

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka nauczycielska

Katarzyna Kozińska

ELEMENTARNA AKSJOMATYCZNA PŁASKA GEOMETRIA RZUTOWA

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab.
Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2012

Oświadczam, że pracę magisterską wykonałam samodzielnie i zgłaszam ją do oceny.

Data: 05.06.2012 Podpis autora pracy: K. Kozinińska

Oświadczam, że praca jest gotowa do oceny przez recenzenta.

Data: 5.06.2012 Podpis opiekuna pracy: J. Szwed

Spis treści

WSTĘP	4
1 AKSJOMATYKA PŁASKIEJ GEOMETRII RZUTOWEJ	5
1.1 PODSTAWOWE POJĘCIA GEOMETRII RZUTOWEJ	5
1.2 AKSJOMATY PŁASKIEJ GEOMETRII RZUTOWEJ	6
NIEZALEŻNOŚĆ AKSJOMATÓW	6
NIESPRZECZNOŚĆ AKSJOMATÓW	8
2 MODELE PŁASKIEJ GEOMETRII RZUTOWEJ	9
2.1 STANDARDOWA PŁASZCZYŻNA RZUTOWA	9
PODSTAWOWE POJĘCIA STANDARDOWEJ PŁASZCZYŻNY RZUTOWEJ	9
SPEŁNIANIE AKSJOMATÓW W STANDARDOWEJ PŁASZCZYŻNIE RZUTOWEJ	10
2.2 MODEL ŚRODKOWY I MODEL NA SFERZE	12
POJĘCIA PIERWOTNE W MODELU ŚRODKOWYM	12
SPEŁNIANIE AKSJOMATÓW W MODELU ŚRODKOWYM	12
MODEL NA SFERZE	13
2.3 MODEL $P^2(K)$	15
PODSTAWOWE POJĘCIA W MODELU $P^2(K)$	15
SPEŁNIANIE AKSJOMATÓW W MODELU $P^2(K)$	16
2.4 PŁASZCZYŻNA FANO	21
POJĘCIA PIERWOTNE NA PŁASZCZYŻNIE FANO	21
SPEŁNIANIE AKSJOMATÓW NA PŁASZCZYŻNIE FANO	22
3 WŁASNOŚCI PŁASZCZYŻNY RZUTOWEJ	24
3.1 ZASADA DUALNOŚCI	24
3.2 PRZEKSZTAŁCENIE RZUTOWE	25
3.3 LICZNOŚCI PĘKÓW I ŁAŃCUCHÓW	27
3.4 MOŻLIWE I NIEMOŻLIWE PŁASZCZYŻNY RZUTOWE	29
4 PŁASZCZYŻNA RZUTOWA A PŁASZCZYŻNA AFINICZNA	31
4.1 AKSJOMATYKA I PODSTAWOWE POJĘCIA PŁASZCZYŻNY AFINICZNEJ	31
4.2 KONSTRUKCJA PŁASZCZYŻNY AFINICZNEJ Z PŁASZCZYŻNY RZUTOWEJ	32
4.3 KONSTRUKCJA PŁASZCZYŻNY RZUTOWEJ Z PŁASZCZYŻNY AFINICZNEJ	35
4.4 SKŁADANIE OPERACJI USUWANIA I DODAWANIA PROSTEJ Z PUNKTAMI DO NIEJ NALEŻĄCYMI	38
IZOMORFIZM MIĘDZY PŁASZCZYŻNĄ π_R A PŁASZCZYŻNĄ $\widehat{\pi_R^0}$	38
IZOMORFIZM MIĘDZY PŁASZCZYŻNĄ π_A A PŁASZCZYŻNĄ $\widehat{\pi_A^0}$	40
BIBLOGRAFIA	41

WSTĘP

Niniejsza praca traktuje o elementarnej płaskiej geometrii rzutowej. Celem pracy jest wyprowadzenie podstawowych własności aksjomatycznej teorii płaskiej geometrii rzutowej w oparciu o przyjęte aksjomaty oraz wskazanie związku płaskiej geometrii rzutowej z teorią płaskiej geometrii afinicznej.

Praca kierowana jest do Czytelników chcących zapoznać się z aksjomatycznym ujęciem płaskiej geometrii rzutowej, jak również do zainteresowanych różnymi teoriami geometrii. Została ona napisana w sposób elementarny, z myślą o szerokim gronie Czytelników, tak aby możliwym było zapoznanie się z jej treścią bez uprzedniego studiowania prac poświęconych geometrii rzutowej czy innej dziedziny matematyki. Wszystkie potrzebne definicje czy twierdzenia spoza geometrii rzutowej używane w rozważaniach są podane bezpośrednio w tekście lub zaopatrzone w odwołanie do odpowiedniej literatury.

Tekst został podzielony na cztery rozdziały. W Rozdziale 1 zapoznajemy Czytelnika ze sposobem konstruowania teorii aksjomatycznej, a także podajemy aksjomaty i podstawowe pojęcia teorii płaskiej geometrii rzutowej. Kolejny rozdział poświęcony jest omówieniu wybranych modeli reprezentujących teorię płaskiej geometrii rzutowej. Rozdział 3 zawiera wyprowadzenie podstawowych własności płaszczyzn rzutowych, w szczególności faktów dotyczących skończonych płaszczyzn rzutowych. Ostatni rozdział wskazuje na powiązanie teorii płaskiej geometrii rzutowej z teorią płaskiej geometrii afinicznej.

Czytelników zainteresowanych zagadnieniami poruszonymi w tej pracy zachęcamy do zapoznania się z pozycjami wskazanymi w bibliografii.

Autorka pracy składa szczególne podziękowania opiekunowi pracy Profesorowi. Jackowi Świątkowskiemu, za okazaną cierpliwość i wszelką pomoc podczas tworzenia niniejszej pracy.

1 AKSJOMATYKA PŁASKIEJ GEOMETRII RZUTOWEJ

Przed rozpoczęciem procesu konstruowania teorii płaskiej geometrii rzutowej wyodrębnimy kilka intuicyjnie zrozumiałych pojęć teorii, za pomocą których zbudujemy kolejne definicje. Określenia te uznamy za naturalne dla teorii płaskiej geometrii rzutowej, a posługiwać się nimi będziemy bez wyjaśnienia ich znaczenia. Pojęcia te nazwiemy *pojęciami pierwotnymi*.

Podobnie postąpimy ze stwierdzeni dotyczącymi płaskiej geometrii rzutowej, które wydają nam się oczywiste – te stwierdzenia przyjmiemy za pewniki i nazwiemy *aksjomatami*. Aksjomaty uznajemy za prawdziwe bez żadnych dowodów. Będziemy się nimi posługiwali dowodząc prawdziwości twierdzeń płaskiej geometrii rzutowej.

Dalsze definicje i twierdzenia będziemy tworzyli i dowodzili tylko za pomocą aksjomatów i pojęć pierwotnych, a także definicji i twierdzeń już wyprowadzonych czy udowodnionych.

1.1 PODSTAWOWE POJĘCIA GEOMETRII RZUTOWEJ

Do pojęć pierwotnych płaskiej geometrii rzutowej należą:

- 1) *punkty rzutowe*,
oznaczane wielkimi literami alfabetu łacińskiego: $A, B, C, D, \dots$
- 2) *proste rzutowe*,
oznaczane małymi literami alfabetu łacińskiego: $a, b, c, d, \dots$
- 3) *incydencja punktów i prostych rzutowych*, czyli relacja pomiędzy punktami $A, B, \dots$ oraz prostymi $a, b, \dots$, która dla pewnych par (A, a) zachodzi, zaś dla innych nie zachodzi.

1.1.1 UWAGA

Na opisanie relacji incydencji zachodzącej pomiędzy punktem A i prostą a będziemy używali równoważnych określeń: punkt A jest *incydenty* z prostą a / prosta a jest *incydentna* z punktem A / punkt A *leży* na prostej a / prosta a *przechodzi przez* punkt A . Jeśli dwie różne proste p i q są w incydencji z punktem P , to powiemy, że proste p i q *przecinają się* w punkcie P , a punkt P jest *punktem przecięcia* lub *punktem wspólnym* tych prostych. Jeśli prosta p jest w incydencji z dwoma różnymi punktami A i B , to powiemy, że p *łączy* A i B .

1.1.2 DEFINICJA

Zbiór wszystkich prostych rzutowych, które są w incydencji z pewnym ustalonym punktem rzutowym A nazywamy *pękiem* i oznaczamy przez A^* . Proste należące do jednego pęku nazywamy *współpękowymi*.

1.1.3 DEFINICJA

Zbiór wszystkich punktów rzutowych, które są w incydencji z pewną ustaloną prostą rzutową p nazywamy *łańcuchem* i oznaczamy przez p^* . Punkty należące do jednego łańcucha nazywamy *współliniowymi*.

1.2 AKSJOMATY PŁASKIEJ GEOMETRII RZUTOWEJ

Do aksjomatów płaskiej geometrii rzutowej należą następujące stwierdzenia:

AR1: *Przez każde dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.*

AR2: *Każde dwie różne proste przecinają się dokładnie w jednym punkcie.*

AR3: *Istnieją cztery różne punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe.*

Chciałoby się, aby zbiór aksjomatów danej teorii nie zawierał stwierdzeń zbędnych, czyli takich, które dałoby się udowodnić za pomocą pozostałych aksjomatów. Ponadto sensowność konstruowanej teorii podważałoby istnienie dwóch wzajemnie sprzecznych stwierdzeń w danej teorii. Dlatego postulowana jest niezależność i niesprzeczność zbioru aksjomatów, a tym samym niesprzeczność teorii na nich zbudowanej.

NIEZALEŻNOŚĆ AKSJOMATÓW

1.2.1 DEFINICJA

- a) Aksjomat $\mathcal{A}_i$ należący do zbioru aksjomatów $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\}$ nazywamy *niezależnym* od aksjomatów ze zbioru $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\} \setminus \{\mathcal{A}_i\}$, jeśli aksjomatu $\mathcal{A}_i$ nie można ani udowodnić, ani obalić za pomocą aksjomatów z $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n\} \setminus \{\mathcal{A}_i\}$.
- b) Układ aksjomatów $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ nazywamy *niezależnym*, jeśli każdy aksjomat $\mathcal{A}_i$ tego układu jest niezależny od pozostałych.

1.2.2 UWAGA

W celu uzasadnienia własności tworów czy twierdzeń teorii, a więc także stwierdzeń na temat aksjomatów, przeważnie posługujemy się zbiorami obiektów reprezentujących pojęcia pierwotne teorii. Obiekty te tworzą pewne konfiguracje, w których określa się relację incydencji.

1.2.3 FAKT

Układ aksjomatów AR1, AR2, AR3 płaskiej geometrii rzutowej jest niezależny.

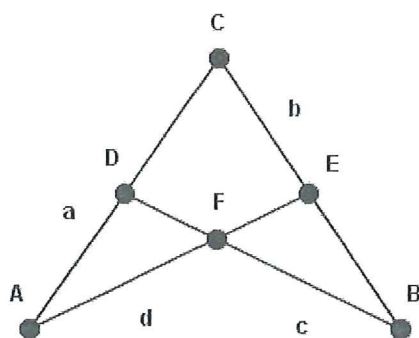
DOWÓD:

Zauważmy najpierw, że gdyby np. AR1 był zależny od AR2 i AR3, to wszystkie konfiguracje obiektów reprezentujących punkty i proste rzutowe z określoną relacją incydencji, spełniające AR2 i AR3, albo zawsze spełniałyby AR1 (gdyby AR1 był logiczną konsekwencją aksjomatów AR2 i AR3), albo zawsze nie spełniałyby AR1 (gdyby zaprzeczenie AR1 było logiczną konsekwencją AR2 i AR3).

Pokażemy zatem, że istnieją zarówno konfiguracje, w których zachodzą tylko dwa spośród aksjomatów AR1, AR2, AR3, a trzeci nie, jak i konfiguracje spełniające wszystkie trzy aksjomaty.

1° *Konfiguracja nie spełniająca AR1 (AR1 nie wynika z AR2 i AR3)*

Rozpatrzmy konfigurację jak na Rysunku 1.1, w której punkty rzutowe reprezentowane są przez punkty A, B, C, D, E, F , natomiast proste rzutowe – przez odcinki a, b, c, d , zaś relacja incydencji jest określona jak na zwykłej płaszczyźnie euklidesowej.



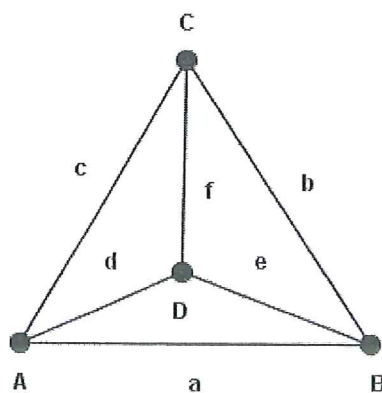
Rysunek 1.1

W konfiguracji tej:

- AR1 *nie jest* spełniony, gdyż np. przez punkty A i B nie przechodzi żadna prosta rzutowa.
- AR2 jest spełniony, gdyż jedynymi punktami przecięcia dla danych par prostych rzutowych to: dla a i b punkt C , dla a i c punkt D , dla a i d punkt A , dla b i c punkt B , dla b i d punkt E , dla c i d punkt F .
- AR3 jest spełniony, bo istnieje czwórka punktów, np. A, B, D, E , z których żadne trzy nie są współliniowe.

2° Konfiguracja nie spełniająca AR2 (AR2 nie wynika z AR1 i AR3)

Rozpatrzmy konfigurację jak na Rysunku 1.2, w której punktami rzutowymi są punkty A, B, C, D , a prostymi rzutowymi – odcinki a, b, c, d, e, f , natomiast relacja incydencji jest określona jak na płaszczyźnie euklidesowej.



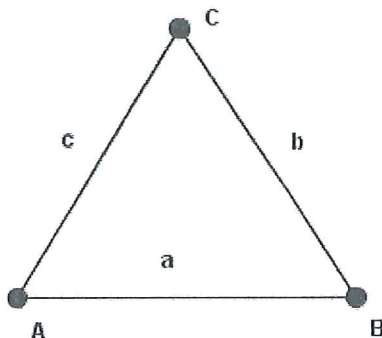
Rysunek 1.2

W konfiguracji tej:

- AR1 jest spełniony, gdyż jedynymi prostymi przechodzącymi przez dane dwa punkty to: dla punktów A i B prosta rzutowa a , dla A i C prosta c , dla A i D prosta d , dla B i C prosta b , dla B i D prosta e oraz dla C i D prosta f .
- AR2 *nie jest* spełniony, ponieważ proste rzutowe a i f nie przecinają się w żadnym punkcie.
- AR3 jest spełniony, gdyż istnieje czwórka punktów A, B, C, D , z których żadne trzy nie są współliniowe.

3° Konfiguracja nie spełniająca AR3 (AR3 nie wynika z AR1 i AR2)

Rozpatrzmy konfigurację jak na Rysunku 1.3, utworzoną z punktów rzutowych reprezentowanych przez punkty A, B, C oraz prostych rzutowych reprezentowanych przez odcinki a, b, c .



Rysunek 1.3

W tej konfiguracji:

- AR1 jest spełniony, gdyż jedynymi prostymi przechodzącymi przez dane dwa punkty to dla punktów A i B prosta a , dla A i C prosta c , dla B i C prosta b .
- AR2 jest spełniony, gdyż jedyne punkty przecięcia danych par prostych to dla a i b : punkt B , a i c : punkt A , b i c : punkt C .
- AR3 *nie* jest spełniony. W konfiguracji występują jedynie 3 różne punkty rzutowe, zatem nie może istnieć czwórka punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe.

Pokazaliśmy, że żaden z AR1, AR2, AR3 nie wynika z pozostałych aksjomatów.

Ostatnim krokiem dowodu jest wskazanie konfiguracji, w której spełnione są wszystkie trzy aksjomaty, co uzasadni, dlaczego zaprzeczenie żadnego z aksjomatów nie wynika z pozostałych pewników. Takie konfiguracje wskażemy w Rozdziale 2.

NIESPRZECZNOŚĆ AKSJOMATÓW

1.2.4 DEFINICJA

Teoria aksjomatyczna jest *niesprzeczna* jeśli nie jest możliwym udowodnienie pewnego stwierdzenia S i jednocześnie jego obalenia (tzn. udowodnienia prawdziwości jego zaprzeczenia).

Gdyby możliwym było wyprowadzenie pewnego stwierdzenia S z aksjomatów i jednocześnie jego obalenia, to nie istniałaby żadna konfiguracja punktów i prostych rzutowych spełniająca wszystkie aksjomaty, gdyż dla tej konfiguracji zarówno stwierdzenie S , jak i jego zaprzeczenie musiałoby być spełnione, co jest niemożliwe. W Rozdziale 2 podamy przykłady konfiguracji teorii płaskiej geometrii rzutowej spełniające wszystkie spośród aksjomatów AR1, AR2 i AR3, co automatycznie pokaże niesprzeczność podanego zbioru pewników.

2 MODELE PŁASKIEJ GEOMETRII RZUTOWEJ

Do tej pory posługiwaliśmy się konfiguracjami punktów i prostych na płaszczyźnie z relacją incydencji określoną jak na płaszczyźnie euklidesowej. Obiekty w tych konfiguracjach reprezentowały pojęcia pierwotne płaskiej geometrii rzutowej, jednak w konfiguracjach tych nie były spełnione wszystkie aksjomaty teorii. W tym rozdziale przypatrzmy się konfiguracjom, które w pełni realizują system aksjomatyczny płaskiej geometrii rzutowej, czyli stanowią szczególne *modele* teorii płaskiej geometrii rzutowej.

2.1 DEFINICJA

Modelem teorii nazywamy matematycznie opisany system, w którym pojęciom teorii przypisuje się konkretne obiekty matematyczne.

PRZYKŁAD. Powszechnie znanym modelem dwuwymiarowej geometrii euklidesowej jest płaszczyzna z prostokątnym układem współrzędnych, który wykorzystuje narzędzia algebry i analizy matematycznej do badania własności geometrycznych figur.

PRZYKŁAD. Zbiory punktów i odcinków na Rysunkach 1.1, 1.2 i 1.3 są modelami teorii płaskiej geometrii rzutowej.

2.2 DEFINICJA

Modele płaskiej geometrii rzutowej, w których spełnione są aksjomaty AR1, AR2 i AR3, nazwiemy *płaszczyznami rzutowymi*.

W niniejszej części pracy przyjrzymy się wybranym modelom reprezentującym płaszczyzny rzutowe.

2.1 STANDARDOWA PŁASZCZYŻNA RZUTOWA

Rozpatrzmy płaszczyznę euklidesową π wraz z punktami i prostymi do niej należącymi. Z własności geometrii euklidesowej wynika, że przez każde dwa punkty na płaszczyźnie przechodzi dokładnie jedna prosta (czyli AR1 jest spełniony) i można wskazać 4 punkty, z których żadne trzy nie są współliniowe (czyli spełniony jest AR3). Na płaszczyźnie π nie jest jednak spełniony AR2 z uwagi na nieprzecinające się proste równoległe. Zauważmy, że proste takie mają wspólny kierunek, który możemy potraktować jako nowy punkt. Pokażemy, że tak zmodyfikowana płaszczyzna jest płaszczyzną rzutową. Nazwiemy ją *standardową płaszczyzną rzutową*.

PODSTAWOWE POJĘCIA STANDARDOWEJ PŁASZCZYŻNY RZUTOWEJ

Pojęcia pierwotne w standardowej płaszczyźnie rzutowej zinterpretujemy następująco:

1) Punktami rzutowymi nazwiemy:

- a) punkty *właściwe*, czyli punkty płaszczyzny π ; ozn. $A, B, C, \dots$
- b) punkty *niewłaściwe* lub punkty w nieskończoności, czyli kierunki prostych na płaszczyźnie π ; kierunki prostych $a, b, c, \dots$ ozn. odpowiednio przez $(a), (b), (c), \dots$

2) Prostymi rzutowymi nazwiemy:

- a) proste *właściwe*, czyli proste na płaszczyźnie π z dołączonym kierunkiem; ozn. $a, b, c, \dots$

b) prostą *niewłaściwą*, czyli prostą składającą się ze wszystkich kierunków prostych na płaszczyźnie π ; ozn. $P\infty$.

3) Powiemy, że na płaszczyźnie rzutowej:

- a) punkt właściwy A i prosta właściwa a są w incydencji $\Leftrightarrow$ punkt A leży na prostej a w zwykłym sensie na płaszczyźnie euklidesowej π ,
- b) punkt niewłaściwy (a) i prosta właściwa p są w incydencji $\Leftrightarrow$ prosta p ma kierunek prostej a .

2.1.1 UWAGA

Prosta właściwa a składa się ze wszystkich punktów właściwych, jakie należały do oryginalnej prostej a na płaszczyźnie π i z nowego punktu będącego kierunkiem (a) tej prostej na płaszczyźnie euklidesowej. Do prostej niewłaściwej $P\infty$ nie należy żaden punkt właściwy.

SPEŁNIANIE AKSJOMATÓW W STANDARDOWEJ PŁASZCZYŹNIE RZUTOWEJ

2.1.2 FAKT

W standardowej płaszczyźnie rzutowej są spełnione aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej.

DOWÓD:

▪ SPEŁNIANIE AR1

W standardowej płaszczyźnie rzutowej prosta może łączyć dwa punkty różnego rodzaju – właściwe i niewłaściwe, dlatego rozważymy trzy możliwe przypadki, kiedy prosta przechodzi przez:

1° dwa różne punkty właściwe A i B

Na płaszczyźnie euklidesowej π przez każde dwa różne punkty A i B przechodzi dokładnie jedna prosta p . Po dodaniu do płaszczyzny π nowych punktów w nieskończoności, czyli kierunków prostych, relacja między punktami i prostymi właściwymi nie zmienia się, tzn. prosta p wciąż łączy punkty A i B . Przez te punkty nie może przechodzić żadna inna prosta właściwa, bo p była jedyną prostą łączącą A i B . Ponadto niemożliwym jest, aby przez punkty właściwe przechodziła prosta niewłaściwa, bo byłoby to niezgodne z interpretacją prostej rzutowej w tym modelu. Stąd na płaszczyźnie rzutowej przez dwa różne punkty właściwe przechodzi dokładnie jedna prosta.

2° dwa różne punkty niewłaściwe (a) i (b)

Na płaszczyźnie π każda prosta p posiada dokładnie jeden kierunek (p) , zatem na płaszczyźnie rzutowej prosta właściwa p przechodzi dokładnie przez jeden punkt niewłaściwy. Stąd żadna prosta właściwa nie łączy dwóch różnych punktów niewłaściwych. Wobec interpretacji prostej rzutowej dowolne dwa różne punkty niewłaściwe leżą na jednej prostej – prostej niewłaściwej $P\infty$ i jest to jedyna prosta łącząca punkty niewłaściwe (a) i (b) .

3° punkt właściwy A i punkt niewłaściwy (a)

Wobec Uwagi 2.1.1 prosta $P\infty$ przechodzi jedynie przez punkty niewłaściwe, dlatego prostych incydentnych z punktem właściwym A i niewłaściwym (a) szukamy wśród prostych właściwych. Z V postulatu Euklidesa wynika, że na płaszczyźnie π prosta przechodząca przez dany punkt A i posiadająca zadany kierunek (a) jest tylko jedna.

Wobec tego na płaszczyźnie rzutowej istnieje dokładnie jedna prosta właściwa będąca w incydencji z zadany­m punktem właściwym A i punktem niewłaściwym (a) .

▪ SPEŁNIANIE AR2

Jako, że na płaszczyźnie rzutowej istnieje tylko jedna prosta niewłaściwa, do rozpatrzenia pozostają dwie możliwości przecinania się prostych rzutowych:

1° dwie proste właściwe a i b

a) Proste przecinające się na płaszczyźnie π w punkcie P na płaszczyźnie rzutowej również przecinają się w tym punkcie. Nie mają one innych punktów wspólnych – jedynym dodatkowym punktem przecięcia mógłby być punkt niewłaściwy $(a) = (b)$, ich wspólny kierunek, jednak (a) jest różny od (b) . Stąd punkt P jest jedynym punktem przecięcia prostych a i b .

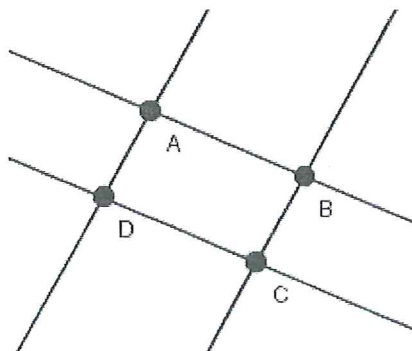
b) Proste nieprzecinające się na płaszczyźnie euklidesowej nie mają punktów wspólnych, ale posiadają wspólny kierunek $(a) = (b)$, więc na płaszczyźnie rzutowej przecinają się tylko w punkcie niewłaściwym $(a) = (b)$, a nie mają żadnego wspólnego punktu właściwego.

2° prosta właściwa a i prosta niewłaściwa $P\infty$

Każda prosta a na płaszczyźnie euklidesowej ma dokładnie jeden kierunek, więc na płaszczyźnie rzutowej przechodzi dokładnie przez jeden punkt niewłaściwy (a) , a co za tym idzie, przecina prostą $P\infty$ dokładnie w jednym punkcie. Wobec Uwagi 2.1.1 prosta właściwa nie ma z prostą $P\infty$ wspólnych punktów właściwych.

▪ SPEŁNIANIE AR3

Wystarczy rozważyć dwie różne pary prostych równoległych na płaszczyźnie π , jak na Rysunku 2.1. Żadne trzy spośród punktów właściwych A, B, C, D przecięcia tych prostych nie są współliniowe. Wobec tego AR3 jest spełniony w tym modelu.



Rysunek 2.1

Pokazaliśmy, że w standardowej płaszczyźnie rzutowej są spełnione wszystkie aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej, a więc jest ona płaszczyzną rzutową.

2.2 MODEL ŚRODKOWY I MODEL NA SFERZE

Rozważając standardową płaszczyznę rzutową należy być czujnym na typy punktów oraz prostych. Aby uniknąć problemu rozróżniania punktów i prostych na właściwe i niewłaściwe, zbudujmy nowy model, który zilustruje jednorodność tworów płaszczyzny rzutowej.

POJĘCIA PIERWOTNE W MODELU ŚRODKOWYM

Rozważmy trójwymiarową przestrzeń euklidesową z wyróżnionym punktem O , który nazwiemy *środkiem*. W przestrzeni tej zinterpretujemy pojęcia pierwotne płaskiej geometrii rzutowej następująco:

- 1) Punkt rzutowy to dowolna prosta w przestrzeni przechodząca przez środek O .
- 2) Prosta rzutowa to dowolna płaszczyzna w przestrzeni przechodząca przez środek O .
- 3) Punkt rzutowy P jest w incydencji z prostą rzutową $p \Leftrightarrow$ prosta reprezentująca punkt P zawiera się w płaszczyźnie reprezentującej prostą p w przestrzeni.

Model ten nazwiemy *modelem środkowym*.

SPEŁNIANIE AKSJOMATÓW W MODELU ŚRODKOWYM

2.2.1 FAKT

W modelu środkowym są spełnione aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej.

DOWÓD:

▪ SPEŁNIANIE AR1

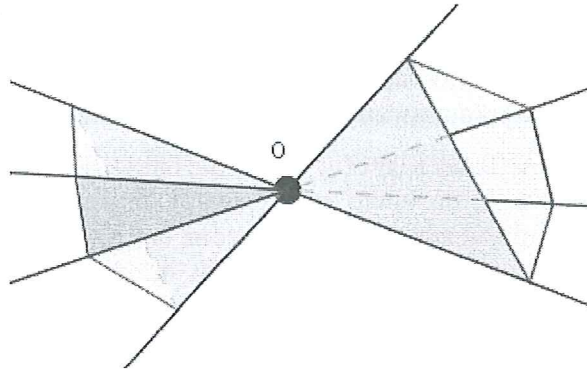
W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej dowolne dwie przecinające się proste rozpinają dokładnie jedną płaszczyznę. Proste te w modelu środkowym odpowiadają dwóm różnym punktom płaszczyzny rzutowej, a płaszczyzna rozpinana przez te proste – prostej rzutowej. Zatem w modelu środkowym przez każde dwa punkty rzutowe przechodzi dokładnie jedna prosta rzutowa.

▪ SPEŁNIANIE AR2

Dwie różne płaszczyzny w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej mogą albo być równoległe i nie posiadać punktów wspólnych, albo przecinają się wzdłuż wspólnej prostej - krawędzi. Zatem jeśli dwie różne płaszczyzny mają punkt wspólny, to mają też wspólną prostą. Stąd w płaszczyźnie rzutowej każde dwie różne proste rzutowe, reprezentowane przez przechodzące przez punkt O płaszczyzny z przestrzeni trójwymiarowej, przecinają się dokładnie w jednym punkcie rzutowym, reprezentowanym przez krawędź powyższych płaszczyzn w przestrzeni euklidesowej.

▪ SPEŁNIANIE AR3

Na Rysunku 2.2 zostały wskazane cztery niewspółliniowe punkty rzutowe. Dla przejrzystości rysunku zaznaczono jedynie fragmenty prostych rzutowych (obszary płaszczyzn zawarte między prostymi je wyznaczającymi).



Rysunek 2.2

Na mocy powyższych rozważań w modelu środkowym są spełnione aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej.

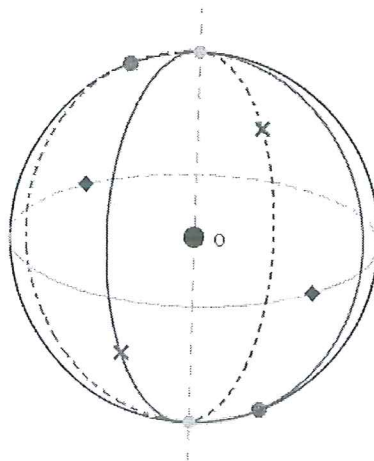
MODEL NA SFERZE

W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej rozważmy sferę S o środku w punkcie O . W modelu na sferze określamy pojęcia pierwotne następująco:

- 1) Punktami rzutowymi nazwiemy pary antypodycznych punktów na sferze S .
- 2) Prostymi rzutowymi nazwiemy okręgi wielkie sfery S .
- 3) Punkt P jest w incydencji z prostą $p \Leftrightarrow$ okrąg wielki reprezentujący prostą rzutową p przechodzi przez parę punktów antypodycznych reprezentujących punkt rzutowy P .

Uzasadnienie, że w modelu tym spełnione są aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej sprowadza się do rozważań z dowodu Faktu 2.2.1, przy czym każdy punkt rzutowy utożsamiamy z prostą w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej wyznaczającą parę punktów antypodycznych na sferze S , a każdą prostą rzutową tego modelu z płaszczyzną w trójwymiarowej przestrzeni, wyznaczającą na sferze S okrąg wielki.

Ilustrację modelu przedstawia Rysunek 2.3, na którym zaznaczono 3 punkty rzutowe i incydentne z nimi proste rzutowe.



Rysunek 2.3

2.2.2 UWAGA

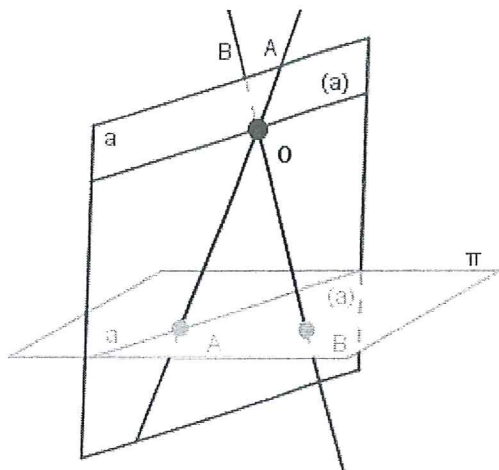
Standardowa płaszczyzna rzutowa, model środkowy oraz model na sferze są izomorficzne. Przyporządkowania wyznaczające izomorfizmy opisujemy poniżej.

IZOMORFIZM MODELU STANDARDOWEGO I MODELU ŚRODKOWEGO

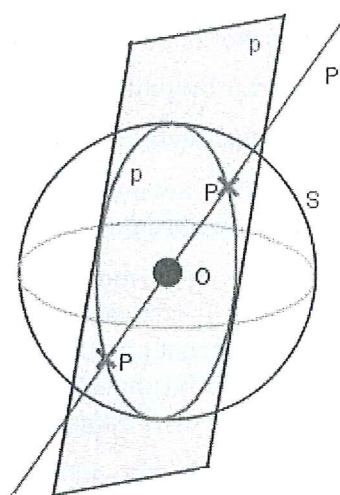
Płaszczyznę euklidesową π , na bazie której został zbudowany model standardowy (por. Podrozdział 2.1), umieszczamy w przestrzeni euklidesowej. Obieramy dowolny punkt O nie leżący na płaszczyźnie π . Izomorfizm między standardową płaszczyzną rzutową a modelem środkowym o środku w punkcie O określony jest przez następujące przyporządkowanie (por. Rysunek 2.4):

- o punkt właściwy $A \leftrightarrow$ prosta łącząca punkty A i O
- o punkt niewłaściwy $(a) \leftrightarrow$ prosta o kierunku (a) przechodząca przez punkt O
- o prosta właściwa $a \leftrightarrow$ płaszczyzna zawierająca prostą a i przechodząca przez punkt O
- o prosta niewłaściwa $P\infty \leftrightarrow$ płaszczyzna równoległa do płaszczyzny π przechodząca przez punkt O .

Łatwo zauważyć, że powyższe przyporządkowania są wzajemnie jednoznaczne. Ponadto relacja incydencji jest zachowana, co widać wprost z określenia przyporządkowania.



Rysunek 2.4



Rysunek 2.5

IZOMORFIZM MODELU ŚRODKOWEGO I MODELU NA SFERZE

Rozważmy opisany powyżej model środkowy o środku w punkcie O oraz sferę S o środku w punkcie O , użytą do opisu modelu na sferze. Izomorfizm pomiędzy tymi modelami opisuje następujące przyporządkowanie (por. Rysunek 2.5):

- o prosta P w przestrzeni przechodząca przez punkt $O \leftrightarrow$ para punktów antypodycznych będących miejscem przebiecia sfery S przez tę prostą
- o płaszczyzna p w przestrzeni przechodząca przez punkt $O \leftrightarrow$ okrąg wielki będący zbiorem punktów przecięcia tej płaszczyzny ze sferą S .

Łatwo zauważyć, że powyższe przyporządkowania są wzajemnie jednoznaczne, a relacja incydencji zostaje zachowana.

W następnym podrozdziale podamy przykłady parami nieizomorficznych płaszczyzn rzutowych.

2.3 MODEL $P^2(K)$

Rozważmy zbiór $K^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in K\}$, gdzie K jest dowolnym ciałem. Niech $O = \{(0, 0, 0)\}$. W tym rozdziale omówimy model, który oznaczymy przez $P^2(K) = K^3 \setminus O$.

PODSTAWOWE POJĘCIA W MODELU $P^2(K)$

Określmy w zbiorze $K^3 \setminus O$ relację $\sim$

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) &\sim (x_2, y_2, z_2) \\ &\Leftrightarrow \\ \text{istnieje stała } k &\in K \setminus \{0\}, \text{ taka że } x_1 = kx_2, y_1 = ky_2, z_1 = kz_2. \end{aligned}$$

2.3.1 FAKT

Relacja $\sim$ jest relacją równoważności.

DOWÓD:

Relacja $\sim$ spełnia warunki relacji równoważności.

a) *zwrotność*,

tzn. $(x, y, z) \sim (x, y, z)$.

Istnieje stała $k = 1$, dla której $x = 1x, y = 1y, z = 1z$.

b) *przechodność*,

tzn. jeśli $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ i $(x_2, y_2, z_2) \sim (x_3, y_3, z_3)$, to $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_3, y_3, z_3)$.

Jeśli $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$ oraz $(x_2, y_2, z_2) = (x_3, y_3, z_3)$, to istnieją stałe $m, n \in K \setminus \{0\}$, takie że $x_1 = mx_2, y_1 = my_2, z_1 = mz_2$ oraz $x_2 = nx_3, y_2 = ny_3, z_2 = nz_3$. Wówczas $x_1 = mnx_3, y_1 = mny_3, z_1 = mnz_3$, stąd $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_3, y_3, z_3)$ dla stałej $mn \in K \setminus \{0\}$.

c) *symetryczność*,

tzn. jeśli $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$, to $(x_2, y_2, z_2) \sim (x_1, y_1, z_1)$.

Jeśli $(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2)$, to dla pewnej stałej $k \in K \setminus \{0\}$ zachodzi: $x_1 = kx_2, y_1 = ky_2, z_1 = kz_2$. Ponieważ stała k jest niezerowa, zatem istnieje element odwrotny do k : $k^{-1} \in K \setminus \{0\}$, dla którego $x_2 = k^{-1}x_1, y_2 = k^{-1}y_1, z_2 = k^{-1}z_1$. Zatem $(x_2, y_2, z_2) \sim (x_1, y_1, z_1)$.

Wobec tego relacja $\sim$ jest relacją równoważności.

Rozpatrzmy zbiór wszystkich równań postaci $Ax + By + Cz = 0$, gdzie $(A, B, C) \in K^3 \setminus O$. Dla tego typu równań określamy relację $\approx$

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z = 0 &\approx A_2x + B_2y + C_2z = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \text{istnieje stała } k &\in K^3 \setminus \{0\}, \text{ taka że } A_1 = kA_2, B_1 = kB_2, C_1 = kC_2. \end{aligned}$$

2.3.2 FAKT

Relacja $\approx$ jest relacją równoważności.

DOWÓD tego faktu przebiega identycznie jak dowód Faktu 2.3.1, z tym, że zamieniamy oznaczenia (x, y, z) na (A, B, C) .

Zinterpretujmy teraz pojęcia pierwotne w modelu $P^2(K)$.

1) Punktem rzutowym nazwiemy dowolną klasę abstrakcji relacji $\sim$, czyli zbiór proporcjonalnych trójek $\{(ka, kb, kc): k \in K \setminus \{0\}\}$, przy czym (a, b, c) jest dowolną ustaloną trójką z $K^3 \setminus 0$.

2.3.3 UWAGA

Na oznaczenie punktu rzutowego będziemy używali zapisu

$$(a : b : c) = \{(ka, kb, kc): k \in K \setminus \{0\}\}.$$

Punkty $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$ są równe $\Leftrightarrow$ istnieje stała $c \in K \setminus \{0\}$, taka że $a_1 = cb_1, a_2 = cb_2, a_3 = cb_3$.

2) Prostą rzutową nazwiemy dowolną klasę abstrakcji relacji $\approx$, czyli zbiór proporcjonalnych równań $kAx + kBy + kCz = 0$, gdzie parametr $k \in K \setminus \{0\}$, przy czym (A, B, C) jest dowolną ustaloną trójką z $K^3 \setminus 0$.

2.3.4 UWAGA

Na oznaczenie prostej rzutowej reprezentowanej przez równanie $Ax + By + Cz = 0$ użyjemy zapisu

$$[A : B : C] = \{kAx + kBy + kCz = 0: k \in K \setminus \{0\}\}.$$

Zapis przy użyciu nawiasu kwadratowego $[a : b : c]$ pozwala odróżnić trójkę opisującą prostą rzutową od trójki $(a : b : c)$ opisującej punkt rzutowy.

3) Punkt rzutowy reprezentowany przez trójkę $(p : q : r)$ jest w incydencji z prostą rzutową reprezentowaną przez trójkę $[P : Q : R]$ wtedy i tylko wtedy gdy zachodzi

$$Pp + Qq + Rr = 0.$$

Relacja incydencji nie zależy od wyboru reprezentantów trójek opisujących punkt i prostą rzutową.

SPEŁNIANIE AKSJOMATÓW W MODELU $P^2(K)$

Do uzasadnienia, że w modelu $P^2(K)$ są spełnione aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej posłużymy się narzędziami algebry liniowej. W tym celu zdefiniujemy następujące pojęcia.

2.3.5 DEFINICJA

Iloczyn wektorowy dla trójek $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$, gdzie $a_i, b_i \in K$, wyraża się przez

$$\begin{aligned} A \times B &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_2, a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

2.3.6 DEFINICJA

Iloczyn skalarny dla trójek $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$, gdzie $a_i, b_i \in K$, wyraża się przez

$$A \circ B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

2.3.7 FAKT

W modelu $P^2(K)$ są spełnione aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej.

DOWÓD:

Rozważmy dwa różne punkty rzutowe $A = (a_1 : a_2 : a_3)$ i $B = (b_1 : b_2 : b_3)$. Dowód Faktu 2.3.7 wymaga wprowadzenia kilku lematów pomocniczych.

LEMAT POMOCNICZY 1

Dla dowolnych różnych trójek (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) , reprezentujących punkty rzutowe A i B , iloczyn wektorowy $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$ jest niezerowy.

UZASADNIENIE (nie wprost):

Założmy, że $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$.

Ponieważ współrzędne punktów A i B zgodnie z interpretacją punktu rzutowego w modelu $P^2(K)$ nie mogą być wszystkie zerowe, rozpatrzmy 3 przypadki ze względu na wartości współrzędnych punktu A .

1° *Dokładnie jedna współrzędna A jest niezerowa.*

Bez straty ogólności możemy założyć, że $a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = 0$.

Wówczas $(a_1, 0, 0) \times (b_1, b_2, b_3) = (0, -a_1 b_3, a_1 b_2)$, więc $-a_1 b_3 = 0$, zatem $b_3 = 0$, bo $a_1 \neq 0$. Ponadto $a_1 b_2 = 0$, zatem $b_2 = 0$, bo $a_1 \neq 0$. Stąd $B = (b_1, 0, 0)$, gdzie $b_1 \neq 0$. Ale wtedy $(a_1, 0, 0) = (a_1 b_1^{-1} b_1, 0, 0)$, więc punkty rzutowe A i B mają proporcjonalne współrzędne. Wobec Uwagi 2.3.1 otrzymujemy, że $A = B$, co przeczy założeniu o różności punktów.

2° *Dokładnie dwie współrzędne punktu A są niezerowe.*

Bez straty ogólności założmy, że $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, a_3 = 0$.

Wówczas $(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3, -a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$, wtedy $a_2 b_3 = 0$, zatem $b_3 = 0$, bo $a_2 \neq 0$ oraz $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Zachodzi więc jeden z poniższych przypadków:

- $b_1 = b_2 = 0$, ale wówczas sprzeczność z założeniem, że B nie ma wszystkich zerowych współrzędnych;
- $(a_1 b_1, a_2 b_1, 0) = (a_1 b_1, a_1 b_2, 0)$, stąd $(a_1, a_2, 0) = (a_1 b_1^{-1} b_1, a_1 b_1^{-1} b_2, 0)$, ale wtedy punkty rzutowe A i B mają proporcjonalne współrzędne, więc $A = B$, co przeczy założeniu, że $A \neq B$.

3° *Wszystkie trzy współrzędne punktu A są niezerowe.*

Mamy $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$, skąd $a_2 b_3 = a_3 b_2, a_3 b_1 = a_1 b_3, a_1 b_2 = a_2 b_1$, zatem $(a_1 b_1, a_1 b_2, a_1 b_3) = (a_1 b_1, a_2 b_1, a_3 b_1)$ co daje, że $A = B$ – sprzeczność z założeniem różności punktów rzutowych A i B .

Wobec powyższych rozważań iloczyn wektorowy $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$ dla dowolnych niezerowych różnych trójek wyznaczających punkty rzutowe.

LEMAT POMOCNICZY 2

Współrzędne (P, Q, R) iloczynu wektorowego $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$, wzięte za współczynniki równania $Px + Qy + Rz = 0$, wyznaczają prostą rzutową przechodzącą przez punkty A i B .

UZASADNIENIE:

Iloczyn wektorowy dla trójek opisujących punkty rzutowe A i B wyraża się przez

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1),$$

stąd równanie prostej rzutowej wyznaczonej przez $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$ przyjmuje postać

$$((a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)) \circ (x, y, z) = 0,$$

czyli

$$(a_2b_3 - a_3b_2)x + (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_1b_2 - a_2b_1)z = 0.$$

Współrzędne punktu A spełniają równanie tak znalezionej prostej rzutowej, mamy bowiem:

$$\begin{aligned} & ((a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)) \circ (a_1, a_2, a_3) = \\ & = (a_2b_3 - a_3b_2)a_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)a_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)a_3 = \\ & = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = \\ & = 0. \end{aligned}$$

Analogicznie pokazujemy incydencję punktu B i tak wyznaczonej prostej. Wobec Lematu Pomocniczego 1 iloczyn wektorowy $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$ jest niezerowy.

Tym samym pokazaliśmy, że iloczyn wektorowy $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$ wyznacza współczynniki prostej przechodzącej przez punkty A i B .

LEMAT POMOCNICZY 3

Prosta rzutowa wyznaczone przez $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$ jest jedyną prostą przechodzącą przez punkty rzutowe A i B .

UZASADNIENIE (nie wprost):

Założmy, że istnieje prosta rzutowa wyznaczona przez trójkę $[P:Q:R]$, taką że $[P:Q:R] \neq [a_2b_3 - a_3b_2 : a_3b_1 - a_1b_3 : a_1b_2 - a_2b_1]$, przechodząca przez punkty A i B . Wówczas współrzędne punktów A i B spełniają równanie prostej

$$Pa_1 + Qa_2 + Ra_3 = 0$$

$$Pb_1 + Qb_2 + Rb_3 = 0.$$

Traktując współczynniki prostej rzutowej P, Q, R jako niewiadome mamy do czynienia z układem dwóch równań liniowych z trzema niewiadomymi. Możemy go zamienić na układ kramerowski, traktując jedną ze zmiennych jako parametr¹. W tym przypadku jest to zawsze możliwe, gdyż na mocy Lematu Pomocniczego 1 co najmniej jedno z wyrażeń $a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1$ jest różne od zera. Bez straty ogólności założymy, że $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Wówczas jako parametr traktujemy niewiadomą R .

Układ przyjmuje postać

$$Pa_1 + Qa_2 = -Ra_3$$

$$Pb_1 + Qb_2 = -Rb_3$$

i rozwiązując go metodą wyznaczników otrzymujemy (dla wygody zapisu zamiast ba^{-1} stosujemy notację $\frac{b}{a}$)

¹ na mocy twierdzenia Kroneckera-Capellego

$$\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \\
W_P &= \begin{vmatrix} -Ra_3 & a_2 \\ -Rb_3 & b_2 \end{vmatrix} = R(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\
W_Q &= \begin{vmatrix} a_1 & -Ra_3 \\ b_1 & -Rb_3 \end{vmatrix} = R(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\
P &= \frac{W_P}{W} = \frac{R(a_2 b_3 - a_3 b_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\
Q &= \frac{W_Q}{W} = \frac{R(a_3 b_1 - a_1 b_3)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}
\end{aligned}$$

Zatem prosta rzutowa przechodząca przez punkty rzutowe A i B ma postać

$$\begin{aligned}
[P:Q:R] &= \\
&= \left[\frac{R(a_2 b_3 - a_3 b_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} : \frac{R(a_3 b_1 - a_1 b_3)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} : R \right] = \\
&= \left[\frac{R(a_2 b_3 - a_3 b_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} : \frac{R(a_3 b_1 - a_1 b_3)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} : \frac{R(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \right] = \\
&= [a_2 b_3 - a_3 b_2 : a_3 b_1 - a_1 b_3 : a_1 b_2 - a_2 b_1].
\end{aligned}$$

Otrzymaliśmy trójkę o współrzędnych proporcjonalnych do trójki wyznaczonej przez $(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$, która na mocy Lematu Pomocniczego 2 wyznacza współrzędne równania reprezentującego prostą rzutową przechodzącą przez punkty A i B . Wobec tego otrzymana trójka opisuje tę samą prostą rzutową – sprzeczność z założeniem o różności prostych przechodzących przez punkty rzutowe A i B .

Przechodzimy teraz do właściwego dowodu Faktu 2.7.3.

▪ SPEŁNIANIE AR1

Na mocy Lematu Pomocniczego 3 dla dowolnych dwóch różnych niezerowych punktów rzutowych A i B istnieje dokładnie jedna prosta przez nie przechodząca, a więc AR1 jest spełniony w modelu $\mathbf{P}^2(K)$.

▪ SPEŁNIANIE AR2

Rozważmy dwie różne proste rzutowe $a = [A_1:A_2:A_3]$ i $b = [B_1:B_2:B_3]$. Niech punktem przecięcia prostych rzutowych a i b będzie punkt rzutowy $P = (x:y:z)$. Wówczas

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0$$

$$B_1 x + B_2 y + B_3 z = 0.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań z trzema niewiadomymi x , y i z . Rozwiązujemy go analogicznie jak w dowodzie Lematu Pomocniczego 3. Podobnie jak w dowodzie Lematu Pomocniczego 1 jedno z wyrażeń $A_2 B_3 - A_3 B_2$, $A_3 B_1 - A_1 B_3$, $A_1 B_2 - A_2 B_1$ jest różne od zera – gdyby wszystkie trzy były równe zeru, prosta a byłaby równa prostej b .

Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymujemy współrzędne punktu P przecięcia prostych a i b

$$x = \frac{z(A_2B_3 - A_3B_2)}{(A_1B_2 - A_2B_1)}$$

$$y = \frac{z(A_3B_1 - A_1B_3)}{(A_1B_2 - A_2B_1)}$$

$$z = z.$$

Uzasadnienie, że punkt rzutowy $(A_2B_3 - A_3B_2 : A_3B_1 - A_1B_3 : A_1B_2 - A_2B_1)$ jest jedynym punktem przecięcia prostych a i b przebiega analogicznie do rozumowania zawartego w dowodzie Lematu Pomocniczego 3 o jedyności prostej rzutowej przechodzącej przez dwa różne punkty rzutowe.

Tym samym stwierdzamy spełnianie AR2 w modelu $P^2(K)$.

▪ SPEŁNIANIE AR3

Rozważmy czwórkę punktów rzutowych

$$A_1 = (1:1:0), A_2 = (0:1:1), A_3 = (-1:1:0), A_4 = (0:1:-1),$$

gdzie 1 jest elementem neutralnym względem mnożenia w ciele K . Łatwo wyliczyć, że

$$A_1 \times A_2 = [1:1:1], \quad A_1 \times A_3 = [0:0:1], \quad A_1 \times A_4 = [1:-1:-1]$$

$$A_2 \times A_3 = [-1:1:1], \quad A_2 \times A_4 = [1:0:0], \quad A_3 \times A_4 = [-1:-1:-1].$$

Żadne dwa iloczyny wektorowe nie mają proporcjonalnych współrzędnych, więc otrzymane proste są parami różne, zatem żadne trzy z podanych punktów nie są współliniowe.

Tym samym pokazaliśmy, że w modelu $P^2(K)$ są spełnione aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej, jest on zatem przykładem płaszczyzny rzutowej.

2.3.8 UWAGA

Przyjmując w modelu $P^2(K)$ za K ciało liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$, otrzymamy model płaszczyzny rzutowej izomorficzny z modelem środkowym opisanym w Rozdziale 2.2. W modelu $P^2(\mathbf{R})$:

- 1) punkty rzutowe są reprezentowane przez zbiory $\{(ka, kb, kc), k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$, gdzie $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, czyli są to proste przechodzące przez punkt $(0,0,0)$,
- 2) proste rzutowe są reprezentowane przez zbiory niezerowych rozwiązań równania $Ax + By + Cz = 0$, gdzie $(A, B, C) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, czyli są to płaszczyzny przechodzące przez punkt $(0,0,0)$,
- 3) punkt rzutowy P jest w incydencji z prostą rzutową p opisaną równaniem $Ax + By + Cz = 0 \Leftrightarrow$ dla każdej trójki $(x_p, y_p, z_p) \in P$ zachodzi $Ax_p + By_p + Cz_p = 0$, czyli prosta reprezentująca punkt rzutowy P zawiera się w płaszczyźnie reprezentującej prostą rzutową p .

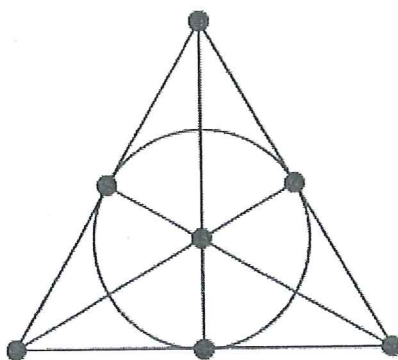
Dowód Faktu 2.3.7, przeprowadzony dla dowolnego ciała K , obejmuje również dowód faktu, że w modelu $P^2(\mathbf{R})$ są spełnione aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej.

Przyglądając się bliżej powyższym rozważaniom, nasuwa się pewne spostrzeżenie na temat istoty punktów i prostych rzutowych – uzasadnienia AR1 i AR2 są analogiczne, dokonujemy w nich jedynie zamiany niewiadomych z trójek opisujących proste na trójki opisujące punkty rzutowe. Sam opis punktu rzutowego jako zbioru proporcjonalnych trójek jest analogiczny do opisu prostej rzutowej, którą również w pewnym sensie opisuje zbiór proporcjonalnych trójek liczb.

Własność tę, dzięki której w stwierdzeniach na temat tworów płaszczyzny rzutowej możemy swobodnie zamieniać *punkty* z *prostymi* nazywamy *dualnością* płaszczyzny rzutowej i omówimy ją szerzej w Rozdziale 3.

2.4 PŁASZCZYZNA FANO

Niech Czytelnik zechce sam skonstruować płaszczyznę rzutową zaczynając od zaznaczenia 4 punktów, których istnienie gwarantuje AR3, łącząc je prostymi i dorysowując kolejne punkty do momentu, w którym w podanej konfiguracji będą spełnione również AR1 i AR2. Działania te powinny doprowadzić Czytelnika do konfiguracji siedmiu punktów rzutowych, widocznej na Rysunku 2.6.



Rysunek 2.6

Konfiguracja ta nosi nazwę płaszczyzny Fano². W następnym podrozdziale pokażemy, że płaszczyzna Fano jest płaszczyzną rzutową.

POJĘCIA PIERWOTNE NA PŁASZCZYZNIE FANO

Omówimy ten model traktując go jako trójkąt równoboczny z wyróżnionymi nań punktami. W modelu:

- 1) punkty rzutowe są reprezentowane przez wierzchołki trójkąta, środki jego boków oraz środek okręgu wpisanego w ten trójkąt
- 2) proste rzutowe są reprezentowane przez boki trójkąta, środkowe trójkąta oraz okrąg wpisany w ten trójkąt
- 3) relacja incydencji jest określona jak na zwykłej płaszczyźnie euklidesowej.

² Gino Fano (1871-1952) – matematyk włoski, zajmował się głównie geometrią rzutową i algebraiczną

SPEŁNIANIE AKSJOMATÓW NA PŁASZCZYŹNIE FANO

2.4.1 FAKT

Na płaszczyźnie Fano są spełnione aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej.

DOWÓD:

▪ SPEŁNIANIE AR1

W modelu rozróżniamy 3 rodzaje punktów, zatem rozpatrzmy następujące sytuacje:

- 1° dwa różne wierzchołki incydują z dokładnie jednym bokiem trójkąta i z żadnym innym rodzajem prostej,
- 2° dwa różne środki boków trójkąta są incydentne z dokładnie jedną prostą – okręgiem,
- 3° wierzchołek i środek boku incydują albo z jednym bokiem (jeśli jest to środek boku schodzącego się w danym wierzchołku) albo z jedną środkową (jeśli jest to środek boku nie schodzącego się w danym wierzchołku),
- 4° środek okręgu wpisanego w trójkąt i wierzchołek są incydentne z dokładnie jedną środkową, podobnie przez środek okręgu i środek boku przechodzi dokładnie jedna środkowa i żadna inna prosta z modelu.

Jak widać z rozważonych powyżej przypadków, przez dowolne dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta, czyli na płaszczyźnie Fano jest spełniony AR1.

▪ SPEŁNIANIE AR2

W modelu rozróżniamy 3 rodzaje prostych, zatem rozpatrzmy następujące sytuacje:

- 1° dwa różne boki trójkąta przecinają się dokładnie w jednym punkcie – wierzchołku,
- 2° dwie różne środkowe przecinają się dokładnie w jednym punkcie – środku okręgu wpisanego w trójkąt,
- 3° środkowa i inny bok trójkąta przecinają się w dokładnie jednym punkcie – środku boku,
- 4° okrąg przecina się z bokiem w dokładnie jednym punkcie – środku boku, a z każdą środkową również w dokładnie jednym punkcie – jednym ze środków boku.

Z powyższych rozważań widać, że każde dwie różne proste przecinają się dokładnie w jednym punkcie, czyli na płaszczyźnie Fano jest spełniony AR2.

▪ SPEŁNIANIE AR3

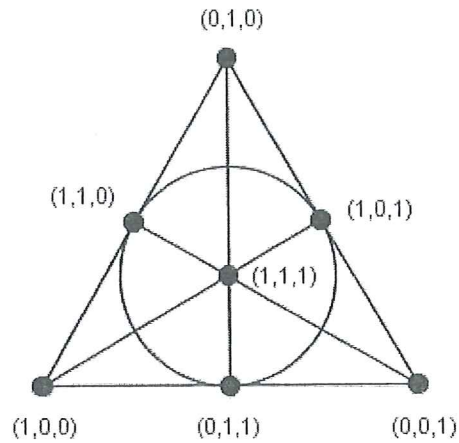
Wierzchołki trójkąta i środek okręgu wpisanego w trójkąt są czterema punktami, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, zatem w modelu jest spełniony AR3.

Tym samym wykazaliśmy, że na płaszczyźnie Fano są spełnione aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej – jest ona zatem płaszczyzną rzutową.

2.4.2 UWAGA

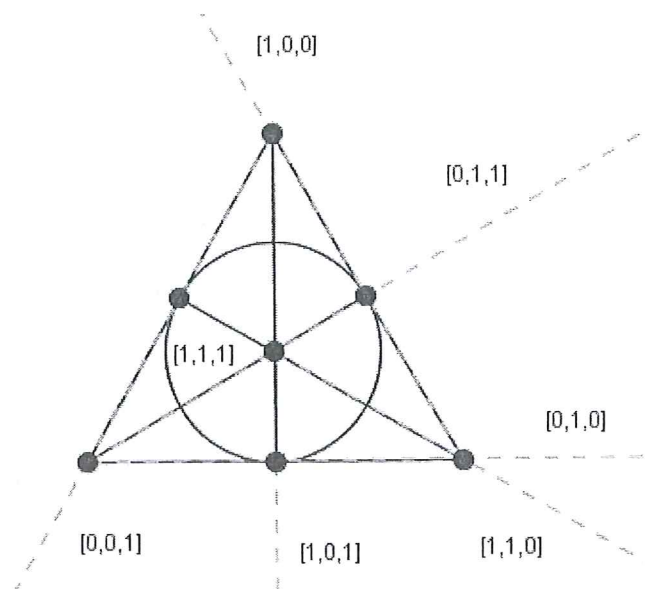
Płaszczyznę Fano możemy utożsamiać z modelem środkowym $P^2(K)$, gdzie $K = Z_2 = \{0,1\}$. Jedynym niezerowym elementem ciała Z_2 jest 1, stąd klasy abstrakcji relacji $\sim$ w tym przypadku są zbiorami jednoelementowymi i wyznaczają siedem trójek reprezentujących punkty płaszczyzny: $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$, rozmieszczonych jak na Rysunku 2.7.

Podobnie klasy abstrakcji relacji $\approx$ są zbiorami jednoelementowymi. Analogicznie otrzymujemy siedem klas równań reprezentujących proste na płaszczyźnie Fano (patrz Rysunek 2.8).



Rysunek 2.7

Łatwo sprawdzić, że punkty zaznaczone na Rysunku 2.7 są incydentne z odpowiednimi prostymi opisanymi na Rysunku 2.8 (proste podpisane na przedłużeniach).



Rysunek 2.8

2.4.3 UWAGA

Płaszczyzna Fano jest płaszczyzną rzutową o najmniejszej możliwej liczbie punktów rzutowych, czego dowiedzimy w Rozdziale 3.3.

3 WŁASNOŚCI PŁASZCZYZNY RZUTOWEJ

W rozdziale tym wyprowadzimy kilka własności płaszczyzn rzutowych oraz zależności między punktami i prostymi rzutowymi – w szczególności związki liczbowe między ilością punktów i prostych rzutowych.

3.1 ZASADA DUALNOŚCI

Zasada dualności orzeka, że każda definicja zachowuje swoją własność, a każde twierdzenie prawdziwość, jeśli konsekwentnie zamienimy w nich słowa: punkt $\rightarrow$ prosta, łańcuch $\rightarrow$ pęk, leży na $\rightarrow$ przechodzi przez (łączy), współliniowe $\rightarrow$ współpękowe.

Aby ustalić tę zasadę należy pokazać, że przyjęte aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej implikują stwierdzenia dualne do nich. Zauważmy, że w podanej w Podrozdziale 2.1 aksjomatyce AR1 i AR2 są do siebie dualne, co oznaczamy przez $AR1^d \equiv AR2$, $AR2^d \equiv AR1$, zatem nie trzeba udowadniać stwierdzeń dualnych do nich. Rzeczywiście, jeśli w równoważnym do podanego w Podrozdziale 2.1 sformułowaniu

AR1: *każde dwa różne punkty rzutowe łączy dokładnie jedna prosta rzutowa*

zamienimy słowo *punkt* ze słowem *prosta*, a czasownik *łączy* z *przecina się* w mamy

AR2: *każde dwie różne proste rzutowe przecinają się dokładnie w jednym punkcie rzutowym.*

Pozostaje wykazać, że z aksjomatów AR1, AR2, AR3 wynika stwierdzenie dualne do AR3:

AR3^d: *Istnieją cztery różne proste, z których żadne trzy nie są współpękowe.*

Niech A, B, C, D będą punktami zapewnionymi przez AR3. Poprowadźmy proste a, b, c, d przechodzące odpowiednio przez punkty AB, BC, CD i DA .

3.1.1 STWIERDZENIE

Żadne trzy spośród prostych a, b, c, d nie są współpękowe.

UZASADNIENIE:

Założmy nie wprost, że pewne trzy proste spośród prostych a, b, c, d są współpękowe. Bez straty ogólności założmy, że są to proste a, b i c . Ponieważ na mocy AR1 jedynym punktem przecięcia prostych a i b jest punkt B , a jedynym punktem przecięcia prostych b i c jest punkt C , to proste a i c muszą przecinać się w tym samym punkcie, wobec czego $B = C$, co jest sprzeczne z założeniami AR3 o różności punktów A, B, C, D .

Tym samym pokazaliśmy, że zasada dualności obowiązuje na dowolnej płaszczyźnie rzutowej.

Dzięki zasadzie dualności mając dane pewne stwierdzenia S i jego dowód, możemy automatycznie napisać stwierdzenie do niego dualne S^d , którego dowodem będzie mechaniczne przepisanie rozumowania uzasadniającego S , w którym zostaną dokonane odpowiednie zamiany terminów, o których mowa na początku podrozdziału.

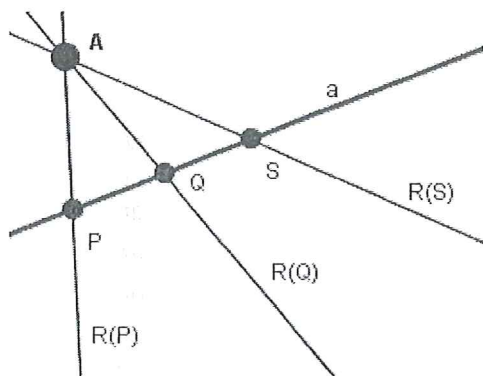
Wobec tego w dalszych rozważaniach na temat własności płaszczyzny rzutowej definicje i twierdzenia zostaną podane w dwóch dualnych postaciach, przy czym w przypadku twierdzeń udowodniona zostanie jedna część, a drugą – dualną – uznamy za prawdziwą na mocy zasady dualności.

3.2 PRZEKSZTAŁCENIE RZUTOWE

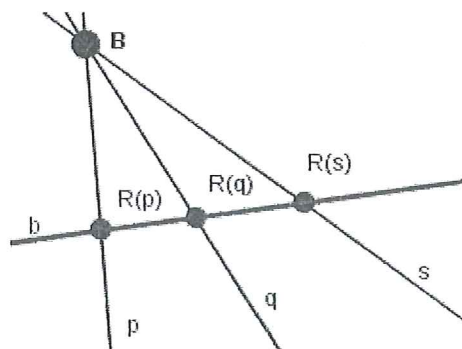
3.2.1 DEFINICJA

i) Dana jest prosta rzutowa a oraz punkt rzutowy A nie leżący na niej. Wówczas rzutem łańcucha a^* na pęk A^* nazywamy przekształcenie $R: a^* \rightarrow A^*$, takie że rzut $R(P)$ punktu P jest jedyną prostą w pęku A^* incydentną z punktem P (patrz Rysunek 3.1).

ii) Dany jest punkt B i prosta b nie będąca w incydencji z tym punktem. Wówczas rzutem pęku B^* na łańcuch b^* nazywamy przekształcenie $R: B^* \rightarrow b^*$, takie że rzut $R(p)$ prostej p jest jedynym punktem w łańcuchu b^* należącym do prostej p (patrz Rysunek 3.2).



Rysunek 3.1



Rysunek 3.2

3.2.2 UWAGA

Zauważmy, że rzut R jest dobrze zdefiniowanym przekształceniem wzajemnie jednoznacznym: każdy punkt P należący do łańcucha a^* , na mocy AR1, jest przekształcany na dokładnie jedną prostą zawierającą ten punkt i punkt A , natomiast AR2 zapewnia istnienie i jednoznaczność przyporządkowania prostym z pęku A^* punktów z łańcucha a^* . Przekształceniem odwrotnym do rzutu łańcucha a^* na pęk A^* jest rzut pęku A^* na łańcuch a^* .

3.2.3 DEFINICJA

Złożenie dowolnej skończonej liczby rzutów nazywamy *przekształceniem rzutowym*.

3.2.4 UWAGA

Każde przekształcenie rzutowe, jako złożenie skończonej liczby bijekcji, jest bijekcją. Ponadto odwzorowanie odwrotne do przekształcenia rzutowego jest rzutowe.

3.2.5 TWIERDZENIE

- i) Dla dowolnych różnych prostych rzutowych a i b istnieje przekształcenie rzutowe R przeprowadzające łańcuch a^* na łańcuch b^* .
- ii) Dla dowolnych różnych punktów A i B istnieje przekształcenie rzutowe R' przeprowadzające pęk A^* na pęk B^* .

Do udowodnienia Twierdzenia 3.2.5 wykorzystamy następujący lemat:

LEMAT POMOCNICZY

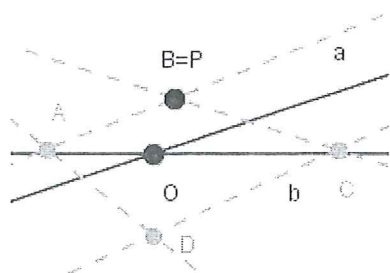
Dla dowolnych dwóch różnych prostych rzutowych a i b istnieje punkt nie należący do żadnej z nich.

UZASADNIENIE:

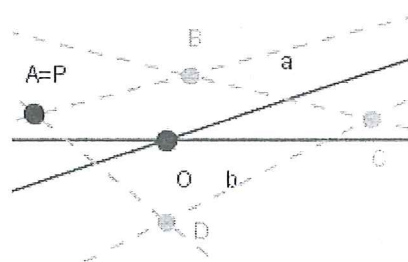
- 1) Wobec AR2 proste a i b przecinają się dokładnie w jednym punkcie O .
- 2) Wobec AR3 istnieją 4 punkty A, B, C, D , z których żadne trzy nie są współliniowe.
- 3) Wobec 2) istnieje punkt rzutowy P nieincydenty ani z prostą rzutową a , ani z b .
Taki punkt P istnieje niezależnie od położenia punktów A, B, C, D względem prostych a i b . Rozpatrzmy dwa istotnie różne przypadki:

1° co najmniej jeden z punktów A, B, C, D nie leży ani na prostej a ani na prostej b

W tym przypadku za punkt P obieramy jeden z nieincydentnych z prostymi punktów, tak jak – przykładowo – na Rysunkach 3.3 i 3.4



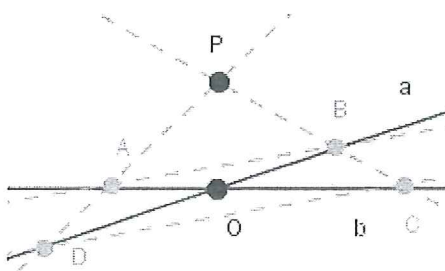
Rysunek 3.3



Rysunek 3.4

2° wszystkie punkty A, B, C, D leżą na prostych a i b

Żadne trzy spośród punktów A, B, C, D nie są współliniowe, zatem na każdej z prostych a i b leżą dokładnie dwa spośród punktów A, B, C, D . Bez straty ogólności możemy założyć, że zachodzi sytuacja jak na Rysunku 3.5.



Rysunek 3.5

Na mocy AR1 przez punkty A, D i przez punkty B, C przechodzą proste, które na mocy AR2 przecinają się dokładnie w jednym punkcie P . Punkt P nie może leżeć ani na prostej a ani na prostej b , bo wówczas odpowiednio punkty A, B, D lub A, B, C byłyby współliniowe, co przeczyłoby AR3. Stąd punktem nieincydentnym z prostymi a i b jest punkt P .

Wobec powyższych rozważań dla dowolnych dwóch prostych rzutowych istnieje punkt nieincydenty z żadną z nich. Stąd łatwo wynika wniosek:

WNIOSEK POMOCNICZY

Dla dowolnej prostej rzutowej p istnieje punkt P nie należący do prostej p .

Przejdziemy teraz do dowodu właściwego Twierdzenia 3.2.5.

DOWÓD:

i) Wobec Lematu Pomocniczego istnieje punkt P nieincydentny z prostymi a i b . Niech $R_1: a^* \rightarrow P^*$, $R_2: P^* \rightarrow b^*$ będą rzutami. Wówczas $R = R_2 R_1: a^* \rightarrow b^*$ jest żądanym przekształceniem rzutowym.

ii) Istnienie przekształcenia dowolnego pęku na inny dowolny pęk stwierdzamy na mocy zasady dualności.

Tym samym pokazaliśmy, że istnieje przekształcenie dowolnego łańcucha/pęku na dowolny inny łańcuch/pęk.

3.2.6 TWIERDZENIE

Dla dowolnej prostej rzutowej a i dowolnego punktu rzutowego A istnieje przekształcenie rzutowe R łańcucha a^ na pęk A^* .*

DOWÓD:

Rozpatrzmy dwa przypadki incydencji punktu A z prostą a .

1° punkt A nie jest incydentny z prostą a

Przekształceniem, o którym mowa w twierdzeniu, jest rzut $R: a^* \rightarrow A^*$.

2° punkt A jest incydentny z prostą a

Wobec Wniosku Pomocniczego istnieje punkt P nieincydentny z prostą a . Niech $R_1: a^* \rightarrow P^*$ będzie rzutem. Wobec Twierdzenia 3.2.5ii) istnieje rzut $R_2: P^* \rightarrow A^*$. Złożenie $R_2 R_1: a^* \rightarrow A^*$ jest przekształceniem, o którym mowa w twierdzeniu.

Tym samym pokazaliśmy istnienie przekształcenia dowolnego łańcucha/pęku na dowolny pęk/łańcuch.

3.2.7 UWAGA

Zauważmy, że twierdzenie dualne do Twierdzenia 3.2.6 jest tym samym twierdzeniem, czyli Twierdzenie 3.2.6 jest *samo-dualne*.

Pokazaliśmy, że możliwym jest przekształcenie dowolnego pierwotnego tworu płaszczyzny rzutowej w inny dowolny twór, co tym samym zaciera różnice między punktami i prostymi rzutowymi, dlatego możemy traktować je równoprawnie.

3.3 LICZNOŚCI PĘKÓW I ŁAŃCUCHÓW

Z rozważań nad przekształceniami rzutowymi przedstawionymi w Podrozdziale 3.2 wysnuwamy następujący wniosek:

3.3.1 WNIOSEK

Liczba punktów we wszystkich łańcuchach i liczba prostych we wszystkich pękach jest taka sama.

DOWÓD:

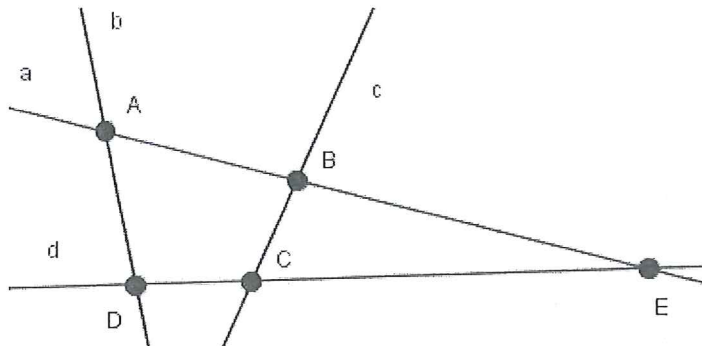
Odwzorowaniem ustalającym równoliczność dowolnych dwóch różnych pęków, dowolnych dwóch różnych łańcuchów czy dowolnego pęku z dowolnym łańcuchem jest przekształcenie rzutowe, które na mocy Twierdzeń 3.2.5 i 3.2.6 istnieje dla dowolnych punktów i prostych rzutowych, wyznaczonych przez dane pęki i łańcuchy.

3.3.2 TWIERDZENIE

- i) *Do każdej prostej rzutowej należą co najmniej 3 różne punkty rzutowe.*
- ii) *Przez każdy punkt rzutowy przechodzą co najmniej 3 różne proste rzutowe.*

DOWÓD:

i) Niech A, B, C, D, a, b, c, d będą punktami i prostymi rzutowymi zapewnionymi przez AR3, w konfiguracji przedstawionej na Rysunku 3.6. Wobec AR2 istnieje punkt rzutowy E przecięcia prostych rzutowych a i d (patrz Rysunek 3.6).



Rysunek 3.6

Punkt E nie może być żadnym z punktów A, B, C i D , bo gdyby był jednym z nich, odpowiednio punkty A, C, D lub B, C, D lub A, B, C lub A, B, D byłyby współliniowe, co przeczyłoby AR3. Zatem na prostej rzutowej a leżą trzy różne punkty rzutowe A, B, E .

Wobec Wniosku 3.3.1 na dowolnej prostej leży tyle samo punktów, co na prostej a , stąd do dowolnej prostej rzutowej należą co najmniej 3 różne punkty rzutowe.

ii) Prawdziwość drugiej części Twierdzenia 3.3.2 stwierdzamy na mocy zasady dualności.

3.3.3 TWIERDZENIE

W dowolnym modelu płaszczyzny rzutowej, jeśli liczba punktów na prostej a wynosi $n + 1$ (ozn. $|a^| = n + 1$), to liczba wszystkich punktów rzutowych w modelu jest równa $n^2 + n + 1$.*

DOWÓD:

Niech, na mocy Wniosku 3.3.1, dla dowolnej prostej a i dowolnego punktu A na płaszczyźnie rzutowej zachodzi równość $|a^*| = |A^*| = n + 1$.

FAKT POMOCNICZY

Każdy punkt $P \neq A$ jest w incydencji z dokładnie jedną prostą $p \in A^*$.

UZASADNIENIE (nie wprost)

Załóżmy nie wprost, że istnieje prosta $q \in A^*$ będąca w incydencji z punktem P i różna od prostej p . Wówczas punkty P i A są punktami wspólnymi prostych p i q , więc wobec AR2 musi zachodzić $P = A$, co przeczy założeniu. Ponadto punkt P musi być w incydencji z pewną prostą z pęku A^* , bo gdyby nie był, przez punkt P i punkt A nie przechodziłaby żadna prosta, co przeczyłoby AR1.

Wobec Faktu Pomocniczego każdy punkt płaszczyzny rzutowej różny od A jest w incydencji z dokładnie jedną prostą z danego pęku A^* . Ponadto każdy z łańcuchów prostych z pęku A^* incyduje z n punktami różnymi od A i punktem A , który jest punktem wspólnym dla nich wszystkich. Zatem liczba wszystkich punktów na płaszczyźnie rzutowej wynosi

$$(n + 1)n + 1 = n^2 + n + 1.$$

3.3.4 WNIOSEK

W dowolnym modelu płaszczyzny rzutowej zbiór punktów rzutowych jest równoliczny ze zbiorem prostych rzutowych.

DOWÓD:

Na mocy zasady dualności i Twierdzenia 3.3.3 mamy, że jeśli liczba prostych w dowolnym pęku A^* wynosi $k + 1$, to liczba wszystkich prostych rzutowych modelu jest równa $k(k + 1) + 1$. Zatem jeśli dla dowolnego łańcucha $|a^*| = n + 1$ oraz dla dowolnego pęku $|A^*| = k + 1$, to na mocy Wniosku 3.3.1 zachodzi $|a^*| = |A^*|$, czyli $n = k$, więc również $n^2 + n + 1 = k^2 + k + 1$. Zatem liczba punktów rzutowych jest równa liczbie prostych rzutowych na płaszczyźnie rzutowej.

3.3.5 WNIOSEK

Płaszczyzna Fano jest modelem płaszczyzny rzutowej o najmniejszej możliwej liczbie punktów i prostych rzutowych.

DOWÓD:

Wobec Twierdzenia 3.3.2 najmniejszą możliwą liczbą punktów na prostej rzutowej jest liczba 3. Na mocy Twierdzenia 3.3.3 dla $n = 2$, liczba wszystkich punktów na płaszczyźnie wynosi co najmniej 7. Na mocy Wniosku 3.3.4 prostych rzutowych jest tyle samo, ile punktów rzutowych na płaszczyźnie. Nie istnieje zatem płaszczyzna o mniejszej liczbie punktów i prostych niż 7. Płaszczyzna Fano składa się z dokładnie 7 punktów i 7 prostych, jest zatem płaszczyzną o najmniejszej możliwej liczbie punktów i prostych rzutowych.

3.3.6 UWAGA

Zauważmy, że płaszczyzny rzutowe o skończonej liczbie punktów w łańcuchu składają się ze skończonej liczby punktów i prostych. Takie płaszczyzny nazywamy *skończonymi płaszczyznami rzutowymi*. Fakty związane z liczbami prostych i punktów na płaszczyźnie wyprowadzone w Rozdziale 3.3 zależne od skończonej liczby n stosują się do płaszczyzn skończonych.

3.4 MOŻLIWE I NIEMOŻLIWE PŁASZCZYZNY RZUTOWE

3.4.1 DEFINICJA

Niech $n + 1$ będzie liczbą punktów w dowolnym łańcuchu na płaszczyźnie rzutowej. Liczbę n nazywamy *rzędem płaszczyzny rzutowej*.

3.4.2 TWIERDZENIE

Istnieją płaszczyzny rzutowe rzędu p^k , gdzie p jest liczbą pierwszą, a k liczbą naturalną.

DOWÓD:

Dla dowolnej liczby pierwszej p i dowolnej liczby naturalnej k istnieje ciało K , takie że $|K| = p^k$ [9]. Zbudujmy model $P^2(K)$, jak w Podrozdziale 2.3. Zauważmy, że wszystkich możliwych niezerowych trójek (a, b, c) o współczynnikach z ciała K jest $p^{3k} - 1$. Pamiętając o tym, że punkt rzutowy jest reprezentowany przez zbiór proporcjonalnych trójek, otrzymujemy, że liczba punktów rzutowych jest równa:

$$\begin{aligned} & (p^{3k} - 1)/(p - 1) = \\ & = (p - 1)(p^{2k} + p^k + 1)/(p - 1) = \\ & = p^{2k} + p^k + 1. \end{aligned}$$

Wobec Twierdzenia 3.3.3 dla płaszczyzny rzutowej rzędu n liczba prostych/punktów na płaszczyźnie wynosi $n^2 + n + 1$. W niniejszym przypadku $n = p^k$, wobec czego rząd płaszczyzny $P^2(K)$ wynosi p^k , co daje tezę.

3.4.3 UWAGA

Dla wszystkich dotychczas znanych skończonych płaszczyzn rzutowych rząd płaszczyzny rzutowej n jest potęgą pewnej liczby pierwszej.

Okazuje się, że nie każda liczba naturalna $n \geq 2$ może być rzędem płaszczyzny rzutowej. Jednym z najbardziej znanych twierdzeń dotyczących rzędu skończonej płaszczyzny rzutowej jest następujące twierdzenie Brucka-Rysera [1]:

3.4.4 TWIERDZENIE

Jeśli istnieje płaszczyzna rzutowa rzędu n , gdzie $n \equiv 1$ lub $2 \pmod{4}$, wówczas istnieją liczby naturalne x, y , takie że $n = x^2 + y^2$.

Z pomocą Twierdzenia 3.4.2 oraz Twierdzenia 3.4.4 łatwo sprawdzić, że istnieją płaszczyzny rzutowe rzędu: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, natomiast niemożliwym jest skonstruowanie płaszczyzny rzutowej np. rzędu 6. Fakt nieistnienia płaszczyzny rzutowej rzędu $n = 6$ został pierwotnie udowodniony jako rozwiązanie problemu Eulera³ o 36 oficerach [8].

Przypadek dla $n = 10$ nie jest rozstrzygalny za pomocą Twierdzenia 3.4.2, ponieważ 10 nie jest potęgą liczby pierwszej, ani za pomocą Twierdzenia 3.4.4, gdyż $10 \equiv 2 \pmod{4}$, ale jednocześnie $10 = 3^2 + 1^2$. Nieistnienie płaszczyzny rzutowej rzędu 10 wykazano za pomocą potężnych obliczeń komputerowych [5][6].

Problem konstruowalności płaszczyzn rzutowych wyższych rzędów wciąż pozostaje otwarty.

3.4.5 UWAGA

Wiadomo, że płaszczyzny rzutowe rzędów $n = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ są izomorficzne z płaszczyznami $P^2(K)$, gdzie $|K| = n$ odpowiednio, przy czym istnieje dokładnie jedno co do izomorfizmu ciało K o n elementach. Znana jest płaszczyzna rzutowa rzędu $n = 9$ izomorficzna z modelem $P^2(K)$, a także trzy inne parami nieizomorficzne płaszczyzny rzędu $n = 9$, które nie są izomorficzne z modelem $P^2(K)$ [7]. Płaszczyzna rzędu $n = 11$ jest izomorficzna z $P^2(K)$, gdzie $|K| = 11$, aczkolwiek nie wyklucza się istnienia innych takich płaszczyzn rzędu 11, które nie są izomorficzne z powyższym modelem.

³ Leonhard Euler (1707-1783) – matematyk i fizyk szwajcarski

4 PŁASZCZYZNA RZUTOWA A PŁASZCZYZNA AFINICZNA

W niniejszym rozdziale podamy aksjomatykę i pojęcia pierwotne teorii płaszczyzny afinicznej. Ponadto zbadamy związek między płaszczyznami rzutowymi a płaszczyznami afinicznymi. W szczególności przyjrzymy się konstrukcji płaszczyzny afinicznej z płaszczyzny rzutowej poprzez usunięcie pewnej prostej wraz z punktami z nią incydującymi oraz konstrukcji płaszczyzny rzutowej z płaszczyzny afinicznej poprzez dodanie nowych punktów i prostej z nich się składającej. Ponadto w Podrozdziale 4.4 pokażemy, że operacje dodawania i usuwania prostej są w pewnym sensie operacjami odwrotnymi.

4.1 AKSJOMATYKA I PODSTAWOWE POJĘCIA PŁASZCZYZNY AFINICZNEJ

POJĘCIA PIERWOTNE TEORII PŁASZCZYZNY AFINICZNEJ

- 1) *punkt*
- 2) *prosta*
- 3) *relacja incydencji dla par punktów i prostych.*

4.1.1. UWAGA

Do określenia relacji incydencji pomiędzy punktem a prostą będziemy używali terminologii stosowanej dotychczas (por. Uwaga 1.1.1).

AKSJOMATY TEORII PŁASZCZYZNY AFINICZNEJ⁴

AA1: *Przez dwa dowolne różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta.*

AA2: *Na każdej prostej leżą co najmniej dwa różne punkty.*

AA3: *Istnieją trzy punkty nie leżące na tej samej prostej.*

AA4: *Dla dowolnej prostej n i dowolnego punktu P nie leżącego na tej prostej istnieje dokładnie jedna prosta m przechodząca przez punkt P i nie przecinająca prostej n .*

4.1.2. DEFINICJA

Płaszczyznę afiniczną nazwiemy modelem teorii płaszczyzny afinicznej spełniający wszystkie aksjomaty AA1, AA2, AA3, AA4 tej teorii.

POJĘCIE RÓWNOLEGŁOŚCI

Zdefiniujemy ważne pojęcie teorii płaszczyzny afinicznej, jakim jest *równoległość*.

4.1.3. DEFINICJA

Prosta a jest *równoległa* do prostej b (ozn. $a \parallel b$) wtedy, gdy $a = b$ lub gdy proste a i b nie mają punktów wspólnych.

4.1.4. FAKT

Relacja równoległości jest relacją równoważności.

⁴ porównaj z [2], ss. 195,209

DOWÓD:

Pokażemy, że relacja równoległości spełnia warunki relacji równoważności. Niech a, b, c będą dowolnymi prostymi na płaszczyźnie afinicznej.

a) *zwrotność, tzn. dla dowolnej prostej zachodzi $a||a$.*

Dowolna prosta a jest równoległa sama do siebie, co wynika wprost z Definicji 4.1.3.

b) *symetryczność, tzn. jeśli $a||b$, to $b||a$.*

Jeśli $a||b$ dla $a \neq b$, to prosta a nie ma punktów wspólnych z prostą b , zatem również prosta b nie ma punktów wspólnych z prostą a , stąd $b||a$. Dla $a = b$ mamy sytuację trywialną.

c) *przechodniość, tzn. jeśli $a||b$ oraz $b||c$, to $a||c$.*

Założmy, że proste a, b, c są parami różne. Założmy nie wprost, że prosta a nie jest równoległa do prostej c i przecina ją w punkcie P . Z założenia o równoległości i różności prostych a i b wynika, że punkt P nie leży na prostej b . Wobec AA4 mamy, że przez punkt P nie leżący na prostej b przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do prostej b . Wobec założeń przez ten punkt przechodzą dwie różne proste a i c równoległe do b – sprzeczność z założeniem o nierównoległości prostych a i c .

Przypadek, kiedy dwie lub wszystkie spośród prostych a, b, c , są sobie równe sprowadza się do trywialnych sytuacji.

Wobec powyższych rozważań relacja równoległości jest relacją równoważności.

4.1.5. DEFINICJA

Klasy abstrakcji relacji równoległości nazywamy *kierunkami*.

4.1.6. UWAGA

Klasy abstrakcji relacji równoważności są parami rozłącznymi zbiorami. Stąd każda prosta na płaszczyźnie afinicznej ma dokładnie jeden kierunek.

4.2 KONSTRUKCJA PŁASZCZYZNY AFINICZNEJ Z PŁASZCZYZNY RZUTOWEJ

Rozważmy dowolną płaszczyznę rzutową π_R ze zbiorami punktów rzutowych PKT_{π_R} i prostych rzutowych PR_{π_R} . Wybieramy dowolną prostą p ze zbioru PR_{π_R} i usuwamy ją z płaszczyzny razem ze wszystkimi punktami należącymi do łańcucha p^* .

4.2.1 FAKT

Operacja usunięcia dowolnej ustalonej prostej $p \in PR_{\pi_R}$ z płaszczyzny rzutowej π_R powoduje usunięcie z każdej prostej $q \in PR_{\pi_R} \setminus \{p\}$ dokładnie jednego punktu.

DOWÓD:

Niech q będzie dowolną prostą ze zbioru $PR_{\pi_R} \setminus \{p\}$. Na mocy AR2 na płaszczyźnie π_R prosta q przecinała prostą p dokładnie w jednym punkcie $Q \in p^*$. Ponieważ z płaszczyzny π_R zostaje usunięta tylko prosta p wraz z punktami do niej należącymi, z prostej q usunięty zostanie jedynie punkt wspólny prostych p i q , czyli Q , który jest ich jedynym punktem wspólnym.

Płaszczyznę otrzymaną z płaszczyzny rzutowej π_R przez usunięcie dowolnej prostej oznaczmy symbolem π_R^o . Na płaszczyźnie π_R^o :

- 1) punktami nazwiemy wszystkie punkty ze zbioru $PKT_{\pi_R} \setminus p^*$
- 2) prostymi nazwiemy wszystkie proste ze zbioru $PR_{\pi_R} \setminus \{p\}$
- 3) relacja incydencji pomiędzy punktami a prostymi na płaszczyźnie π_R^o jest określona tak samo jak incydencja pomiędzy punktami ze zbioru $PKT_{\pi_R} \setminus p^*$ a prostymi ze zbioru $PR_{\pi_R} \setminus \{p\}$ na płaszczyźnie rzutowej π_R .

4.2.2 STWIERDZENIE

Płaszczyzna π_R^o jest płaszczyzną afiniczną.

UZASADNIENIE:

Pokażemy, że na płaszczyźnie π_R^o są spełnione aksjomaty płaszczyzny afinicznej.

▪ SPEŁNIANIE AA1

Wybermy dwa dowolne różne punkty A i B leżące na płaszczyźnie π_R^o . Wobec określonej relacji incydencji na płaszczyźnie π_R^o przez punkty A i B przechodzi ta sama prosta, która łączy je na płaszczyźnie π_R . Wobec AR1 na płaszczyźnie π_R przez punkty A i B przechodzi dokładnie jedna prosta, zatem również na płaszczyźnie π_R^o jest ona jedyną prostą łączącą dane punkty.

▪ SPEŁNIANIE AA2

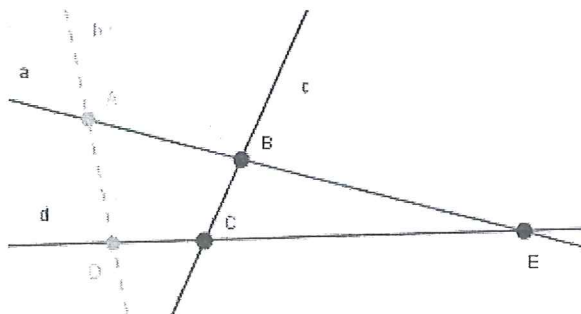
Wobec Twierdzenia 3.3.2 na każdej prostej ze zbioru PR_{π_R} leżą co najmniej 3 różne punkty. Na mocy Faktu 4.2.1 z każdej prostej $q \in PR_{\pi_R} \setminus \{p\}$ zostaje usunięty dokładnie jeden punkt, zaś incydencja pomiędzy pozostałymi punktami i prostymi nie zmienia się. Wobec tego na prostych ze zbioru $PR_{\pi_R} \setminus \{p\}$ pozostają co najmniej dwa różne punkty. Stąd na płaszczyźnie π_R^o na dowolnej prostej leżą co najmniej dwa różne punkty.

▪ SPEŁNIANIE AA3

Wobec AR4 na płaszczyźnie π_R istnieją 4 różne punkty A, B, C, D , z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej. Przyjmijmy oznaczenia jak w dowodzie Twierdzenia 3.3.2. Mogą się zdarzyć następujące sytuacje:

1° dwa spośród punktów A, B, C, D należą do usuwanej prostej p

Bez straty ogólności przyjmijmy, że są to punkty A i D , zatem usuwaną prostą jest $p = b$. Wówczas na płaszczyźnie π_R^o pozostają punkty B i C oraz proste a i d , których punktem przecięcia jest punkt E (patrz Rysunek 4.1).



Rysunek 4.1

FAKT POMOCNICZY 1

Punkty E, B i C tworzą trójkę niewspółliniowych punktów na płaszczyźnie π_R^0 .

UZASADNIENIE:

W dowodzie Twierdzenia 3.3.2 wykazaliśmy różność punkt E od punktów A, B, C, D . Zauważmy również, że punkt E nie należy do usuwanej prostej $p = b$, bo gdyby należał, proste a i b (ale także d i b) miałyby dwa różne punkty wspólne, co przeczyłoby AR2. Ponadto punkt E nie należy do prostej c , bo gdyby należał, to proste c i d (a także a i c) przecinałyby się w dwóch różnych punktach na płaszczyźnie π_R , co byłoby sprzeczne z AR2. Zatem punkty B, C, E nie są współliniowe, czyli nie leżą na jednej prostej.

Na mocy Faktu Pomocniczego 1 na płaszczyźnie π_R^0 istnieją trzy punkty nie leżące na jednej prostej.

2° dokładnie jeden spośród punktów A, B, C, D należy do usuwanej prostej p

Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt A należy do prostej p . Ponieważ żadne trzy spośród punktów A, B, C, D nie są współliniowe na płaszczyźnie π_R , to po odrzuceniu punktu A i pozostawieniu punktów B, C, D w relacji incydencji jak na płaszczyźnie π_R , punkty B, C, D pozostają niewspółliniowe na płaszczyźnie π_R^0 .

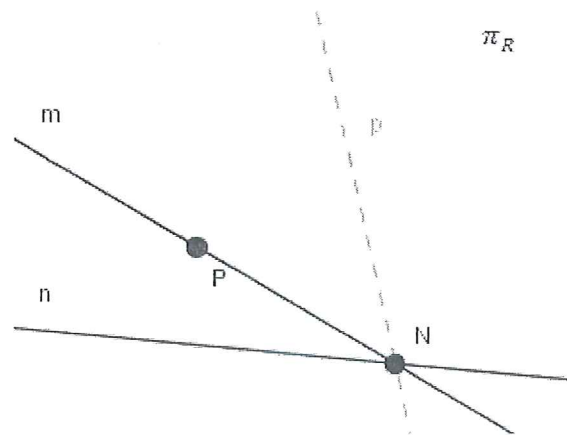
3° żaden spośród punktów A, B, C, D nie należy do wyrzucanej prostej p

Wówczas np. punkty A, B, C nie są współliniowe, więc AA3 jest spełniony.

Wobec powyższych rozważań stwierdzamy spełnianie AA3 na płaszczyźnie π_R^0

▪ SPEŁNIANIE AA4

Wyberzmy dowolny punkt P na płaszczyźnie π_R^0 oraz dowolną prostą n nie przechodzącą przez punkt P . Wobec AR2 na płaszczyźnie π_R proste n i p przecinają się dokładnie w jednym punkcie $N \in p^*$. Wobec AR1 na płaszczyźnie π_R przez punkty P i N przechodzi dokładnie jedna prosta m (patrz Rysunek 4.2).



Rysunek 4.2

Po usunięciu prostej p i punktów do niej należących proste n i m nie będą miały punktów wspólnych na płaszczyźnie π_R^0 , bo ich jedynym punktem przecięcia był usunięty punkt N .

FAKT POMOCNICZY 2

Prosta m jest jedyną prostą przechodzącą przez punkt P nie przecinającą prostej n na płaszczyźnie π_R^0 .

UZASADNIENIE (nie wprost):

Założmy, że na płaszczyźnie π_R^0 istnieje różna od prostej m prosta k przechodząca przez punkt P i nieprzecinająca prostej n . Wobec AR2 przed usunięciem prostej p prosta n i prosta k musiały mieć punkt wspólny $K \in p$ na płaszczyźnie π_R . Punkt K był różny od punktu N , bo inaczej, wobec AR1, proste m i k byłyby tą samą prostą. Punkty N i K należały do prostej n jako punkty przecięcia odpowiednio z prostymi m i k , ale były również incydentne z prostą p . Stąd wynika, że prosta n miała dwa różne punkty przecięcia z prostą p , co przeczy AR2. Stąd prosta m jest jedyną prostą przechodzącą przez punkt P i nieprzecinającą prostej n na płaszczyźnie π_R^0 .

Na mocy powyższych rozważań stwierdzamy spełnianie AA4.

Tym samym pokazaliśmy, że na płaszczyźnie π_R^0 są spełnione aksjomaty płaszczyzny afinicznej, a więc jest ona płaszczyzną afiniczną.

4.3 KONSTRUKCJA PŁASZCZYZNY RZUTOWEJ Z PŁASZCZYZNY AFINICZNEJ

Rozważmy płaszczyznę afiniczną π_A wraz ze zbiorami punktów PKT_{π_A} oraz prostych PR_{π_A} . Analogicznie do konstrukcji modelu standardowego płaszczyzny rzutowej z płaszczyzny euklidesowej opisanej w Podrozdziale 2.1 przeprowadzimy konstrukcję płaszczyzny rzutowej wychodząc od płaszczyzny afinicznej.

Zdefiniujemy nowe punkty, tzw. *punkty w nieskończoności*, będące kierunkami prostych na płaszczyźnie afinicznej. Wobec Uwagi 4.1.6 każda prosta na płaszczyźnie π_A ma dokładnie jeden kierunek, zatem do każdej prostej $q \in PR_{\pi_A}$ dołączamy dokładnie jeden nowy punkt, kierunek prostej q , który oznaczymy przez (q) .

Zdefiniujemy nową prostą, tzw. *prostą w nieskończoności*, składającą się wyłącznie z nowych punktów w nieskończoności i oznaczymy ją przez $P\infty$.

Dołączmy nowe twory do płaszczyzny afinicznej π_A . Oznaczmy otrzymaną płaszczyznę symbolem $\widehat{\pi_A}$. Na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$:

- 1) punktami nazwiemy wszystkie punkty ze zbioru PKT_{π_A} oraz wszystkie punkty w nieskończoności należące do łańcucha $(P\infty)^*$
- 2) prostymi nazwiemy wszystkie proste ze zbioru PR_{π_A} oraz prostą $P\infty$
- 3) relację incydencji określimy przez warunki:
 - a) punkt $Q \in PKT_{\pi_A}$ jest incydenty z prostą $q \in PR_{\pi_A} \Leftrightarrow$ punkt Q i prosta q są incydentne na płaszczyźnie π_A
 - b) punkt w nieskończoności (q) jest incydenty z prostą $q \in PR_{\pi_A} \Leftrightarrow$ prosta q ma kierunek (q)
 - c) nowa prosta $P\infty$ w nieskończoności jest incydentna ze wszystkimi punktami w nieskończoności i tylko z nimi.

4.3.1. STWIERDZENIE

Płaszczyzna $\widehat{\pi_A}$ jest płaszczyzną rzutową.

UZASADNIENIE:

Pokażemy, że na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$ są spełnione aksjomaty płaszczyzny rzutowej.

▪ SPEŁNIANIE AR1

Weźmy dwa dowolne różne punkty Q i R należące do płaszczyzny $\widehat{\pi_A}$. Rozważmy trzy możliwe przypadki:

1° $Q, R \in PKT_{\pi_A}$

Na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$ przez punkty Q, R przechodzi ta sama prosta co na płaszczyźnie π_A . Wobec AA1 przez punkty Q, R przechodziła dokładnie jedna prosta $s \in PR_{\pi_A}$. Ponadto przez punkty Q i R nie może przechodzić nowa prosta $P\infty$, gdyż łączy ona wyłącznie punkty w nieskończoności. Wobec tego prosta s jest jedyną prostą łączącą punkty Q i R .

2° $Q, R \in (P\infty)^*$

Punkty Q i R są nowymi punktami dołączonymi do płaszczyzny afinicznej razem z prostą w nieskończoności, zatem nie może przez nie przechodzić żadna prosta ze zbioru PR_{π_A} . Wobec tego jedyną prostą łączącą dwa różne punkty w nieskończoności P i R jest prosta w nieskończoności $P\infty$.

3° $Q \in PKT_{\pi_A}$ oraz $R \in (P\infty)^*$

Oznaczmy $R = (r)$. Wobec AA4 na płaszczyźnie π_A przez punkt Q przechodzi dokładnie jedna prosta q o kierunku prostej r , czyli na płaszczyźnie rzutowej jest ona jedyną prostą incydentną z punktem w nieskończoności (r) i punktem Q . Ponadto przez punkty Q oraz (r) nie może przechodzić prosta $P\infty$, gdyż składa się ona wyłącznie z punktów w nieskończoności.

Wobec powyższych rozważań stwierdzamy spełnianie AR1 na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$.

▪ SPEŁNIANIE AR2

Rozważmy dwie dowolne różne proste na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$. Mamy dwa przypadki:

1° *dwie różne proste* $q, r \in PR_{\pi_A}$

Rozważmy dwie możliwości.

a) Proste q i r przecinają się w pewnym punkcie $P \in PKT_{\pi_A}$ na płaszczyźnie π_A .

Wówczas na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$ ich punktem wspólnym pozostaje punkt P . Proste te nie mogą przecinać się w żadnym innym punkcie ze zbioru PKT_{π_A} , bo wtedy musiałyby przecinać się również w różnym od P punkcie na płaszczyźnie π_A , skąd na mocy AA1 wynikałoby, że $q = r$. Proste te nie miały na płaszczyźnie π_A wspólnego kierunku, więc na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$ nie mogą przecinać się w punkcie w nieskończoności.

b) Proste q i r są równoległe na płaszczyźnie π_A .

Wówczas punktem wspólnym prostych q i r na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$ jest punkt w nieskończoności $(q) = (r)$, czyli kierunek prostych na płaszczyźnie π_A . Wobec Uwagi 4.1.6 żaden inny punkt w nieskończoności nie może być ich punktem wspólnym. Ponadto proste te nie przecinały się w żadnym punkcie na płaszczyźnie π_A , więc na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$ nie ma innego punktu przecięcia tych prostych niż $(q) = (r)$.

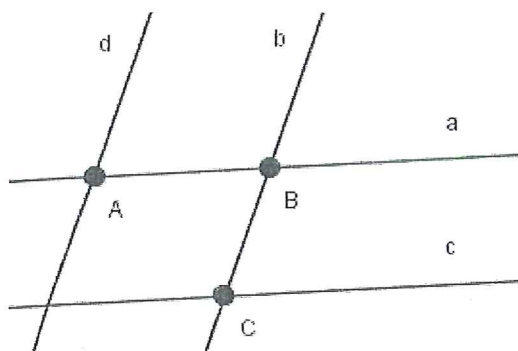
2° prosta $q \in PR_{\pi_A}$ oraz P^∞

Wobec Uwagi 4.1.6 prosta q na płaszczyźnie π_A ma dokładnie jeden kierunek, zatem na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$ prosta q przecina prostą P^∞ dokładnie w jednym punkcie – punkcie w nieskończoności (q). Jest to jedyny punkt przecięcia prostej q z prostą P^∞ , bo gdyby istniał inny punkt przecięcia w nieskończoności, prosta q miałaby dwa różne kierunki, co prowadzi do sprzeczności. Ponadto prosta q nie może przecinać prostej P^∞ w punkcie ze zbioru PKT_{π_A} , bo żaden z tych punktów nie należy do prostej P^∞ .

Wobec powyższych rozważań stwierdzamy spełnianie AR2 na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$.

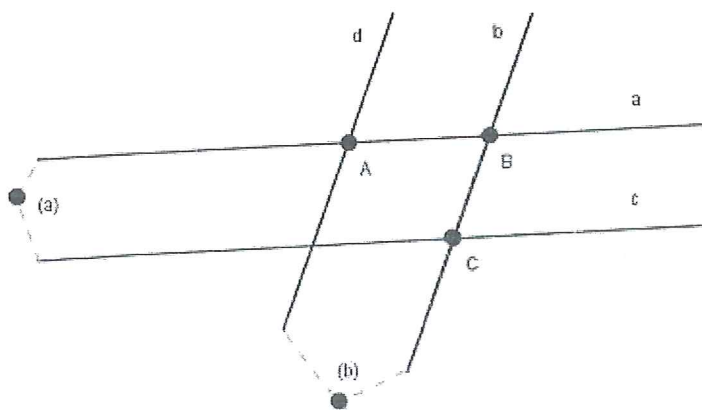
▪ SPEŁNIANIE AR3

Na mocy AA3 na płaszczyźnie π_A istnieją trzy punkty A, B, C nie leżące na jednej prostej. Wobec AA1 przez punkty A, B przechodzi dokładnie jedna prosta a , zaś przez punkty B, C – dokładnie jedna prosta b , przy czym $a \neq b$. Wobec AA4 przez punkt C przechodzi dokładnie jedna prosta c równoległa do prostej a , zaś przez punkt A – jedyna prosta d równoległa do prostej b (patrz Rysunek 4.3).



Rysunek 4.3

Na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$ incydencja między punktami A, B, C oraz prostymi a, b, c, d pozostaje taka jak na płaszczyźnie π_A . Ponadto proste równoległe a i c oraz b i d przecinają się odpowiednio w różnych punktach w nieskończoności $(a), (b)$. Wobec Uwagi 4.1.6. punkt (a) nie może należeć ani do prostej b ani do d , zaś punkt (b) – ani do prostej a ani do c (patrz Rysunek 4.4), bo gdyby należały, wtedy odpowiednie proste miałyby dwa różne kierunki.



Rysunek 4.4

Wobec tego punkty $A, C, (a), (b)$ są czterema punktami na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej.

Tym samym pokazaliśmy, że na płaszczyźnie $\widehat{\pi_A}$ są spełnione aksjomaty płaskiej geometrii rzutowej, zatem $\widehat{\pi_A}$ jest płaszczyzną rzutową.

Opisane w Podrozdziałach 4.2 i 4.3 konstrukcje pozwalają otrzymać płaszczyznę afiniczną lub płaszczyznę rzutową poprzez dokonanie operacji odpowiednio usunięcia lub dodania pewnej prostej, wraz z punktami do niej należącymi, do wyjściowej płaszczyzny. W kolejnym podrozdziale zbadamy, czy operacje te są do siebie odwrotne.

4.4 SKŁADANIE OPERACJI USUWANIA I DODAWANIA PROSTEJ Z PUNKTAMI DO NIEJ NALEŻĄCYMI

Aby przekonać się, czy operacje, o których mowa w Podrozdziałach 4.2 i 4.3, są do siebie odwrotne, wykażemy izomorficzność płaszczyzny wyjściowej z tworem otrzymanym w wyniku odpowiedniego złożenia operacji usuwania i dodawania prostej (wraz z punktami do niej należącymi).

IZOMORFIZM MIĘDZY PŁASZCZYZNĄ π_R A PŁASZCZYZNĄ π_R^o

Rozpatrzmy dowolną płaszczyznę rzutową π_R . Wykonajmy na niej operację usunięcia dowolnej ustalonej prostej p , opisaną w Podrozdziale 4.2. Otrzymujemy nową płaszczyznę π_R^o , która na mocy Stwierdzenia 4.2.2 jest płaszczyzną afiniczną.

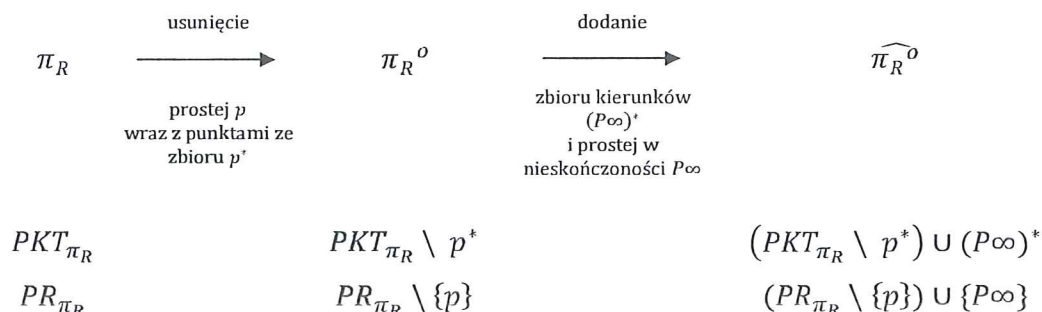
Rozpatrzmy teraz płaszczyznę afiniczną π_R^o i dokonajmy na niej operacji dodania nowych punktów w nieskończoności wraz z prostą w nieskończoności, opisaną w Podrozdziale 4.3. Otrzymujemy w ten sposób nową płaszczyznę $\widehat{\pi_R^o}$, która na mocy Stwierdzenia 4.3.1 jest płaszczyzną rzutową.

4.4.1. STWIERDZENIE

Płaszczyzna π_R jest izomorficzna z płaszczyzną π_R^o .

UZASADNIENIE:

Aby uzasadnić Stwierdzenie 4.4.1 skonstruujemy izomorfizm pomiędzy danymi płaszczyznami. Na poniższym diagramie zilustrowano, jak zmieniają się zbiory punktów i prostych na kolejno otrzymywanych płaszczyznach.



Naszym celem jest ustalenie izomorfizmu między zbiorami punktów i prostych dla płaszczyzn π_R oraz $\widehat{\pi_R^0}$. Niech $\varphi: \pi_R \rightarrow \widehat{\pi_R^0}$ będzie odwzorowaniem, które przyporządkowuje:

- 1) punktom ze zbioru $PKT_{\pi_R} \setminus p^*$ na płaszczyźnie π_R te same punkty na płaszczyźnie $\widehat{\pi_R^0}$
- 2) prostym ze zbioru $PR_{\pi_R} \setminus \{p\}$ na płaszczyźnie π_R te same proste na płaszczyźnie $\widehat{\pi_R^0}$.
- 3) prostą p na płaszczyźnie π_R prostą w nieskończoności $P\infty$
- 4) każdemu punktowi $P \in p^*$ na płaszczyźnie π_R punkt $P' \in (P\infty)^*$ na płaszczyźnie $\widehat{\pi_R^0}$, który jest wyznaczony przez kierunek prostych z pęku P^* na płaszczyźnie π_R^0 .

FAKT POMOCNICZY

Przyporządkowanie φ wyznacza izomorfizm pomiędzy płaszczyznami π_R oraz $\widehat{\pi_R^0}$.

UZASADNIENIE:

1° Przyporządkowanie φ jest bijekcją.

Warunki 1), 2), 3) w oczywisty sposób wyznaczają bijekcje pomiędzy punktami ze zbioru $PKT_{\pi_R} \setminus p^*$ na płaszczyznach π_R i $\widehat{\pi_R^0}$, a także między prostymi ze zbioru $PR_{\pi_R} \setminus \{p\}$ na płaszczyznach π_R oraz $\widehat{\pi_R^0}$ oraz między prostą p i $P\infty$.

Warunek 4) również określa wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie łańcucha p^* z płaszczyzny π_R na łańcuch $(P\infty)^*$ z płaszczyzny $\widehat{\pi_R^0}$. Mamy bowiem, że dla dowolnego punktu $P \in p^*$ na płaszczyźnie π_R proste należące do pęku P^* , poprzez konstrukcję podaną w Podrozdziale 4.2, zostają przekształcone w pęk prostych równoległych o wspólnym kierunku (q) na płaszczyźnie π_R^0 . Kierunek (q) wyznacza na płaszczyźnie $\widehat{\pi_R^0}$ punkt $(q) = P'$ w nieskończoności należący do prostej $P\infty$.

Zauważmy, że dla dwóch różnych punktów P i Q z płaszczyzny π_R pęki Q^* i P^* wyznaczają dwa różne kierunki na płaszczyźnie π_R^0 , a kierunki te - dwa różne punkty w nieskończoności na płaszczyźnie $\widehat{\pi_R^0}$, co pokazuje różnowartościowość przyporządkowania. Ponadto z opisu konstrukcji 4.2 i 4.3 wynika, że każdy punkt łańcucha $(P\infty)^*$ zostaje przyporządkowany pewnemu punktowi łańcucha p^* .

Wobec powyższych rozważań przyporządkowanie φ wyznacza bijekcję.

2° Przyporządkowanie φ zachowuje relację incydencji.

Incydencja pomiędzy punktami ze zbioru $PKT_{\pi_R} \setminus p^*$ oraz prostymi ze zbioru $PR_{\pi_R} \setminus \{p\}$ w oczywisty sposób zostaje zachowana na płaszczyźnie $\widehat{\pi_R^0}$, podobnie jak incydencja pomiędzy punktami łańcucha p^* a prostą p , którym na płaszczyźnie $\widehat{\pi_R^0}$ odpowiada prosta i punkty w nieskończoności.

Dla punktu P łańcucha p^* oraz prostej $q \in PR_{\pi_R} \setminus \{p\}$ relacja incydencji również zostaje zachowana. Jeśli bowiem prosta q należy do pęku P^* na płaszczyźnie π_R , to zostaje ona odwzorowana na prostą przechodzącą przez odpowiadający punktowi P punkt $(q) = P'$ na płaszczyźnie $\widehat{\pi_R^0}$, jak w przypadku 1°. W sytuacji, gdy prosta q nie była incydentna z punktem P na płaszczyźnie π_R , nie będzie ona incydentna z punktem P' na płaszczyźnie $\widehat{\pi_R^0}$. Ponadto jeśli punkt Q ze zbioru $PKT_{\pi_R} \setminus p^*$ nie był incydentny z prostą p , na nowej płaszczyźnie nie będzie incydenty z prostą w nieskończoności.

Wobec powyższych rozważań, przyporządkowanie φ wyznacza izomorfizm pomiędzy płaszczyznami π_R oraz $\widehat{\pi_R^0}$. Zatem płaszczyzny π_R oraz $\widehat{\pi_R^0}$ są izomorficzne.

IZOMORFIZM MIĘDZY PŁASZCZYZNĄ π_A A PŁASZCZYZNĄ $\widehat{\pi}_A^o$

Podobnie jak w poprzedniej części Podrozdziału 4.4 chcielibyśmy pokazać, że istnieje izomorfizm pomiędzy dowolną płaszczyzną afiniczną a płaszczyzną otrzymaną z wyjściowej poprzez złożenie operacji dodania i usunięcia prostej.

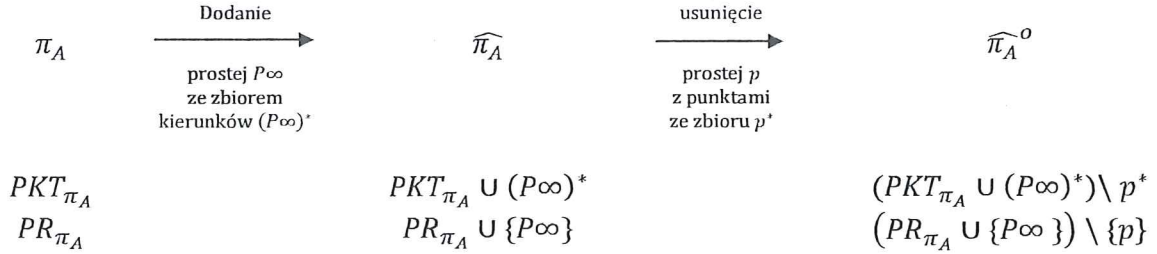
Rozpatrzmy dowolną płaszczyznę afiniczną π_A . Dokonajmy na niej operacji dodania nowych punktów w nieskończoności oraz prostej w nieskończoności, opisanej w Podrozdziale 4.3. Otrzymujemy w ten sposób nową płaszczyznę $\widehat{\pi}_A$, która wobec Stwierdzenia 4.3.1 jest płaszczyzną rzutową. Wykonajmy na nowej płaszczyźnie $\widehat{\pi}_A$ operację usunięcia dowolnej prostej p wraz z punktami należącymi do p^* , opisaną w Podrozdziale 4.2. Otrzymujemy w ten sposób płaszczyznę $\widehat{\pi}_A^o$, która wobec Stwierdzenia 4.2.2 jest płaszczyzną afiniczną.

W tym przypadku nie możemy natychmiastowo opisać przyporządkowania pomiędzy wyjściową płaszczyzną a otrzymanym tworem, jak to zrobiliśmy w przypadku płaszczyzny rzutowej i doń izomorficznej w poprzedniej części tego podrozdziału. W poprzedniej sytuacji usuwana prosta determinowała prostą, która została dodana. Tu najpierw dodajemy prostą w nieskończoności wraz z kierunkami, natomiast możemy usunąć dowolną inną prostą, co wprowadza pewne utrudnienia.

4.4.2. PROBLEM

Czy płaszczyzna π_A jest izomorficzna z płaszczyzną $\widehat{\pi}_A^o$?

Prześledźmy na poniższym diagramie, jak zmieniają się zbiory punktów i prostych na kolejnych płaszczyznach:



Podczas dokonywania operacji usuwania pewnej prostej z płaszczyzny $\widehat{\pi}_A$ może się zdarzyć, że usuniemy wszystkie nowe punkty z łańcucha $(P_\infty)^*$, wówczas przyporządkowanie wyznaczające izomorfizm jest trywialne, gdyż otrzymaliśmy *de facto* płaszczyznę $\widehat{\pi}_A^o$ identyczną z wyjściową π_A .

Rozstrzygnięcie, czy płaszczyzna π_A jest izomorficzna z płaszczyzną $\widehat{\pi}_A^o$ w sytuacji gdy $(P_\infty)^* \neq p^*$, wykracza poza zakres tej pracy.

4.4.3. UWAGA

Na podstawie dostępnej literatury nie udało się ustalić kompletnego rozwiązania Problemu 4.4.2.

BIBLOGRAFIA

- [1] R.H. Bruck, H.J. Ryser, *The non-existence of certain finite projective planes*, Canadian Journal of Mathematics, vol. 1, 1949 (ss. 88-93)
- [2] H.S.M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1967 (podrozdziały 13.1, 14.1)
- [3] M. Kordos, *O różnych geometriach*, Wydawnictwo Alfa, Warszawa 1987 (rozdział 5)
- [4] M. Kordos, *Podstawy geometrii rzutowej i rzutowo-metrycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1984 (rozdziały 1-3)
- [5] C.W.H. Lam, L. Thiel, S. Swiercz, *The non-existence of finite projective planes of order 10*, Canadian Journal of Mathematics, vol. 41, 1989 (ss. 1117-1123)
- [6] C.W.H. Lam, *The Search for a Finite Projective Plane of order 10*, American Mathematical Monthly, vol. 98, 1991 (ss. 305-318)
- [7] T.G. Room, P.B. Kirkpatrick, *Miniquaternion Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge 1971
- [8] G. Terry, *Le probleme des 36 officiers*, Compte Rendu de l'Association Française pour l'Avancement de Science Naturel, vol. 1, 1900 (ss. 122-123); vol. 2, 1901 (ss. 2170-2203)
- [9] W. Więśław, *Algebra wyższa. Skrypt dla studentów*, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 1972 (s. 150)

