

UNIwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

Jagna Olszewska

Automorfizm zewnętrzny grupy S_6

Praca napisana pod opieką prof. Jacka Świątkowskiego

Rok akademicki 2024/2025

Wrocław, 2025.

Wstęp

W niniejszej pracy pochylimy się nad pewnym ciekawym faktem znanym z algebry. Okazuje się, że S_6 jako jedyna wśród grup permutacji ma automorfizm niewewnętrzny. Automorfizm ten ma pewną interpretację geometryczną i struktura ta jest obecna w wielu dobrze znanych obiektach. Inspiracją do napisania tej pracy był podrozdział 8.6 (*Some thoughts on the icosahedron*) książki [3]. Praca ta ma charakter przeglądowy. Składa się z czterech głównych części.

W Rozdziale 1 przypomnimy pewne definicje i fakty z teorii grup oraz pochylimy się nad automorfizmami grup S_n dla $n \neq 6$. W ostatnim, krótkim podrozdziale przytoczymy dowód jedyności potencjalnego automorfizmu zewnętrznego grupy S_6 .

W drugiej części (Rozdział 2) wprowadzimy obiekt zwany *pentadą*. Nazewnictwo w tej sekcji zostało wprowadzone po raz pierwszy przez J. J. Sylwestera i pojawia się dość często w literaturze (na przykład w [2], [3] i [4]), jednak interpretacja pentad w grafie K_6 jest autorska i nie znalazłam jej w żadnym źródle. W tym rozdziale skonstruujemy za pomocą pentad jedyny automorfizm zewnętrzny grupy S_6 .

W Rozdziale 3 wprowadzimy inny rodzaj obiektu geometrycznego, *pentagraf*. Ta koncepcja również jest autorska, jednak w trakcie kompletowania bibliografii natknęłam się na artykuł [1], gdzie pentagrafy nazywane są *mystic pentagons*. Dalej przyjrzymy się, jak opisać kandydata na automorfizm zewnętrzny grupy S_6 w języku tych obiektów.

W ostatnim rozdziale skonstruujemy naturalne utożsamienie konkurencyjnych opisów automorfizmu zewnętrznego i podsumujemy wyniki całej pracy.

Spis treści

1 Automorfizmy i teoria grup	2
1.1 Wprowadzenie	2
1.2 Automorfizmy grup permutacji	3
1.3 Jedyność automorfizmu zewnętrznego	6
2 Pentady	6
2.1 Wprowadzenie	6
2.2 Konstrukcja automorfizmu zewnętrznego	9
3 Pentagrafy	11
3.1 Wprowadzenie	11
3.2 Egzotyczne zanurzenie S_5 w S_6	11
4 Równoważność konstrukcji	13
4.1 Związek pentagrafów z pentadami	13
4.2 Ψ jest automorfizmem zewnętrznym	15

1 Automorfizmy i teoria grup

1.1 Wprowadzenie

W tym podrozdziale przypomnimy pewne definicje i nietrudne do pokazania fakty z teorii grup, z których będziemy korzystać w dalszej części pracy.

Definicja 1.1. Grupą permutacji na n elementach S_n nazywamy grupę wszystkich bijekcji $\{1, \dots, n\} \mapsto \{1, \dots, n\}$ ze składaniem funkcji jako działaniem grupowym.

Definicja 1.2. Automorfizmem grupy G jest izomorfizm $\varphi: G \rightarrow G$.

Fakt 1.3. Odwzorowanie $\varphi_g: G \rightarrow G$ postaci $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ jest automorfizmem.

Dowód. Prosty rachunek, pokazuje, że φ_g jest homomorfizmem:

$$\varphi_g(xy) = gxyg^{-1} = gxx^{-1}gyg^{-1} = \varphi_g(x)\varphi_g(y).$$

Mamy również:

$$\begin{aligned}\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}}(x) &= g(g^{-1}xg)g^{-1} = x \\ \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g(x) &= g^{-1}(gxx^{-1})g = x\end{aligned}$$

zatem odwzorowanie $\varphi_{g^{-1}}$ jest odwrotne do φ_g , co pokazuje, że φ_g jest izomorfizmem. $\square$

Powyższy fakt prowadzi do następującej definicji:

Definicja 1.4. Niech G będzie grupą. Automorfizm $\varphi: G \rightarrow G$ jest nazywany **wewnętrznym** jeśli jest postaci $\varphi(x) = gxg^{-1}$, gdzie g jest pewnym elementem grupy G (zależnym tylko od φ). Automorfizm, który nie jest wewnętrzny, nazywamy **zewnętrznym**.

Zbiór wszystkich automorfizmów grupy G będziemy oznaczać $\text{Aut}(G)$, natomiast zbiór automorfizmów wewnętrznych przez $\text{Inn}(G)$. Łatwo pokazać, że zarówno $\text{Aut}(G)$ jak i $\text{Inn}(G)$ tworzą grupy.

Fakt 1.5. $\text{Inn}(G)$ jest podgrupą normalną w $\text{Aut}(G)$ dla dowolnej grupy G .

Dowód. Fakt, że $\text{Inn}(G)$ jest podgrupą w $\text{Aut}(G)$ jest łatwy do sprawdzenia i pominiemy jego dowód. Pokażemy natomiast, że $\text{Inn}(G)$ jest zamknięty na sprzężeniu. Niech $\psi \in \text{Aut}(G)$ będzie dowolnym automorfizmem i $\varphi \in \text{Inn}(G)$ będzie dowolnym automorfizmem wewnętrznym, czyli wyraża się wzorem $\varphi(x) = gxg^{-1}$ dla pewnego elementu $g \in G$. Mamy:

$$\psi \circ \varphi \circ \psi^{-1}(x) = \psi(\varphi(\psi^{-1}(x))) = \psi(g \cdot \psi^{-1}(x) \cdot g^{-1}) = \psi(g) \cdot x \cdot \psi(g)^{-1}$$

Zatem takie złożenie wyraża się jako pewien automorfizm wewnętrzny. $\square$

Powyższy fakt pozwala nam mówić o grupie ilorazowej $\text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$.

1.2 Automorfizmy grup permutacji

Niniejsza sekcja pracy korzysta z rozumowania przedstawionego na konwersatorium z Algebry 1R prowadzonym przez prof. Krzysztofa Krupińskiego w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego w semestrze zimowym roku akademickiego 2023/24. Nie jest mi znane inne źródło, w którym jest przedstawione podobne do niniejszego rozumowanie. Najpierw sformułujemy i udowodnimy kilka lematów, które pomogą nam w udowodnieniu następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1.6. Dla $n \neq 6$ jedynymi automorfizmami grupy S_n są automorfizmy wewnętrzne.

Wprowadźmy oznaczenie B_k jako zbiór iloczynów rozłącznych k transpozycji w grupie S_n ($k = 1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$).

Lemat 1.7. Dla dowolnego $n \geq 2$ niech f będzie automorfizmem grupy S_n takim, że $f[B_1] = B_1$. Wtedy istnieją parami różne $j_1, \dots, j_n$, takie że $f(1, k) = (j_1, j_k)$ dla dowolnego $k \in \{2, \dots, n\}$.

Dowód. Z założenia o automorfizmie f mamy, że:

$$\begin{aligned}f(1, 2) &= (i_2, j_2) \\ f(1, 3) &= (i_3, j_3) \\ &\vdots \\ f(1, n) &= (i_n, j_n)\end{aligned}$$

dla pewnych $i_k, j_k \in \{1, \dots, n\}$ ($k = 2, \dots, n$). Zachodzi równość:

$$f((1, k)(1, l)) = (i_k, j_k)(i_l, j_l)$$

Zauważmy, że element $(1, k)(1, l)$ ma rząd 3, zatem każde dwie transpozycje postaci (i_k, j_k) mają jeden element wspólny. Pokażemy, że wszystkie te transpozycje mają jeden element wspólny. Załóżmy nie wprost, że istnieją trzy transpozycje, które nie mają wspólnego elementu. Wtedy zachodzi:

$$f((1, k)(1, l)(1, m)) = (a, b)(a, c)(b, c) = (a, c).$$

Element $(1, k)(1, l)(1, m)$ ma rząd 4, a (a, c) rząd 2, co prowadzi do sprzeczności. $\square$

Lemat 1.8. Niech f będzie automorfizmem grupy S_n takim, że $f[B_1] = B_1$ dla dowolnego $n \geq 2$. Wtedy istnieje pewna permutacja σ taka, że dla każdego $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ prawdziwa jest równość:

$$\sigma f(1, k) \sigma^{-1} = (1, k).$$

Dowód. Z założenia o automorfizmie f i z Lematu 1.7 mamy, że:

$$f(1, 2) = (j_1, j_2)$$

$$f(1, 3) = (j_1, j_3)$$

$$\vdots$$

$$f(1, n) = (j_1, j_n)$$

dla pewnych $j_k \in \{1, \dots, n\}$ ($k = 1, \dots, n$). Oczywiście elementy $j_1, \dots, j_n$ są parami różne, bo transpozycje (j_1, j_k) są parami różne. Niech:

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Taka permutacja istotnie spełnia nasze wymagania. Rzeczywiście mamy:

$$\sigma f(1, k) \sigma^{-1} = \sigma(j_1, j_k) \sigma^{-1} = (\sigma(j_1), \sigma(j_k)) = (1, k).$$

$\square$

Lemat 1.9. Niech $f \in \text{Aut}(S_n)$ dla dowolnego $n \geq 2$. Wówczas f jest automorfizmem wewnętrznym wtedy i tylko wtedy gdy $f[B_1] = B_1$.

Dowód. ($\implies$) Sprzężenie transpozycji przez dowolny element jest transpozycją, więc $f[B_1] \subseteq B_1$. Z drugiej strony automorfizm jest w szczególności różnowartościowy i działa na zbiorach skończonych, zatem $f[B_1] = B_1$.

($\impliedby$) Korzystając z Lematu 1.8 istnieje σ , taka że dla każdego $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ zachodzi:

$$\sigma f(1, i) \sigma^{-1} = (1, i)$$

Zauważmy, że $(1, a)(1, b)(1, a) = (a, b)$, więc każdą transpozycję da się uzyskać poprzez transpozycje postaci $(1, i)$, z kolei transpozycje generują wszystkie permutacje. Mamy $f(1, i) = \sigma^{-1}(1, i)\sigma$, więc f jest automorfizmem wewnętrznym. $\square$

Lemat 1.10. Dla $n \neq 6$ i $k \neq 1$ zachodzi $|B_1| \neq |B_k|$. Ponadto dla $n = 6$ mamy $|B_1| = |B_3|$ oraz $|B_1| \neq |B_k|$ dla $k \neq 1, 3$.

Dowód. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}
|B_1| &= \binom{n}{2} \\
|B_2| &= \frac{\binom{n}{2} \binom{n-2}{2}}{2} \\
&\vdots \\
|B_k| &= \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \binom{n-2i}{2}}{k!} = \\
&= \frac{\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \frac{(n-2) \cdot (n-3)}{2} \dots \frac{(n-2k+2) \cdot (n-2k+1)}{2}}{k!} = \\
&= \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-2k+1)}{2^k \cdot k!}
\end{aligned}$$

Założmy nie wprost, że $|B_1| = |B_k|$. Mamy wtedy:

$$(n-2) \cdot (n-3) \dots (n-(2k-1)) = 2^{k-1} \cdot k! \quad (1)$$

Rozważmy tę równość w zależności od wartości k .

1°) Niech $k = 2$. Mamy wtedy $n \geq 4$ i równanie (1) przyjmuje postać:

$$(n-2) \cdot (n-3) = 4.$$

Równanie nie ma rozwiązań w zbiorze liczb naturalnych, co prowadzi do sprzeczności.

2°) Niech $k = 3$. Mamy wtedy $n \geq 6$ i równanie (1) przyjmuje postać:

$$(n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) = 24.$$

Rozwiązaniami w zbiorze liczb naturalnych są $n = 1$ (dostajemy grupę S_1 , w której nie ma sensu mówić o transpozycjach) i $n = 6$ (w sformułowaniu lematu wykluczaliśmy ten przypadek), co również prowadzi do sprzeczności.

3°) Niech $k \geq 4$. Wtedy mamy $n \geq 8$ i dostajemy:

$$\begin{aligned}
(n-2)(n-3) \dots (n-2k+1) &= \underbrace{(n-2k+1) \dots (n-k-1)}_{k-1 \text{ wyrazów}} \cdot \underbrace{(n-k) \dots (n-3)}_{k-2 \text{ wyrazów}} \cdot (n-2) \\
&\geq \underbrace{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{k-1 \text{ wyrazów}} \cdot \underbrace{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 6}_{k-2 \text{ wyrazów}} \\
&> \underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{k-2 \text{ wyrazów}} \cdot \underbrace{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}_{k-2 \text{ wyrazów}} \\
&= \underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{k-1 \text{ wyrazów}} \cdot \underbrace{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2}_{k-1 \text{ wyrazów}} \\
&= 2^{k-1} \cdot k!
\end{aligned}$$

Zatem równość (1) nigdy nie zachodzi.

□

Możemy teraz przejść do dowodu Twierdzenia 1.6.

Dowód Twierdzenia 1.6. Weźmy dowolny automorfizm $f \in \text{Aut}(S_n)$. Obraz każdej transpozycji musi być iloczynem pewnej liczby rozłącznych transpozycji ze względu na to, że musi mieć rząd 2. Dodatkowo wiadomo, że każde dwie transpozycje są sprzężone, więc ich obrazy również, zatem gdy jedna transpozycja przejdzie pod działaniem f na iloczyn k rozłącznych transpozycji, to każda transpozycja przejdzie na iloczyn k rozłącznych transpozycji. Stąd dostajemy, że $f[B_1] \subseteq B_k$, zaś równość wynika stąd, że wszystkie iloczyny k rozłącznych transpozycji są sprzężone. Z Lematu 1.10 wiadomo, że $|f[B_1]| = |B_k|$ tylko dla $k = 1$, zatem $f[B_1] = B_1$ i w konsekwencji f jest automorfizmem wewnętrznym na mocy Lematu 1.9. □

Oznacza to dokładnie tyle, że za wyjątkiem S_6 wszystkie skończone grupy permutacji nie mogą mieć automorfizmu zewnętrznego. Dodatkowo każdy ewentualny automorfizm zewnętrzny Φ grupy S_6 musi spełniać $\Phi[B_1] = B_3$, a ponieważ odwrotność automorfizmu zewnętrznego jest automorfizmem zewnętrznym, również $\Phi[B_3] = B_1$.

1.3 Jedyność automorfizmu zewnętrznego

Poniższe twierdzenie to Twierdzenie 7.10 z [4].

Twierdzenie 1.11. *Jeśli istnieje automorfizm zewnętrzny grupy S_6 , to jest on jedyny, z dokładnością do automorfizmu wewnętrznego. Innymi słowy, jeśli taki automorfizm zewnętrzny istnieje, to grupa ilorazowa $\text{Aut}(S_6)/\text{Inn}(S_6)$ jest dwuelementowa.*

Dowód. Niech φ_1, φ_2 będą automorfizmami zewnętrznymi S_6 . Mamy więc:

$$\varphi_1^{-1}[\varphi_2[B_1]] = \varphi_1^{-1}[B_3] = B_1$$

zatem (z Lematu 1.9) $\varphi_1^{-1}\varphi_2 \in \text{Inn}(S_6)$. Wiemy więc, że φ_1 i φ_2 wyznaczają tę samą warstwę w $\text{Aut}(S_6)/\text{Inn}(S_6)$, skąd wynika teza. □

2 Pentady

Pentady pojawiają się w różnych postaciach w literaturze, jednak ich interpretacja jako kolorowanie grafu K_6 jest autorska i nigdzie nie spotkałam się z tym rozumowaniem. W sekcji pierwszej (Rozdział 2.1) wprowadzimy dokładne definicje i udowodnimy przydatne fakty. W drugiej sekcji (Rozdział 2.2) natomiast przeprowadzimy konstrukcję automorfizmu zewnętrznego.

2.1 Wprowadzenie

Definicja 2.1. Rozbicie zbioru wierzchołków grafu K_6 na trzy 2-elementowe podzbiory nazywamy **syntemą**.

Krawędź łączącą wierzchołki a i b będziemy oznaczać $[a, b]$. Zauważmy, że $[a, b] = [b, a]$. Syntemę będziemy oznaczać przez $s = \{[a, b], [c, d], [e, f]\}$. O syntemie możemy myśleć jako o trzech krawędziach grafu K_6 o rozłącznych wierzchołkach. Istnieje dokładnie 15 różnych syntem, ponieważ:

1. Istnieje $\binom{6}{2}$ krawędzi grafu K_6 i na tyle sposobów możemy wybrać pierwszą krawędź syntemy.
2. Drugą krawędź można wybrać na $\binom{4}{2}$ sposobów. Dwa pozostałe wierzchołki łączymy do ostatniej krawędzi pentady.
3. W powyższych krokach każdą syntemę policzyliśmy 3! razy.

Mamy:

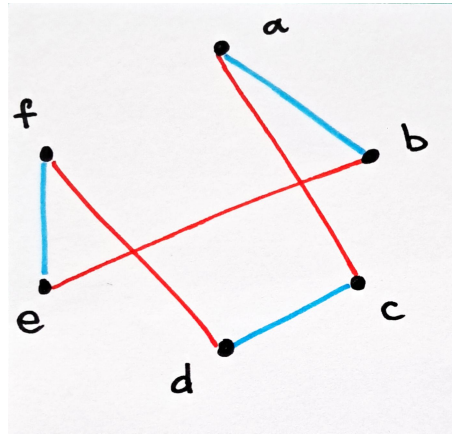
$$\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{3!} = 15.$$

Definicja 2.2. **Pentada** to zbiór pięciu syntem (traktowanych jako 3-elementowe zbiory krawędzi w grafie K_6), które sumują się do zbioru E_{K_6} wszystkich krawędzi grafu K_6 .

Uwaga 2.3. Syntemy w każdej pentadzie, jako 3-elementowe podzbiory E_{K_6} , są parami rozłączne.

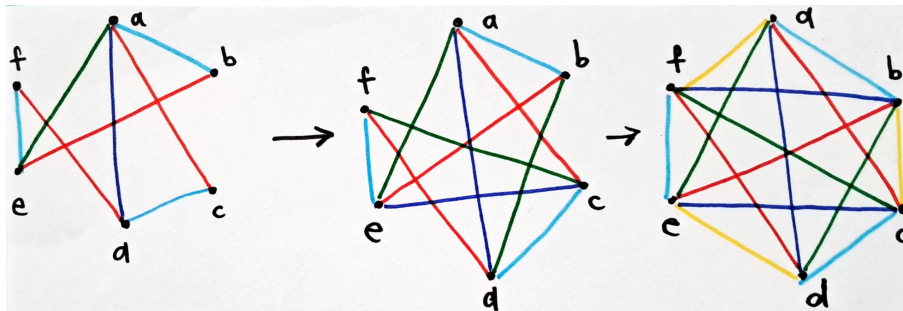
Będziemy myśleć o pentadzie jako o pewnym kolorowaniu krawędzi grafu K_6 w taki sposób, aby każda syntema była w innym kolorze. Każda krawędź wychodząca z danego wierzchołka musi należeć do innej syntemy, a zatem jest w innym kolorze. Poniżej przedstawimy fakty ukazujące pewne własności pentad. Pomijamy przy tym bardzo proste uzasadnienie pierwszego z tych faktów, Faktu 2.4 (patrz Rysunek 1).

Fakt 2.4. *Suma dwóch dowolnych, rozłącznych syntem jest cyklem zawierającym wszystkie wierzchołki grafu K_6 .*



Rysunek 1: Cykl wyznaczony przez dwie przykładowe rozłączne syntemy. [Rysunek do Faktu 2.4]

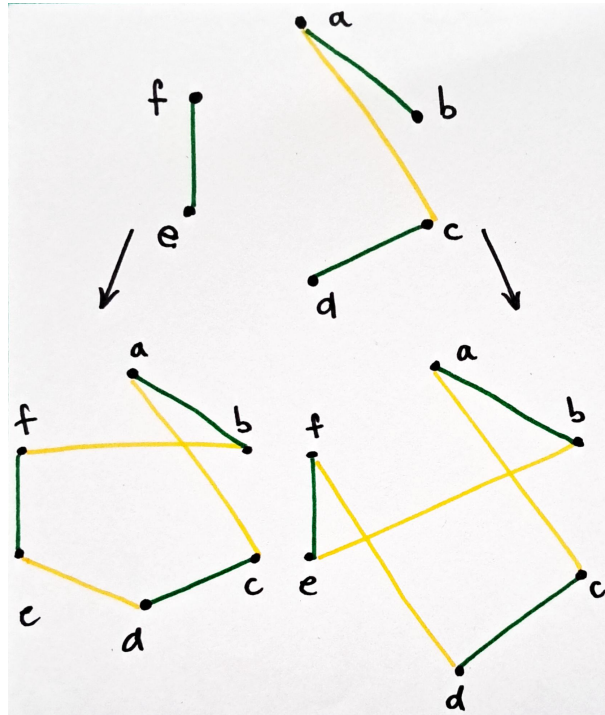
Fakt 2.5. *Dwie rozłączne syntemy jednoznacznie wyznaczają jedną pentadę, w której są dwiema spośród pięciu tworzących ją syntem. [Patrz Rysunek 2].*



Rysunek 2: Konstrukcja pentady z dwóch przykładowych rozłącznych syntem. [Rysunek do Faktu 2.5]

Dowód. Weźmy dwie syntemy tworzące cykl jak w Fakcie 2.4 i zastosujmy oznaczenie jak na Rysunku 1. Dorysujmy krawędzie łączące wierzchołek a z wierzchołkami odległymi od niego o 2 w cyklu (tzn. $[a, d]$ i $[a, e]$) [Patrz lewy fragment Rysunku 2]. Spróbujmy uzupełnić $[a, e]$ do syntemy. W tym celu musimy połączyć w pary wierzchołki b, c, d, f . Nie możemy narysować krawędzi $[c, d]$ i $[d, f]$, bo one są zawarte w cyklu. Zatem „zostaje” jeden sposób, który zadaje syntemę $\{[a, e], [b, d], [c, f]\}$. Analogicznie możemy uzupełnić krawędź $[a, d]$ na jedyny sposób do syntemy $\{[a, d], [b, f], [c, e]\}$ [Patrz środkowy fragment Rysunku 2]. To nam daje trzy niewykorzystane krawędzie, które zadają syntemę $\{[a, f], [b, c], [d, e]\}$ jak w prawym fragmencie Rysunku 2. $\square$

Fakt 2.6. Każda syntema występuje w dokładnie dwóch pentadach.



Rysunek 3: Konstrukcja dwóch pentad z jednej przykładowej syntemy. [Rysunek do Faktu 2.6]

Dowód. Mamy daną pewną syntemę $s = \{[a, b], [c, d], [e, f]\}$. Rysujemy dodatkową krawędź $[a, c]$ i staramy się uzupełnić ją do drugiej syntemy. W tym celu musimy połączyć w pary 4 pozostałe wierzchołki b, d, e, f . Możemy to zrobić na 3 różne sposoby ($\{[b, f], [d, e]\}$, $\{[b, e], [d, f]\}$, $\{[b, d], [e, f]\}$). Dokładnie jeden z nich jest już „zajęty”, bo zawiera krawędź występującą w syntemie s . Dwa pozostałe sposoby zadają nam dwie różne pary syntem [Patrz Rysunek 3], a z Faktu 2.5 mamy, że można je uzupełnić do dokładnie dwóch pentad. $\square$

Fakt 2.7. Każde dwie pentady mają wspólną dokładnie jedną syntemę.

Dowód. Rozważmy odwzorowanie pomiędzy zbiorem syntem, a zbiorem 2-elementowych podzbiorów zbioru pentad przyporządkowujące danej syntemie tę parę pentad, w której ona występuje. Łatwo zauważyć, że oba zbiory mają moc 15. Dodatkowo na mocy Faktu 2.6 odwzorowanie jest różnowartościowe, zatem musi być ono bijekcją. $\square$

Twierdzenie 2.8. W grafie K_6 istnieje dokładnie sześć pentad.

Dowód. Dowód przeprowadzimy w następujących krokach:

1. Chcemy skonstruować cykl jak w Fakcie 2.4. Możemy to zrobić na $\frac{6!}{6 \cdot 2} = \frac{5!}{2}$ sposobów.
2. Taki cykl reprezentuje dwie z pięciu syntem, na które składa się pentada jednoznacznie zdefiniowana przez te dwie syntemy (jak w Fakcie 2.5), więc w pierwszym kroku każdą pentadę policzyliśmy $\binom{5}{2}$ razy.

To nam daje:

$$\frac{5!}{2 \cdot \binom{5}{2}} = 6$$

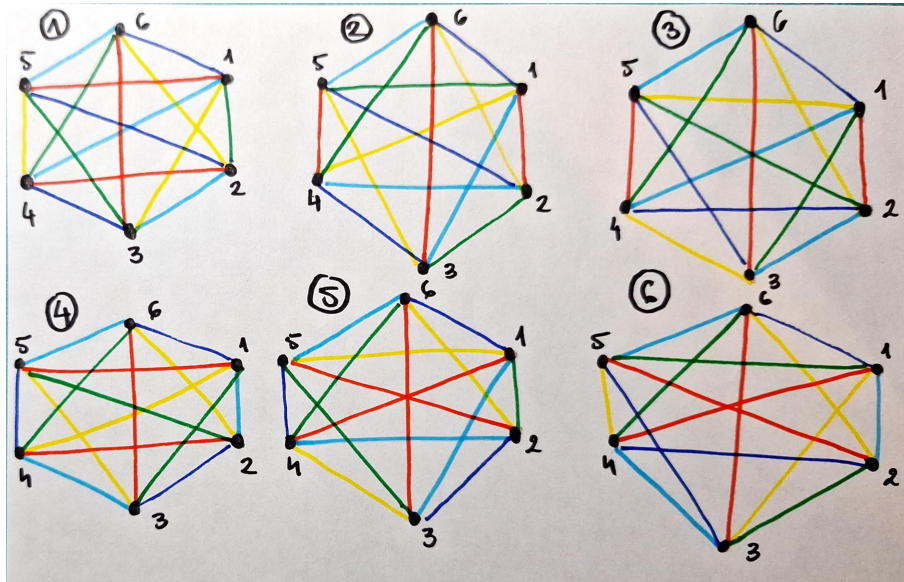
pentad. □

Alternatywny dowód. Wiedząc, że każda pentada zawiera dokładnie 5 z 15 syntem i korzystając z Faktu 2.6 otrzymujemy, że pentad jest:

$$\frac{15 \cdot 2}{5} = 6.$$

□

Na Rysunku 4 widnieją wszystkie pentady w grafie K_6 .



Rysunek 4: Wszystkie pentady i ich numeracja.

2.2 Konstrukcja automorfizmu zewnętrznego

Oznaczmy przez $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ zbiór wszystkich sześciu pentad. Zdefiniujemy homomorfizm $\Phi: S_6 \rightarrow S_{\mathcal{P}}$ pomiędzy grupą permutacji wierzchołków grafu K_6 (ponumerowanych liczbami $1, \dots, 6$) a grupą permutacji pentad. Ustalmy $\sigma \in S_6$. Permutacja σ działa na zbiorze wierzchołków grafu K_6 i w konsekwencji działa na zbiorze syntem, a przez to również na zbiorze pentad. Definiujemy $\Phi(\sigma)$ jako permutację pentad zadaną przez σ w ten sposób, że dla pojedynczej syntemy zachodzi:

$$\Phi(\sigma)(\{[a, b], [c, d], [e, f]\}) = \{[\sigma(a), \sigma(b)], [\sigma(c), \sigma(d)], [\sigma(e), \sigma(f)]\}.$$

Definicja 2.9. Czworobokiem pentady będziemy nazywać podzbiór tej pentady składający się z czterech wierzchołków oraz krawędzi między nimi (zachowując kolorowanie zadane przez pierwotną pentadę).

Fakt 2.10. W dowolnym czworoboku pentady istnieje dokładnie jedna para krawędzi nie mających wspólnego wierzchołka, które w pierwotnej pentadzie należały do jednej syntemy.

Dowód. Dowód przeprowadzimy w dwóch standardowych krokach:

1. **Istnienie.** Usuając dwa wierzchołki w szczególności usuwamy krawędź e poprowadzoną między nimi. Razem z dwiema innymi krawędziami (które należą do rozważanego czworoboku) tworzy ona syntemę w pierwotnej pentadzie. Te dwie krawędzie spełniają nasze wymagania.
2. **Jedyność.** Gdyby istniały dwie różne pary takich krawędzi, to istniałyby dwie różne syntemy w pierwotnej pentadzie, które zawierałyby krawędź e , co prowadzi do sprzeczności z konstrukcją pentady.

□

Lemat 2.11. Φ jest epimorfizmem.

Dowód. Aby pokazać tezę wystarczy udowodnić, że w obrazie Φ jest dowolna transpozycja. Weźmy dwie pentady, które chcemy spermutować. Z Faktu 2.7 wiemy, że dzielą one dokładnie jedną syntemę. Oznaczmy ją $s = \{[a, b], [c, d], [e, f]\}$. Następnie zadziałajmy na zbiór pentad permutacją $\sigma = (a, b)(c, d)(e, f)$. Rozważmy co dzieje się z:

1. **Pentadą, która nie zawiera syntemy s .** Pentada taka składa się między innymi z trzech syntem, z których każda ma po jedynej krawędzi wspólnej z syntemą s . Rozważmy czworobok pentady składający się z wierzchołków a, b, c i d . Korzystając z Faktu 2.10 wiemy, że para krawędzi $\{[a, c], [b, d]\}$ lub $\{[a, d], [b, c]\}$ należy do jednej syntemy (para $\{[a, b], [c, d]\}$ jest wykluczona, bo ta para rozpięłaby syntemę s). W skutek działania σ ta para jest posyłana na samą siebie, zatem cała syntema rozpinana przez tę parę jest posyłana na samą siebie. To samo rozumowanie stosuje się do czworoboków rozpinanych przez wierzchołki c, d, e i f oraz przez a, b, e i f . Trzy syntemy zatem są swoim obrazem, więc i cała pentada zostaje posłana na siebie.
2. **Pentadą, która zawiera syntemę s .** Załóżmy nie wprost, że obrazem takiej pentady przez Φ jest ona sama. Weźmy dowolną inną syntemę należącą do tej pentady, niech będzie to syntema $s_1 = \{[a, e], [b, d], [c, f]\}$. W skutek działania σ zostaje ona przeniesiona na syntemę $s_2 = \{[b, f], [a, c], [d, e]\}$. Spróbujmy uzupełnić syntemy s, s_1, s_2 do pentady. Weźmy krawędź $[b, c]$ i czworobok rozpinany przez pozostałe cztery wierzchołki. W tym czworoboku „zajęte” są jednak krawędzie $[e, f], [a, e], [d, e]$, zatem nie jesteśmy w stanie rozpiąć syntemy, co prowadzi do sprzeczności.

Widzimy, że po zadziałaniu permutacją σ na cztery pentady, które nie zawierają syntemy s zostają one posyłane na same siebie, natomiast dwie pozostałe pentady faktycznie są nawzajem swoimi obrazami. Otrzymaliśmy zatem pożądaną transpozycję. □

Epimorfizm Φ działa pomiędzy izomorficznymi grupami skończonymi, zatem z Lematu 2.11 dostajemy, że Φ jest automorfizmem.

Twierdzenie 2.12. Φ jest automorfizmem zewnętrznym.

Dowód. Rozważmy co dzieje się z pentadami $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ (numeracja zgodna z Rysunkiem 4) pod wpływem transpozycji $(1, 2)$ na ich wierzchołkach. Widzimy, że:

$$\begin{aligned}\Phi(1, 2)(P_1) &= P_5 \\ \Phi(1, 2)(P_2) &= P_3 \\ \Phi(1, 2)(P_3) &= P_2 \\ \Phi(1, 2)(P_4) &= P_6 \\ \Phi(1, 2)(P_5) &= P_1 \\ \Phi(1, 2)(P_6) &= P_4\end{aligned}$$

Traktując permutację pentad jako permutację ich zbioru indeksów otrzymujemy:

$$\Phi(1, 2) = (1, 5)(2, 3)(4, 6).$$

Mamy więc $\Phi[B_1] \neq B_1$ i z Lematu 1.9 dostajemy, że Φ jest automorfizmem zewnętrznym. $\square$

Uwaga 2.13. Z rozważań przeprowadzonych w Rozdziale 1 wynikało, że jeśli automorfizm zewnętrzny Φ grupy S_6 istnieje, to zachodzi $\Phi[B_1] = B_3$ oraz $\Phi[B_3] = B_1$. Dokładnie taką zależność możemy zaobserwować w powyższej konstrukcji.

3 Pentagrafy

Idee przedstawione w niniejszym rozdziale również są autorskie, natomiast są obecne w artykule [1] i Rozdziale 7 książki [4] (dokładniej strony 156-162), więc tymi źródłami się wspomagałam pisząc pewne fragmenty tego rozdziału. W części pierwszej (Rozdział 3.1) wprowadzimy nowy rodzaj obiektów aby w drugiej części (Rozdział 3.2) skonstruować, pozornie inny, automorfizm zewnętrzny.

3.1 Wprowadzenie

W tej części pracy przyjrzymy się tak zwanym pentagrafom, w literaturze nazywanym *mystic pentagons*. Zostały wprowadzone w [1]. Rozważmy cykle nieskierowane na pięciu wierzchołkach. Jest ich

$$\frac{5!}{5 \cdot 2} = 12.$$

Dodatkowo w naturalny sposób możemy połączyć je w pary tak, aby krawędzie z każdej pary sumowały się do grafu K_5 . Takich par jest zatem 6 i będziemy je nazywać **pentagrafami**. Będziemy myśleć o pentagrafach jako o kolorowaniach krawędzi grafu K_5 tak, aby każdy cykl był w innym kolorze.

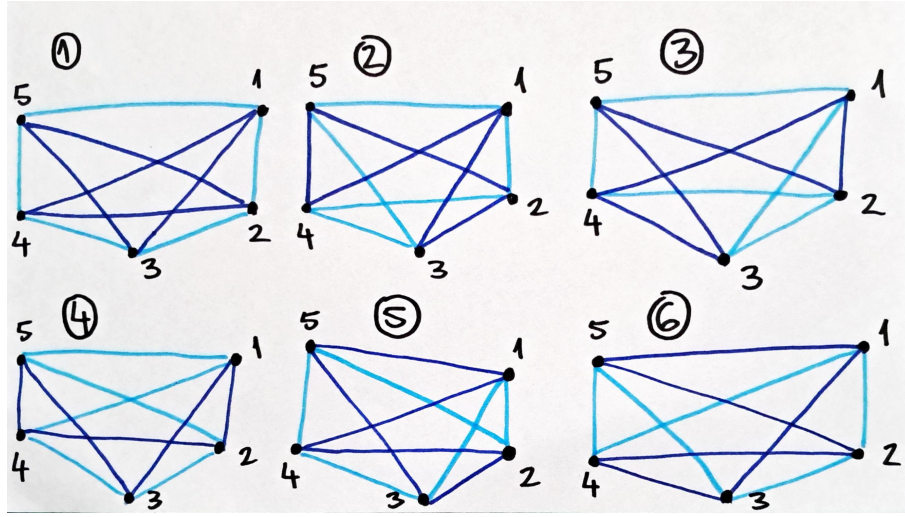
Na Rysunku 5 widnieją wszystkie pentagrafy.

3.2 Egzotyczne zanurzenie S_5 w S_6

Poniższa sekcja została napisana na podstawie [1] i fragmentów [4] (dokładnie Lematu 7.8 i Twierdzenia 7.9).

Oznaczmy przez $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6\}$ zbiór wszystkich sześciu pentagrafów. Zdefiniujemy homomorfizm $\Psi: S_5 \rightarrow S_{\mathcal{G}}$ pomiędzy grupą permutacji wierzchołków grafu K_5 (ponumerowanych liczbami $1, \dots, 5$) a grupą permutacji pentagrafów. Homomorfizm Ψ działa analogicznie do automorfizmu $\Phi: S_6 \rightarrow \mathcal{P}$. Ustalmy $\sigma \in S_5$. Permutacja σ działa na zbiorze wierzchołków grafu K_5 i w konsekwencji działa na zbiorze pentagrafów. Definiujemy $\Psi(\sigma)$ jako permutację pentagrafów zadaną przez σ w ten sposób, że dla pojedynczego cyklu pentagrafu zachodzi:

$$\Psi(\sigma)(a, b, c, d, e) = (\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c), \sigma(d), \sigma(e)).$$



Rysunek 5: Wszystkie pentagrafy i ich numeracja.

Lemat 3.1. Ψ jest różnowartościowe.

Dowód. Zbadajmy jądro Ψ . Zauważmy, że jądro zawsze jest podgrupą normalną, więc w tym przypadku musi być jedną z grup $\{id\}, A_5, S_5$. Rozważmy co dzieje się z pentagrafami $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ (numeracja zgodna z Rysunkiem 5) pod wpływem permutacji $(1, 2, 3)$ na ich wierzchołkach. Mamy:

$$\begin{aligned}\Psi(1, 2, 3)(G_1) &= G_2 \\ \Psi(1, 2, 3)(G_2) &= G_4 \\ \Psi(1, 2, 3)(G_3) &= G_5 \\ \Psi(1, 2, 3)(G_4) &= G_1 \\ \Psi(1, 2, 3)(G_5) &= G_6 \\ \Psi(1, 2, 3)(G_6) &= G_3\end{aligned}$$

zatem $(1, 2, 3) \notin \ker(\Psi)$. Dostajemy więc, że $\ker(\Psi) = \{id\}$ i co za tym idzie Ψ jest monomorfizmem. $\square$

Oznaczmy $H := \Psi[S_5]$. Przyjrzyjmy się obrazowi odwzorowania Ψ . Z Lematu 3.1 wiemy, że H jest izomorficzny z S_5 , zatem $[S_6 : H] = 6$. W S_6 „żyje” dużo kopii S_5 , na przykład stabilizatory punktów. Zachodzi jednak:

Lemat 3.2. Podgrupa H nie jest stabilizatorem żadnego punktu.

Dowód. Wystarczy sprawdzić, że w obrazie Ψ jest permutacja bez punktu stałego. Rozważmy działanie transpozycji $(1, 2)$:

$$\begin{aligned}\Psi(1, 2)(G_1) &= G_5 \\ \Psi(1, 2)(G_2) &= G_3 \\ \Psi(1, 2)(G_3) &= G_2 \\ \Psi(1, 2)(G_4) &= G_6 \\ \Psi(1, 2)(G_5) &= G_1 \\ \Psi(1, 2)(G_6) &= G_4\end{aligned}$$

Zatem urozsamiając pentagraf G_i z $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mamy $\Psi(1, 2) = (1, 5)(2, 3)(4, 6)$. $\square$

Grupa S_6 działa na zbiorze (lewych) warstw S_6/H poprzez mnożenie z lewej strony:

$$\sigma \circ (\tau H) = (\sigma\tau)H.$$

Działanie to zadaje homomorfizm z S_6 w grupę permutacji zbioru S_6/H . Z racji, że $[S_6 : H] = 6$, możemy ten homomorfizm utożsamić z endomorfizmem S_6 . Jak okaże się w Rozdziale 4, endomorfizm ten jest automorfizmem zewnętrznym.

4 Równoważność konstrukcji

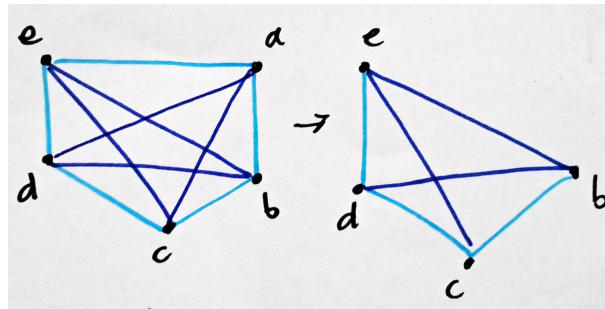
Dotychczas udało nam się opisać automorfizm zewnętrzny grupy S_6 . W tym rozdziale pokażemy, że możemy w naturalny sposób utożsamić automorfizm zewnętrzny opisany w Rozdziale 2.2 i kandydata na automorfizm zewnętrzny z Rozdziału 3.2. W szczególności wykażemy, że Ψ faktycznie jest automorfizmem zewnętrznym. Rozumowanie przedstawione w niniejszym rozdziale jest w pełni autorskie.

4.1 Związek pentagrafów z pentadami

W niniejszej sekcji udowodnimy pewien przydatny lemat oraz przyjrzymy się związkowi między pentadami a pentagrafami. Pomoże nam to skonstruować kanoniczną odpowiedniość pomiędzy automorfizmem skonstruowanym w Rozdziale 2, a tym w Rozdziale 3.

Definicja 4.1. Czworobokiem pentagrafu będziemy nazywać podzbiór pentagrafu składający się z czterech wierzchołków i krawędzi między nimi (zachowując kolorowanie zadane przez pierwotny pentagraf).

Lemat 4.2. Wśród dowolnego czworoboku pentagrafu istnieje dokładnie jedna para krawędzi o rozłącznych wierzchołkach, taka że każda krawędź należy do innego cyklu.



Rysunek 6: Ilustracja do Lematu 4.2.

Dowód. Bez straty ogólności rozważmy pentagraf składający się z cykli $C_1 = (a, b, c, d, e)$, $C_2 = (a, c, e, b, d)$ i wierzchołki b, c, d, e . Można je połączyć w rozłączne pary na 3 różne sposoby, ale zauważmy, że C_1 zawiera jedną z nich ($\{[b, c], [d, e]\}$), a C_2 realizuje drugą ($\{[b, d], [c, e]\}$). Trzeci sposób, $\{[c, d], [b, e]\}$, zawiera krawędź zarówno z C_1 jak i z C_2 i to jest szukana para krawędzi (patrz Rysunek 6). $\square$

Powyższy lemat pozwoli nam skonstruować naturalną bijekcję pomiędzy zbiorem pentagrafów, a zbiorem pentad. Ustalmy, że wierzchołkami pentagrafów są wierzchołki $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ w grafie K_6 o wierzchołkach $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, w którym rozpatrujemy pentady. W pierwszej kolejności pokażemy, że z każdego pentagrafu można zbudować pentadę. W tym celu dodajemy do pentagrafu szósty wierzchołek i postępujemy zgodnie z następującym algorytmem:

1. Wybieramy dowolny wierzchołek w pentagrafie i rysujemy krawędź między nim i wierzchołkiem numer 6.
2. Pozostałe cztery wierzchołki łączymy w pary zgodnie z Lematem 4.2, tzn. tak, aby każda para należała do innego cyklu w pierwotnym pentagrafie.

Taka procedura zadaje nam syntemę. Możemy ją powtórzyć dla każdego z czterech pozostałych wierzchołków pentagrafu otrzymując 5 różnych syntem.

Lemat 4.3. *Otrzymany w sposób opisany powyżej zbiór syntem faktycznie zadaje pentadę.*

Dowód. Pokażemy, że żadna krawędź nie występuje wielokrotnie. Przeprowadźmy rozumowanie nie wprost. Załóżmy, że pewna krawędź $[a, b]$ pojawia się dwukrotnie, w dwóch różnych syntemach. Oczywiście $a, b \neq 6$. To by oznaczało, że $[a, b]$ pojawia się po połączeniu w pary wierzchołków a, b, c, d , jak i a, b, c, e jak w Lemacie 4.2. To z kolei oznacza, że w pewnym cyklu C występuje zarówno krawędź $[c, d]$, jak i krawędź $[c, e]$ czyli w tym cyklu występują kolejno (d, c, e) . Zatem $C = (d, c, e, b, a)$ lub $C = (d, c, e, a, b)$. W obu przypadkach $[a, b] \in C$, co prowadzi do sprzeczności ze sposobem budowania syntem. $\square$

Oznaczmy przez Δ skonstruowane wyżej odwzorowanie ze zbioru pentagrafów w zbiór pentad. Chcielibyśmy skonstruować funkcję odwrotną do Δ . Aby tak było należałoby znaleźć cykl po wierzchołkach 1-5 tak, aby każda krawędź należała do innej syntemy. To jednak może być trudne, dlatego pokażemy inną procedurę.

Lemat 4.4. *Ustalmy dowolną pentadę i syntemy s_1, s_2 w tej pentadzie. Niech $\tilde{s}_i$ będzie syntemą s_i pozbawioną krawędzi, której jednym z wierzchołków jest 6. Wtedy istnieje dokładnie jeden pentagraf, taki że każda z krawędzi w $\tilde{s}_1$ i każda z krawędzi w $\tilde{s}_2$ należy do innego cyklu.*

Dowód. Zauważmy, że $\tilde{s}_1 \cup \tilde{s}_2$ jest ścieżką długości 4 w grafie K_5 . Oznaczmy ją (a, b, c, d, e) . Wtedy $\tilde{s}_1 = \{[a, b], [c, d]\}$ oraz $\tilde{s}_2 = \{[b, c], [d, e]\}$ (być może zmieniając numerację syntem). Osobno pokażemy istnienie i jedyność pentagrafu, który spełnia nasze wymagania.

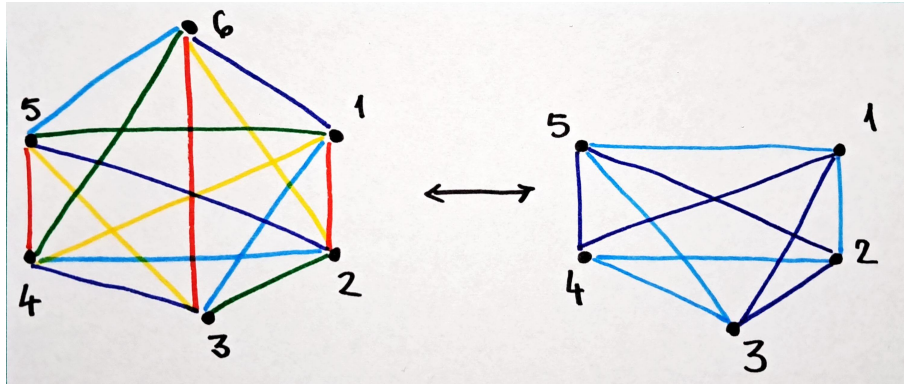
1. **Istnienie.** Łatwo sprawdzić, że szukany przez nas pentagraf jest wyznaczony przez cykl (a, c, e, d, b) .
2. **Jedyność.** Niech G będzie pentagrafem spełniającym tezę lematu. Oznaczmy cykle składające się na G przez C_1, C_2 i załóżmy, że $[a, b] \in C_1$. Zauważmy, wtedy $[b, c] \in C_2$. Istotnie, gdyby krawędź $[b, c]$ należała do cyklu C_1 , to z warunków tezy wynika, że krawędzie $[c, d]$ i $[d, e]$ należałyby do C_2 . Spójrzmy na krawędź $[a, e]$. Bez straty ogólności załóżmy, że $[a, e] \in C_1$. Wtedy ścieżka (e, a, b, c) zawiera się w C_1 , a ją można uzupełnić na jedyny sposób do 5-cyklu $C = (e, a, b, c, d)$, co prowadzi do sprzeczności, bo $[c, d], [d, e] \in C_2$. W takim razie krawędzie $[a, b]$ i $[b, c]$ muszą należeć do różnych cykli, stąd (i z tezy lematu) widzimy, że $[a, b], [c, d] \in C_1$ oraz $[b, c], [d, e] \in C_2$. Łatwo zauważyć, że takie przyporządkowanie krawędzi K_5 do cykli można na jeden sposób uzupełnić do pentagrafu (dokładnie do pentagrafu opisanego w poprzednim paragrafie), co kończy dowód jedyność. $\square$

Lemat 4.5. *Niech G będzie pentagrafem, $P = \Delta(G)$ i niech s_1, s_2 będą dowolnymi różnymi syntemami w P . Wtedy G spełnia tezę Lematu 4.4 dla tak wybranych P, s_1, s_2 .*

Dowód. Z konstrukcji $\Delta(G)$ wynika, że każde z $\tilde{s}_1$ oraz $\tilde{s}_2$ składa się z dwóch rozłącznych krawędzi w grafie K_5 , które w G należą do różnych cykli, ale to dokładnie znaczy, że G spełnia tezę Lematu 4.4 dla P, s_1, s_2 . $\square$

Na mocy Lematu 4.5 pentagraf z tezy Lematu 4.4 nie zależy od wyboru syntem s_1, s_2 , a jedynie od pentady P . Wobec tego otrzymujemy odwzorowanie ∇ ze zbioru pentad w zbiór pentagrafów. Przy takim oznaczeniu Lemat 4.5 można zinterpretować następująco.

Wniosek 4.6. Zachodzi $\nabla \circ \Delta = \text{id}$. W szczególności, Δ oraz ∇ są wzajemnie odwrotnymi do siebie bijekcjami.



Rysunek 7: Pewna pentada i odpowiadający jej pentagraf.

4.2 Ψ jest automorfizmem zewnętrznym

W tym podrozdziale będziemy chcieli opisać zbiór ilorazowy S_G/H w bardziej geometryczny sposób. To pokaże, że Ψ opisane w Rozdziale 3.2 faktycznie jest automorfizmem zewnętrznym. W tym celu rozważmy graf pełny K_6 , którego zbiorem wierzchołków jest zbiór pentagrafów $\mathcal{G}$. Taki graf będziemy oznaczać przez K_G . Zdefiniujemy w tym grafie pewną wyróżnioną pentadę.

Ustalmy $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i rozważmy wszystkie pary rozłącznych krawędzi w grafie K_5 , które nie zawierają i . Łatwo zauważyć, że istnieją dokładnie dwa pentagrafy, w których taka para krawędzi należy do różnych cykli. W takim razie każda para rozłącznych krawędzi, a tych jest 3, wyznacza nam parę pentagrafów. Definiujemy s_i jako zbiór wszystkich powstałych w ten sposób par. Wprost z konstrukcji wynika, że s_i jest syntemą w K_G oraz $P = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ jest pentadą w K_G .

Fakt 4.7. Dla dowolnego $\tau \in S_5$ oraz $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mamy $\Psi(\tau)(s_i) = s_{\tau(i)}$.

Dowód. Ustalmy dowolną krawędź $[G, G'] \in s_i$. Z definicji s_i istnieją rozłączne krawędzie $[a, b]$ oraz $[c, d]$, które nie zawierają i i które w pentagrafach G oraz G' należą do różnych cykli. W takim razie w każdym z grafów $\Psi(\tau)(G)$ oraz $\Psi(\tau)(G')$ krawędzie $[\tau(a), \tau(b)]$ oraz $[\tau(c), \tau(d)]$ również muszą należeć do różnych cykli. W takim razie $[G, G']$ jest krawędzią w syntemie $s_{\tau(i)}$. Stąd $\Psi(\tau)(s_i) = s_{\tau(i)}$. $\square$

Z powyższego faktu natychmiast wynika następujący wniosek.

Fakt 4.8. Dla dowolnego $\sigma \in H$ mamy $\sigma(P) = P$.

Zdefiniujmy odwzorowanie $\Theta: S_G/H \rightarrow \mathcal{P}$ zadane przez $\Theta(\sigma H) = \sigma(P)$.

Fakt 4.9. Odwzorowanie Θ jest dobrze określone.

Dowód. Ustalmy σ, σ' , takie że $\sigma H = \sigma' H$. W takim razie istnieje $\tau \in H$, takie że $\sigma' = \sigma\tau$. Mamy więc $\sigma'(P) = \sigma(\tau(P)) = \sigma(P)$ na mocy Faktu 4.8 i w konsekwencji Θ jest dobrze określona. $\square$

Fakt 4.10. Odwzorowanie Θ jest bijekcją.

Dowód. Z racji, że Θ jest funkcją między dwoma zbiorami 6-elementowymi, wystarczy pokazać, że Θ jest „na”. Ustalmy dowolną pentadę P' . Na mocy Lematu 2.11 istnieje permutacja $\sigma \in S_G$ taka, że $\sigma(P) = P'$. W takim razie

$$\Theta(\sigma H) = \sigma(P) = P',$$

wiec P' jest w obrazie Θ . $\square$

Zauważmy, że wprost z definicji Θ jest odwzorowaniem S_6 -ekwiwariantnym. Zachodzi bowiem:

$$\Theta(\sigma \cdot \tau H) = \Theta((\sigma\tau)H) = (\sigma\tau)(P) = \sigma(\tau(P)) = \sigma \cdot \Theta(\tau H).$$

W takim razie możemy myśleć, że Θ utożsamia konstrukcję automorfizmu zewnętrznego grupy S_6 przy pomocy pentagrafów i H z bardziej geometryczną konstrukcją przy pomocy pentad.

Dodatkowo, zauważmy, że z powyższego wynika, że grupa $H < S_G$ to dokładnie grupa permutacji stabilizujących pentadę P . Stąd mimo, że „egzotyczna kopia” S_5 w S_6 nie jest stabilizatorem żadnego punktu (Lemat 3.2), to jest stabilizatorem innego naturalnego geometrycznego obiektu.

Literatura

- [1] A. Snowden R. Vakil B. Howard, J. Millson. A new description of the outer automorphism of S_6 , and the invariants of six points in projective space. *J. Comb. Theory Ser. A*, 115(4):345–392, 2008.
- [2] John Baez. *Some Thoughts on the Number 6*. <https://math.ucr.edu/home/baez/six.html>, 2015.
- [3] David Joyner. *Adventures in Group Theory*. The Johns Hopkins University Press, 2000.
- [4] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups*. Springer-Verlag, 1959.