1 \parallel k_3$, czyli zgodnie z definicją dodawania punkt przecięcia prostej k_3 z osią l_1 jest wynikiem dodawania $Y_1 + X_1$.

Natomiast punkt przecięcia prostej k_3 z osią l_2 to $X_2 + Y_2$, gdyż $l_1 \parallel h_2$ i $k_1 \parallel k_3$. W rozdziale czwartym tej pracy pokazaliśmy, że działanie dodawania jest przemienne w ciele K . Zatem punkt $Y_1 + X_1$ jest równy punktowi $X_1 + Y_1$. Natomiast z faktu, że prosta k_3 jest równoległa do k wynika, że obrazem punktu $X_1 + Y_1$ przez przekształcenie Π jest punkt $X_2 + Y_2$.

To kończy dowód prawdziwości równania $\Pi(X + Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$.

5.2.2. Odwzorowanie Π zachowuje mnożenie



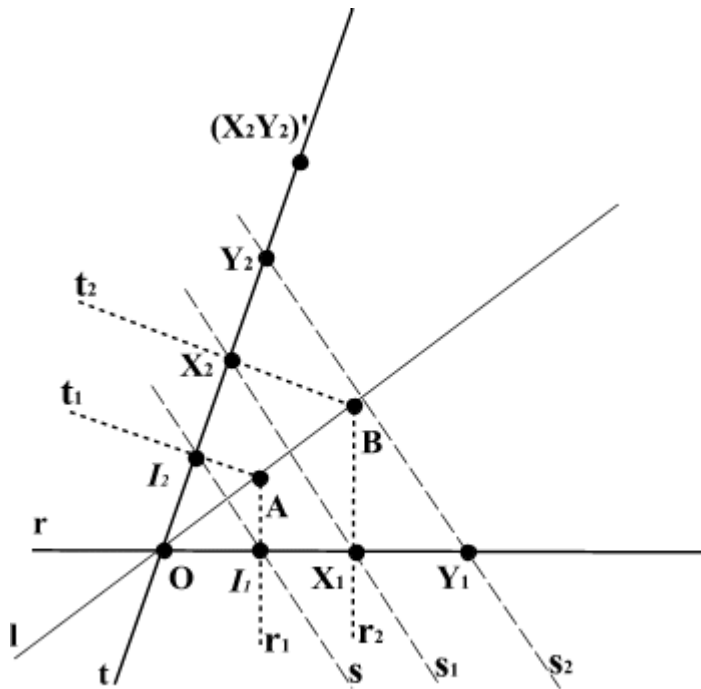
Rys. 5.3.

Mnożąc punkty X_1 i Y_1 otrzymujemy punkt (X_1Y_1) , rzutując go na prostą t uzyskujemy punkt (X_2Y_2) .

Z kolei mnożąc punkty X_2 i Y_2 uzyskujemy punkt $(X_2Y_2)'$.

Musimy pokazać, że punkt (X_2Y_2) jest równy punktowi $(X_2Y_2)'$. Sytuację schematycznie obrazuje rysunek 5.3.

Przez punkt O prowadzimy pomocniczą prostą l . Na tej prostej wybieramy dowolny punkt A , przez ten punkt i punkt I_1 prowadzimy prostą r_1 , to będzie kierunek rzutowania zgodnie z definicją mnożenia.

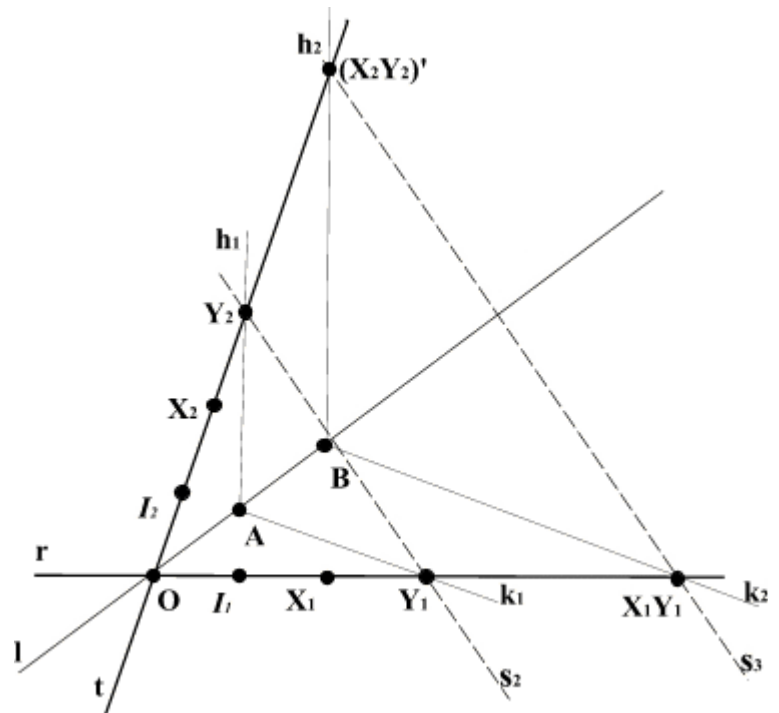


Rys. 5.4.

prosta k_2 równoległa do k_1 . Prosta ta przecina prostą r w punkcie X_1Y_1 . Przez punkty A i Y_2 prowadzimy prostą h_1 , przez punkt B prowadzimy prostą równoległą do h_1 , nazwijmy ją h_2 . Prosta h_2 i r przecinają się w jednym punkcie $(X_2Y_2)'$ (sytuację schematycznie obrazuje rysunek 5.5).

W efekcie mamy sytuację, gdzie prosta h_1 jest równoległa do h_2 , $k_1 \parallel k_2$ i proste z tym samym indeksem mają wspólne punkty odpowiednio A i B należące do prostej l . Zatem na mocy drugiego aksjomatu Desarguesa prosta s_2 jest równoległa do prostej s_3 .

Natomiast zgodnie z aksjomatem równoległości przez punkt nie leżący na prostej s , w naszym przypadku punkt X_1Y_1 , przechodzi tylko jedna prosta równoległa do prostej s . Czyli obrazem punktu X_1Y_1 przez odwzorowanie Π jest punkt $(X_2Y_2)'$ równy punktowi X_2Y_2 .



Rys. 5.5.

Zatem punkty $(X_2Y_2)'$ i (X_2Y_2) to ten sam punkt. Wraz z tym faktem pokazaliśmy, że odwzorowanie Π zachowuje działanie mnożenia.

Prosta r_2 przechodząca przez punkt X_1 jest równoległa do r_1 i przecina prostą l w punkcie B .

Prosta t_1 zawiera punkty A i I_2 , natomiast prosta t_2 przechodzi przez punkty B i X_2 schematycznie obrazuje to rysunek 5.4.

Mamy sytuację gdzie $r_1 \parallel r_2$ i $s \parallel s_1$, zatem na mocy drugiego aksjomatu Desarguesa proste t_1 i t_2 są równoległe.

Przez punkty A , Y_1 prowadzimy prostą k_1 , natomiast przez punkt B

ROZDZIAŁ 6

Równania prostych

Pokażemy, że proste w uzyskanym układzie współrzędnych zadane są liniowymi równaniami. Z faktu tego wynika izomorficzność dowolnej płaszczyzny afinicznej z modelem K^2 . Pierwsza część rozdziału zawiera dowód lematu, którego treść jest podstawą do wyprowadzenia równań prostych w danym układzie współrzędnych.

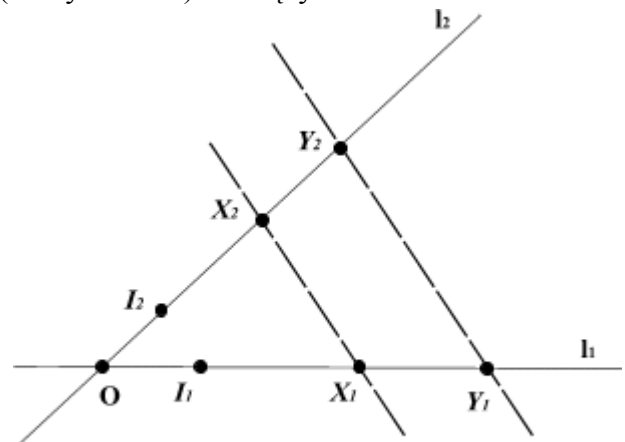
6.1. Lemat

Mamy dane dwie proste l_1 i l_2 mające jeden punkt wspólny, punkt O . Sytuację schematycznie przedstawia rysunek 6.1. Dla punktów X_1, Y_1 (różnych od O) należących do osi l_1 oraz X_2 i Y_2 leżących na osi l_2 (różnych od punktu O) prawdziwa jest zdanie:

LEMAT 2

Istnieje C należące do ciała K takie, że $Y_1 = X_1 \cdot C$ oraz $Y_2 = X_2 \cdot C \Leftrightarrow Y_1 X_2 \parallel Y_2 X_1$.

Aby udowodnić prawdziwość tego lematu, musimy pokazać wynikanie w obie strony.



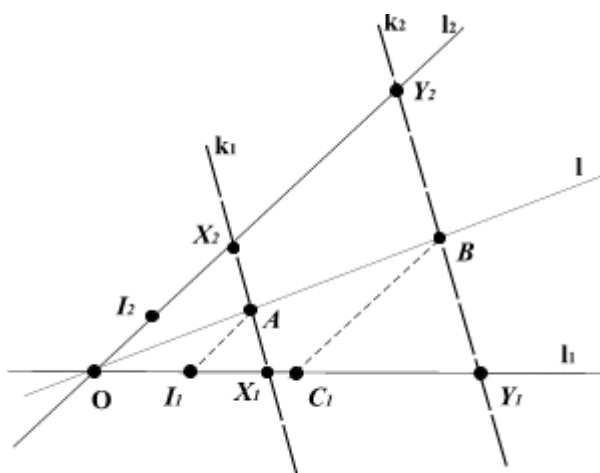
Rys. 6.1.

6.1.1. Dowód implikacji w jedną stronę ($\Leftarrow$)

Zakładamy, że proste zawierające punkty X_1, X_2 jest równoległą do prostej przechodzącej przez punkty Y_1 i Y_2 . Teza, do której dążyć będziemy w dowodzie brzmi:

$$\exists C \in K \text{ takie, że } Y_1 = X_1 \cdot C \text{ oraz } Y_2 = X_2 \cdot C.$$

Mamy dany układ osi l_1 i l_2 z punktami należącymi do odpowiednich osi zgodnie z powyższym opisem. Na osiach są wyróżnione punkty I_1 oraz I_2 – elementy neutralne mnożenia. Zgodnie z założeniem prosta k_1 przechodząca przez punkty X_1, X_2 jest równoległą do prostej k_2 zawierającej punkty Y_1, Y_2 .

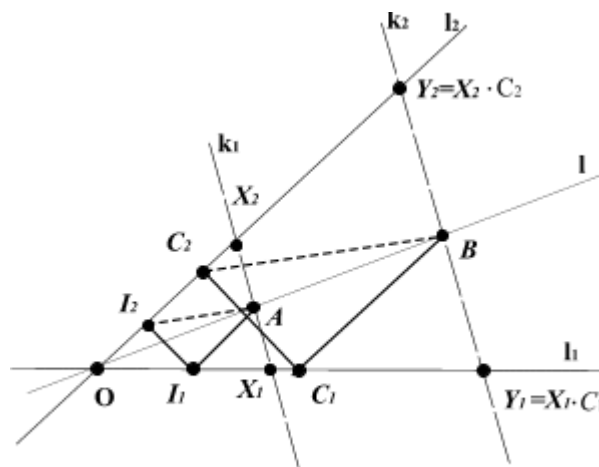


Rys. 6.2.

Prosta wyznaczona przez punkty I_1, I_2 będzie kierunkiem rzutowania punktu C_1 na oś l_2 . Obrazem tego punktu jest C_2 . Sytuację przedstawia schematyczny rysunek 6.3. Mamy sytuację gdzie prosta I_1A jest równoległą do prostej C_1B oraz $I_1I_2 \parallel C_1C_2$. Zatem na mocy drugiego aksjomatu Desarguesa prosta I_2A jest równoległą do prostej C_2B .

Zgodnie z definicją mnożenia punkt Y_2 jest wynikiem mnożenia punktów X_2 i C_2 , czyli $Y_2 = X_2 \cdot C_2$. Natomiast punkt Y_1 to iloczyn punktów X_1 i C_1 , zatem $Y_1 = X_1 \cdot C_1$.

Zauważmy, że odwzorowanie, które przekształca element neutralny mnożenia należący do jednej osi na element neutralny mnożenia na drugiej osi to odwzorowanie Π z rozdziału 5 tej pracy. O przekształceniu tym wiemy, że izomorfizmem jednej osi w drugą i przyporządkowuje punktom ze zbioru, jakim jest prosta l_1 te same elementy należące do zbioru l_2 .



Rys. 6.3.

Zatem punkt C_1 jest równy punktowi C_2 , czyli $Y_1 = X_1 \cdot C_1$ oraz $Y_2 = X_2 \cdot C_1$. Doszliśmy do naszej tezy, to kończy dowód implikacji.

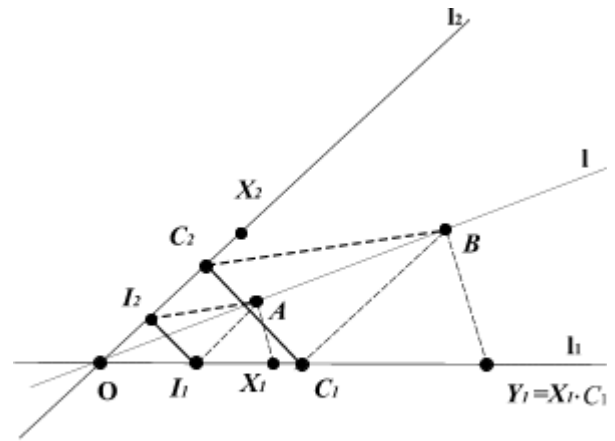
6.1.2. Dowód implikacji w drugą stronę ($\Rightarrow$)

Zakładamy, że prawdziwa jest równość dla C należącego do ciała K : $Y_1 = X_1 \cdot C$ oraz $Y_2 = X_2 \cdot C$. Musimy pokazać, że prosta k_1 zawierające punkty X_1, X_2 jest równoległą do prostej k_2 przechodzącej przez punkty Y_1 i Y_2 . Teza, której będziemy dowodzić brzmi: $k_1 \parallel k_2$

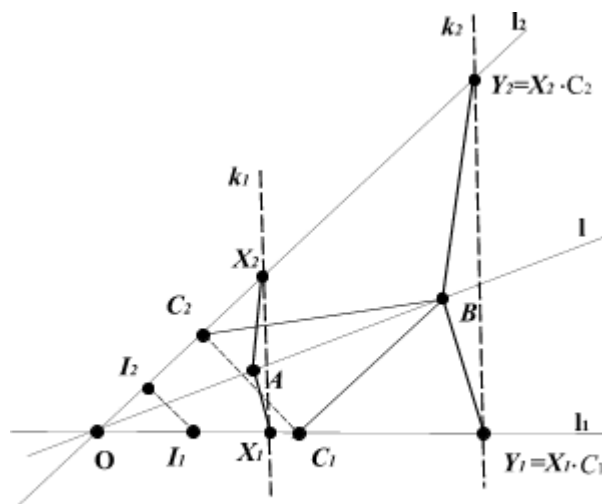
Mamy dany ten sam, co w poprzednim podpunkcie, układ osi l_1 i l_2 z punktami należącymi do odpowiednich osi zgodnie z powyższym opisem. Na osiach są wyróżnione punkty I_1 oraz I_2 – elementy neutralne mnożenia. Zgodnie z założeniem punkt $Y_1 = X_1 \cdot C$ oraz $Y_2 = X_2 \cdot C$. Zatem punkt Y_1 jest iloczynem punktu X_1 i C_1 natomiast punkt Y_2 to wynik mnożenia punktów X_2 i C_2 , gdzie punkt C_1 jest równy punktowi C_2 przez odwzorowanie Π .

Dla dowodu przez punkt O prowadzimy prostą l , różną od obu osi układu. Na prostej wybieramy dowolny punkt A różny od O . Następnie rzutujemy punkt C_1 na prostą l w kierunku prostej AI_1 . Obrazem punktu C_1 przez to przekształcenie jest punkt B na prostej l . Sytuację schematycznie ilustruje rysunek 6.4. Zgodnie z definicją mnożenia rzutujemy punkt B na os l_1 w kierunku prostej AX_1 . Obraz punktu B to punkt $Y_1 = X_1 \cdot C_1$.

Mamy sytuację gdzie prosta AI_1 jest równoległa do prostej BC_1 oraz $I_1I_2 \parallel C_1C_2$ (wiemy, że $C_1=C_2$). Korzystając z drugiego aksjomatu Desarguesa wiemy, że prosta I_2A jest równoległa do prostej C_2B .



Rys. 6.4.



Rys. 6.5.

Dalej postępujemy zgodnie z definicją mnożenia, czyli rzutujemy punkt B na os l_2 w kierunku prostej przechodzącej przez punkty A i X_2 . Obrazem punktu B przez takie przekształcenie jest punkt $Y_2 = X_2 \cdot C_2$. Sytuacja schematycznie jest zilustrowana na rysunku 6.5.

Powstały nam parami równoległe proste, mianowicie $X_1A \parallel Y_1B$ oraz $X_2A \parallel Y_2B$. Zatem na mocy drugiego aksjomatu Desarguesa prosta k_1 jest równoległa do prostej k_2 .

Ten wniosek kończy dowód implikacji w drugą stronę. Tym samym, dowodząc obu implikacji udowodniliśmy LEMAT 2.

6.2. Równania prostych

Dany jest układ współrzędnych z osiami l_1 i l_2 przecinającymi się w punkcie O . Na osiach są wyróżnione punkty odpowiednio I_1 i I_2 będące elementami neutralnymi mnożenia. Proste w tym układzie współrzędnych możemy podzielić na dwie grupy ze względu na położenie. W pierwszym przypadku proste będą zawierać punkt O wspólny dla obu osi, natomiast w drugim przypadku prosta ma punkt wspólny z osią, różny od punktu O . Naszym celem jest znaleźć równania tych prostych.

6.2.1. Równanie prostej przechodzącej przez punkt O

W tym punkcie pracy udowodnimy prawdziwość poniższego lematu.

LEMAT 3

Proste przechodzące przez punkt O , różne od osi l_2 mają równania postaci $Y = C \cdot X$.

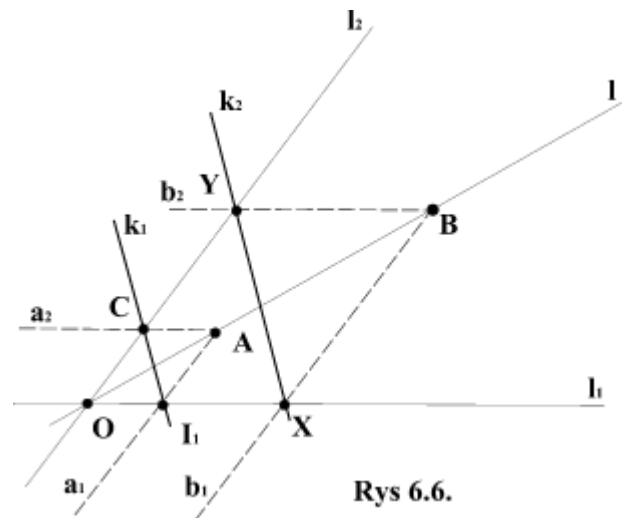
DOWÓD

Przez punkt O prowadzimy dowolną prostą l różną od osi. Na prostej znajdujemy punkt A , którego pierwszą współrzędną będzie punkt I_1 , w tym celu prowadzimy prostą a_1 równoległą do osi l_2 . Prowadząc prostą a_2 przez punkt A , taką, że $a_2 \parallel l_1$, wyznaczamy drugą współrzędną punktu A , punkt C . Wybieramy dowolny punkt leżący na prostej l , nazwijmy go B . Prowadzimy prostą $b_1 \parallel l_1$, punkt przecięcia z osią l_2 wyznacza pierwszą współrzędną X punktu B . Podobnie druga współrzędna, to punkt przecięcia prostej $b_2 \parallel l_2$ z osią l_1 , jest nią punkt Y . Sytuację schematycznie przedstawia rysunek 6.6.

Mamy sytuację gdzie prosta a_1 jest równoległą do prostej b_1 oraz $a_2 \parallel b_2$. Zatem na mocy drugiego aksjomatu Desarguesa prosta k_1 jest równoległa do prostej k_2 .

Na mocy LEMATU 3 istnieje D , element ciała K taki, że $Y = C \cdot X$ oraz $X = I_1 \cdot D$. Ponieważ punkt I_1 jest elementem neutralnym mnożenia, zatem drugie równanie sprowadza się do takiej równości: $X = I_1 \cdot D = D$.

Po przekształceniu pierwszego równania mamy: $Y = C \cdot X$.



Rys 6.6.

Zatem dowolna prosta przechodząca przez punkt O wyraża się równaniem $Y = C \cdot X$. To kończy dowód lematu.

6.2.2. Równanie prostej nie przechodzącej przez punkt $O' \neq O$

Dany jest układ współrzędnych z osiami l_1 i l_2 przecinającymi się w punkcie O . Na osiach wyróżnione są odpowiednio punkty I_1 i I_2 – elementy neutralne mnożenia. Taki układ będziemy nazywać $O I_1 I_2$. W tym układzie dowolny punkt X będzie miał współrzędne $(X_1; X_2)$.

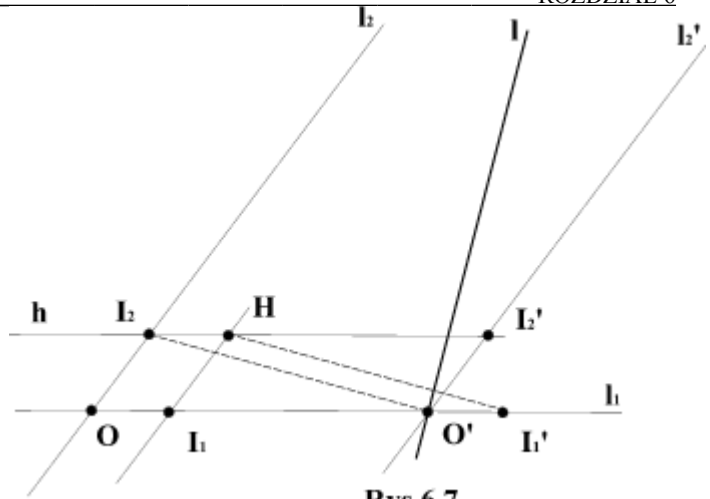
Dana jest prosta l przecinająca oś l_1 w punkcie O' różnym od punktu O .

Rozważać będziemy drugi układ współrzędnych $O' I_1' I_2'$, gdzie oś l_2' to prosta równoległa do l_2 przecinająca oś l_1 w punkcie O' . Natomiast oś l_1' to ta sama prosta, co l_1 . Punkt I_2' jest obrazem punktu I_2 otrzymanego przez rzutowanie poziome w kierunku osi l_1 na prostą l_2' . Jest on elementem neutralnym mnożenia nowej osi l_2' . Natomiast punkt I_1' otrzymujemy przez podwójne „przeniesienie” punktu I_1 , najpierw na prostą h w kierunku osi l_2 a następnie na oś l_1' tym razem w kierunku prostej $l_2 O$. Punkt I_1' jest elementem neutralnym mnożenia należącym do osi l_1' . Sytuację schematycznie obrazuje rysunek 6.7.

Nasz punkt X w nowym układzie ma współrzędne $(X_1'; X_2')$.

Mamy tu do czynienia z naturalnym utożsamieniem ciała, jakie tworzą drugie współrzędne na osi l_2 - $K(l_2, O, I_2)$ z ciałem nowych współrzędnych - $K(l_2', O', I_2')$. Dokonujemy go przez przekształcenie σ , które jest poziomym rzutem punktów na prostą l_2' w kierunku osi l_1 .

Przy utożsamieniu przez σ drugich współrzędnych w układzie $O I_1 I_2$ z współrzędnymi w układzie $O' I_1' I_2'$ mamy $X_2 = X_2'$.



Rys 6.7.

Natomiast naturalnego utożsamienia ciała $K(l_1, O, I_1)$ z ciałem $K(l_1', O', I_1')$ dokonujemy przez przekształcenie π , będące „podwójnym” przeniesieniem. Przy tym utożsamieniu pierwszych współrzędnych w układzie $O I_1 I_2$ z współrzędnymi w układzie $O' I_1' I_2'$ mamy $X_1 = X_1' + O'$.

Zatem obrazem punktu X o współrzędnych $(X_1'; X_2')$ w układzie $O' I_1' I_2'$ w starym układzie ma współrzędne $(X_1' + O'; X_2')$.

W nowym układzie współrzędnych prosta l przechodzi przez punkt przecięcia osi, zatem sprowadza się to do przypadku rozpatrywanego w punkcie 6.2.1. tej pracy. Czyli równanie opisujące prostą l w układzie $O' I_1' I_2'$ jest następujące: $X_2' = C \cdot X_1'$ gdzie $C \in K$. Wyrażmy to równanie we współrzędnych układu $O I_1 I_2$: $X_2 = C \cdot (X_1 - O') = C \cdot X_1 - C \cdot O'$. Ponieważ C i O' należą do ciała K , zatem ich iloczyn też jest elementem ciała, zatem równanie prostej sprowadza się do postaci: $X_2 = C \cdot X_1 + B$ gdzie $C \in K$ i $B \in K$.

Pokazaliśmy, że nie istnieją inne modele płaszczyzny afinicznej od tych przedstawionych w rozdziale drugim tej pracy.