

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: nauczycielska

Fraktale ściśle samopodobne - przykłady, wymiar fraktalny, wybrane własności

Wiktoria Adamska, Zuzanna Narożnik, Olena Zubets

Wrocław 2025

Praca napisana w ramach przedmiotu
"Zespołowy Projekt Specjalnościowy"
pod kierunkiem prof. dr. hab. Jacka
Świątkowskiego

Spis treści

1	Wprowadzenie	2
2	Podstawy teoretyczne	3
3	Dywan Sierpińskiego i inne pokrewne fraktale	7
3.1	Klasyczny dywan Sierpińskiego	7
3.2	Zmiana usuwanego kwadratu	9
3.3	Zmiana parametru skali	10
3.4	Zmiana ilości usuwanych kwadratów	14
4	Krzywa Kocha i inne pokrewne fraktale	18
4.1	Klasyczna krzywa Kocha	18
4.2	Asymetryczna krzywa Kocha (lewostronna)	20
4.3	Zmiana parametru skali	22
4.4	Zmiana kąta	25
5	Zbiór Cantora i inne pokrewne fraktale	31
5.1	Klasyczny Zbiór Cantora	31
5.2	Zmiana parametru skali	32
5.3	Zmiana długości usuwanego odcinka	34
5.4	Klasyczny pył Cantora	36
5.5	Zmiana szerokości usuwanych pasów pyłu Cantora	37

1 Wprowadzenie

Fraktale to niezwykle obiekty matematyczne budzące zainteresowanie zarówno wśród naukowców, jak i artystów. Charakteryzują się one złożoną strukturą, którą często trudno jest opisać za pomocą klasycznych pojęć geometrii euklidesowej. Pomimo swej złożoności, nietrudno o spostrzeżenie ich w otaczającym nas świecie - czy to w kształcie płatków śniegu, koronie drzew, czy nawet linii brzegowej.

Spośród wielu spotykanych rodzajów fraktali, znaczną uwagę przykuwają fraktale ściśle samopodobne. Ich struktura jest o tyle szczególna, iż charakteryzują się specyficzną cechą - każdy fragment figury jest pomniejszoną kopią całości. To właśnie one będą obszarem zainteresowań tej pracy. Motywacją do podjęcia tego tematu była chęć dogłębszego zrozumienia cechy samopodobieństwa, a także jak pewne modyfikacje w schemacie budowy klasycznych i dobrze znanych fraktali wpływają na ich strukturę, ale przede wszystkim na wielkość wymiaru fraktalnego.

W niniejszej pracy przyjrzymy się takim przykładom "podręcznikowych" fraktali, jak dywan Sierpińskiego, krzywa Kocha oraz zbiór Cantora. Nim przejdziemy do zasadniczej części pracy, w Rozdziale 2 przedstawimy zagadnienia teoretyczne, które posłużą nam do dalszych rozważań o badanych przypadkach. W Rozdziale 3 Wiktoria Adamska przybliży nam dywan Sierpińskiego oraz rozważy wybrane modyfikacje w kontekście wymiaru. Z kolei w Rozdziale 4 Zuzanna Narożnik podejmie się badania zmian wymiaru w modyfikacjach dla krzywej Kocha. Na koniec w Rozdziale 5 Olena Zubets przeanalizuje zmienność wymiaru w przypadku zbioru Cantora.

2 Podstawy teoretyczne

Nim przejdziemy do zasadniczej części pracy, przedstawimy pewne zagadnienia teoretyczne dotyczące fraktali i wymiaru, którymi będziemy się posługiwać w późniejszych rozważaniach. Zaczniemy od zdefiniowania pojęcia fraktala jako figury ściśle samopodobnej.

Definicja 2.1. *Figura X jest ściśle samopodobna, gdy jest ona sumą $X = X_1 \cup \dots \cup X_N$ figur X_i , które są podobne do X w tej samej skali $s \in (0, 1)$. Ponadto figury X_i nie zachodzą na siebie, to znaczy wnętrza X_i w X są rozłączne (dopuszczamy jedynie nachodzenie na siebie brzegami).*

W naszym przypadku, opisując rozmaite mniej powszechnie znane fraktale, skupimy się jedynie na pierwszej części zaprezentowanej definicji. Założenie rozłączności wnętrza uznamy za "oczywiste", czy też "z góry przyjęte", bez dodatkowego dowodu i pominiemy je w rozważaniach. Natomiast, przyda nam się również pojęcie wymiaru fraktalnego. W praktyce stosuje się często tzw. metodę pudełkową polegającą na umieszczeniu badanego obrazu/obiektu na regularnej siatce, a następnie policzeniu ilości zajmowanych pudełek przez ten obiekt. My jednak posłużymy się bardziej teoretyczną i w naszym przypadku, bardziej użyteczną, definicją wymiaru fraktalnego.

Definicja 2.2. *Ogólnym wymiarem fraktalnym zbioru X punktów n -wymiarowej przestrzeni nazwiemy liczbę D taką, że:*

$$(2.1) \quad D = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log N(s)}{\log(1/s)},$$

gdzie $N(s)$ jest minimalną liczbą n -wymiarowych kostek domkniętych o krawędzi długości s potrzebnych do pokrycia zbioru X [1].

Dla fraktali ściśle samopodobnych wymiar fraktalny jest tym samym, co wymiar podobieństwa [5]. Zatem, możemy posłużyć się prostszym sposobem na wyliczenie wymiaru fraktalnego, który zdefiniujemy następująco.

Definicja 2.3. *Wymiarem samopodobieństwa figury ściśle samopodobnej X nazwiemy liczbę D taką, że:*

$$(2.2) \quad N = s^{-D},$$

gdzie N to liczba podobnych figur X_i składających się na X , jak w Definicji 2.1, natomiast s to ich skala podobieństwa w stosunku do całej figury X . Liczbę tą oznaczmy też symbolem $\dim^F(X)$.

Motywacją dla zdefiniowania wymiaru fraktalnego jako wymiaru samopodobieństwa w przypadku fraktali ściśle samopodobnych jest to, że z definicji samopodobieństwa wiemy, że zbiór $X = X_1 \cup \dots \cup X_N$ ma kształt, który jest podobny do kształtu fragmentów X_i tego zbioru w ustalonej skali. Zatem, aby odtworzyć cały zbiór X , potrzebujemy N części X_i podobnych do zbioru X w skali s . Rozważmy kilka przykładów :

Przykład 2.4. Weźmy odcinek o długości 1 i oznaczmy go jako X . Podzielmy go na dwie równe części. Zauważmy, że jest to figura samopodobna. Przy podziale odcinka na dwie równe części, otrzymujemy odcinki X_1, X_2 , gdzie $X = X_1 \cup X_2$, a każdy z X_i jest podobny do X w skali $s = \frac{1}{2}$. Zatem, chcąc odtworzyć X potrzebujemy $N = 2$ części X_i podobnych do X w skali $s = \frac{1}{2}$, czyli wymiar $D = 1$, gdyż $2 = (\frac{1}{2})^{-1}$.

Przykład 2.5. Rozważmy kwadrat X o boku długości 1, a następnie podzielmy go na 4 kwadraty podobne. Jest to oczywiście figura ściśle samopodobna, gdyż dzieląc kwadrat w ten sposób otrzymujemy kwadraty X_1, X_2, X_3, X_4 podobne do X w skali $s = \frac{1}{2}$, gdzie $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4 = X$. Zatem, chcąc odtworzyć X potrzebujemy $N = 4$ części X_i podobnych do X w skali $s = \frac{1}{2}$, czyli wymiar $D = 2$, bo $4 = (\frac{1}{2})^{-2}$.

Przykład 2.6. Spójrzmy teraz na sześciąt X o boku długości 1 i podzielmy go na 8 sześciątów podobnych. Otrzymamy figurę ściśle samopodobną, gdyż po podziale sześciąt na 8 sześciątów podobnych mamy sześciąty $X_1, \dots, X_8$, gdzie $X = X_1 \cup \dots \cup X_8$, a każdy X_i jest podobny do X w skali $s = \frac{1}{2}$. A zatem, aby odtworzyć X , potrzebujemy $N = 8$ części X_i podobnych do X w skali $s = \frac{1}{2}$. Z tego wynika, że wymiar $D = 3$, dlatego że $8 = (\frac{1}{2})^{-3}$.

Zwróćmy uwagę na to, że gdybyśmy w Przykładzie 2.5 chcieli podzielić kwadrat nie na 4, a na 9 równych części, to również byłaby to figura ściśle samopodobna, gdzie $X = X_1 \cup \dots \cup X_9$, tyle że X_i jest podobny do X w skali $s = \frac{1}{3}$. Jednakże wymiar się nie zmienia, bo mamy $9 = (\frac{1}{3})^{-2}$. Zatem wymiar ten nie zależy od sposobu podziału, co można pokazać również dla pozostałych przykładów.

Zatem, $N = s^{-D}$, gdzie N to ilość kopii, s to skala podobieństwa, a D to wymiar obiektu. W podanych przykładach obiekty mają wymiar całkowity, ale dopuszczalny (i często spotykany) jest wymiar ułamkowy, co zobaczymy w dalszej części tej pracy. Stąd otrzymujemy podany wzór na wymiar fraktalny jako wzór na wymiar samopodobieństwa dla fraktali ściśle samopodobnych.

Przekształcając wersję (2.2) wzoru na wymiar samopodobieństwa, otrzymujemy równoważną postać:

$$(2.3) \quad D = \frac{\log(N)}{\log(1/s)}.$$

Taka wersja wzoru na wymiar fraktalny będzie dla nas wygodniejsza w zastosowaniu w praktyce przy dalszych rozważaniach na temat fraktali i ich wymiarów samopodobieństwa.

Lemat 2.7. Jeżeli X jest ściśle samopodobny o wymiarze fraktalnym $\dim^F(X)$, zaś X' jest podobny do X , to X' też jest ściśle samopodobna i zachodzi równość wymiarów:

$$\dim^F(X') = \dim^F(X)$$

Dowód. Z faktu, że X jest ściśle samopodobny, wiemy, że istnieje N rozłącznych kopii zbioru X podobnych do niego w tej samej skali $s \in (0, 1)$, tj. $X = X_1 \cup \dots \cup X_N$, gdzie $X_i \sim X$ w skali s . Ponieważ X' jest podobny do X w skali k , każdy z fragmentów X_i przekształca się w fragment X'_i podobny do X' w tej samej skali s (ponieważ przekształcenia podobieństwa zachowują relacje skalowe). Otrzymujemy więc, że $X' = X'_1 \cup \dots \cup X'_N$ jest

zbiorem złożonym z N fragmentów podobnych do X' w tej samej skali s , zatem również spełnia definicję figury ściśle samopodobnej. Ponieważ liczba kopii N i skala podobieństwa s pozostają bez zmian, wymiar fraktalny zbioru X' obliczamy identycznym wzorem:

$$\dim^F(X') = \frac{\log N}{\log(1/s)} = \dim^F(X).$$

□

Choć nie będzie to głównym przedmiotem dalszych rozważań, warto wspomnieć o pojęciu *miary fraktalnej*, które często towarzyszy analizie fraktali. Jest to pojęcie uzupełniające, które pozwala precyzyjniej opisać „rozmiar” zbiorów o niecałkowitym wymiarze i dopełnia intuicję wynikającą z samego wymiaru. W niniejszej pracy nie będziemy wchodzić w formalną konstrukcję tego pojęcia, lecz ograniczymy się do ogólnej definicji i dwóch podstawowych własności.

Definicja 2.8. *Miara fraktalna* zbioru ściśle samopodobnego X (oznaczana jako $m^F(X)$), wyraża się wzorem:

$$(2.4) \quad m^F(X) = \text{diam}(X)^{\dim^F(X)},$$

gdzie $\text{diam}(X)$ oznacza średnicę zbioru X , a $\dim^F(X)$ to jego wymiar fraktalny.

Miara fraktalna posiada kilka istotnych własności, z których dwie najważniejsze to:

Własność 2.8.1. *Jeśli X' jest podobna do zbioru ściśle samopodobnego X w skali k , to*

$$(2.5) \quad m^F(X') = k^{\dim^F(X)} \cdot m^F(X).$$

Dowód: Z definicji miary fraktalnej mamy:

$$m^F(X') = \text{diam}(X')^{\dim^F(X')}.$$

Ponieważ figura X i X' są podobne, z Lematu 2.7 mamy:

$$\dim^F(X') = \dim^F(X).$$

Ponieważ X' jest podobny do zbioru X w skali k , to

$$\text{diam}(X') = k \cdot \text{diam}(X),$$

ponieważ średnia w przypadku podobieństwa geometrycznego skaluje się tak jak długości. Podstawiając do Definicji 2.8 otrzymujemy:

$$m^F(X') = (k \cdot \text{diam}(X))^{\dim^F(X)} = k^{\dim^F(X)} \cdot \text{diam}(X)^{\dim^F(X)} = k^{\dim^F(X)} \cdot m^F(X).$$

□

Własność 2.8.2. *Jeśli zbiór X jest ściśle samopodobny z rozkładem na $X_1, X_2, \dots, X_m$, (jak w Definicji 2.1) to:*

$$(2.6) \quad m^F(X) = \sum_{i=1}^m m^F(X_i).$$

Dowód: Zakładamy, że zbiory $X_1, \dots, X_m$ nie zachodzą na siebie i każde X_i jest podobne do X w skali s (patrz Definicja 2.1). Zatem korzystając z Własności 2.8.1, miara każdego X_i wynosi:

$$m^F(X_i) = s^{\dim^F(X)} \cdot m^F(X).$$

Sumując po wszystkich m składnikach:

$$\sum_{i=1}^m m^F(X_i) = m \cdot s^{\dim^F(X)} \cdot m^F(X)$$

Z definicji wymiaru samopodobieństwa (2.2) mamy $m = s^{-\dim^F(X)}$. Podstawiając to wyrażenie za m do prawej strony w powyższej formule na sumę i skracając potęgi, otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^m m^F(X_i) = m \cdot s^{\dim^F(X)} \cdot m^F(X) = s^{-\dim^F(X)} \cdot s^{\dim^F(X)} \cdot m^F(X) = m^F(X)$$

□

3 Dywan Sierpińskiego i inne pokrewne fraktale

Rozdział ten poświęcimy fraktalowi, który nazywany jest dywanem Sierpińskiego, oraz pokrewnym mu fraktalom bazującym na tej samej konstrukcji. Zbadamy, czy i jak niektóre modyfikacje wprowadzane do klasycznej wersji fraktala wpływają na jego wymiar fraktalny. W Podrozdziale 3.1 omówimy klasyczny dywan Sierpińskiego, w 3.2 zamienimy usuwany kwadrat, w 3.3 zmniejszymy skalę podobieństwa, a w Podrozdziale 3.4 zajmiemy się zmianą ilości usuwanych kwadratów.

3.1 Klasyczny dywan Sierpińskiego

Zapewne pierwszym skojarzeniem z nazwiskiem "Sierpiński" jest równie, a może i nawet bardziej znany fraktal - trójkąt Sierpińskiego. Choć schemat budowy (powstawania) obu z nich (fraktali) ma pewne cechy wspólne, my jednak skupimy się jedynie na dywanie Sierpińskiego.

Gdybyśmy chcieli przedstawić najprostszą charakteryzację dywanu Sierpińskiego, powiedzielibyśmy, że jest to fraktal powstały z podziału kwadratu na dziewięć mniejszych kopii tego kwadratu (siatka 3×3) oraz poprzez usunięcie środkowego z nich. Schemat ten powtarzamy dla wszystkich pozostałych kwadratów podziału w nieskończoność. Jest to definicja poprawna, ale mówiąca nam za mało o strukturze i parametrach dywanu Sierpińskiego, dlatego skupimy się jednak na jego formalnej definicji.

Definicja 3.1. (Formalna konstrukcja dywanu Sierpińskiego)

Niech S_0 będzie kwadratem przedziału jednostkowego I , czyli :

$$S_0 = I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1]\}$$

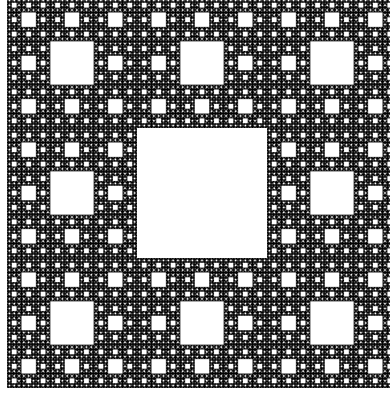
S_0 dzielimy na 9 przystających kwadratów, każdy o boku długości $\frac{1}{3}$, następnie usuwamy wnętrze środkowego. Sumę pozostałych 8 kwadratów oznaczamy S_1 . Z kolei każdy z 8 kwadratów z S_1 dzielimy na 9 przystających kwadratów o boku długości $\frac{1}{3^2}$ i usuwamy wnętrze środkowego. Pozostałą sumę 8^2 kwadratów oznaczamy jako S_2 . Kontynuując rozumowanie określamy indukcyjnie S_n , który jest sumą 8^n kwadratów o bokach długości 3^{-n} . Przecięcie :

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$$

nazywamy dywanem Sierpińskiego. [2] [3]

Powyższą konstrukcję możemy uogólnić na dowolną długość boku kwadratu, gdyż istotny jest stosunek długości boków (czyli skala podobieństwa), a ten zawsze z przystawania będzie wynosił $\frac{1}{3}$ długości poprzedniego

Przykładowa wizualizacja dywanu Sierpińskiego po sześciu krokach przedstawia się, jak na Rysunku 1.



Rysunek 1: Klasyczny dywan Sierpińskiego [4]

Mówiąc o klasycznym dywanie Sierpińskiego, warto wspomnieć o jego dwóch własnościach. Pierwszą z nich jest wymiar fraktalny, który będzie głównym obszarem rozważań w tej pracy. Zwróćmy uwagę, że dywan Sierpińskiego jest figurą ściśle samopodobną. Oznaczmy fraktal taki, jak w konstrukcji z Definicji 3.1 jako $S = X$. Przy podziale kwadratu $K = S_0$ na 9 kwadratów przystających i usunięciu środkowego z nich otrzymujemy $K_1, \dots, K_8$. Każdy K_i (włącznie z usuniętym K_9) jest podobny do wyjściowego $K = S_0$ w skali $s = \frac{1}{3}$, gdyż dzieląc kwadrat na 9 równych części, dzielimy bok na 3 równe części. Definiujemy $X_i = K_i \cap X$ ("kwadraty podziurawione"), gdzie $X = X_1 \cup \dots \cup X_8$. Wyjaśnijmy, dlaczego X_i są podobne do X w skali $s = \frac{1}{3}$. Schemat podziału na 9 przystających kwadratów i usuwania środkowego z nich powtarzamy dla każdego K_i i otrzymujemy kwadraty $K_{i1}, \dots, K_{i8}$, które są podobne do K_i w skali $s = \frac{1}{3}$. Oznaczmy $K_{i1} \cup \dots \cup K_{i8}$ jako U_i (usunięty jeden środkowy kwadrat K_{i9}), a K bez środkowego kwadratu jako $K \setminus K_9$. Każdy bok U_i stanowi $\frac{1}{3}$ boku $K \setminus K_9$ - zarówno odcinki zewnętrzne, jak i wewnętrzne, czyli boku usuniętego w środku kwadratu (wiemy, że K_{i9} jest podobny do K_9 w skali $s = \frac{1}{3}$). A zatem U_i są podobne do $K \setminus K_9$ w skali $s = \frac{1}{3}$. Takie rozumowanie moglibyśmy kontynuować dla kolejnych iteracji, a więc w ostateczności dochodzimy do tego, że $X_i = K_i \cap X$ jest podobny do X w skali $s = \frac{1}{3}$.

Istotne jest również to, że powstałe X_i nie zachodzą na siebie - stykają się jedynie na krawędziach. Zatem, odwołując się do równoważnej postaci wzoru na wymiar samopodobieństwa (2.3) otrzymujemy :

$$D = \frac{\log(8)}{\log(1/(1/3))} = \frac{\log(8)}{\log(3)} \approx 1.892789,$$

co daje nam wynik z przedziału $(1, 2)$, czyli między wymiarem prostej a wymiarem figury płaskiej.

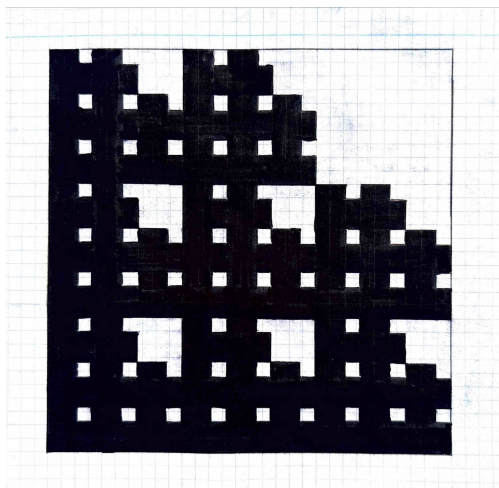
Druga własność, jaką przywołamy, dotyczy pola dywanu Sierpińskiego, które jest zerowe. Powołując się na tę samą konstrukcję oraz powyższe rozważania, wiemy, że pole każdego z powstałych kwadratów w danym kroku jest 9 razy mniejsze niż w poprzednim. Czyli przykładowo dla S_1 pole powstałej figury wynosi $\frac{8}{9}$, dla S_2 jest to $(\frac{8}{9})^2$, a dla S_3 $(\frac{8}{9})^3$. Po n krokach pole figury S_n wynosi $(\frac{8}{9})^n$. Jako że przecięcie $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ zawiera się w S_n dla każdego n , a pola S_n dążą do 0 przy $n \rightarrow \infty$, to pole przecięcia S , czyli pole dywanu Sierpińskiego jest zerowe.

3.2 Zmiana usuwanego kwadratu

Wiemy już, czym jest dywan Sierpińskiego, jak wygląda jego konstrukcja oraz jaki ma wymiar fraktalny, więc w tym podrozdziale zajmiemy się jego pierwszą modyfikacją. Zbadamy, jak zmieniłby się fraktal, a przede wszystkim jego wymiar samopodobieństwa, gdybyśmy zamiast środkowego kwadratu usuwali inny z pozostałych. Mogłoby się wydawać, że nie jest to szczególnie trudne i istotne zagadnienie, jednakże okaże się ono być kluczowe do późniejszych rozważań o innych modyfikacjach. Spodziewalibyśmy się, że wymiar fraktalny się nie zmieni, gdyż wzór na niego nie jest uzależniony od położenia usuwanego kwadratu na siatce. By się o tym przekonać, przeprowadzimy następujące rozważania.

Rozważania i wnioski

Zacznijmy od konstrukcji takiego fraktala. Bierzemy $S_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1]\}$, czyli kwadrat jednostkowy. Następnie dzielimy go na 9 przystających kwadratów, gdzie każdy ma bok długości $\frac{1}{3}$, a następnie zamiast usuwać środkowy z nich, pozbedzimy się prawego górnego, uzyskując w ten sposób 8 kwadratów, których sumę oznaczamy S_1 . Krok ten powtarzamy, dzieląc każdy z 8 kwadratów według tego samego schematu (jak w przypadku klasycznym), jak największy kwadrat początkowy, aż dochodzimy do n -tego kroku. Otrzymujemy S_n będący sumą 8^n kwadratów o bokach długości 3^{-n} , a przecięcie $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ będzie otrzymanym fraktalem. Ponownie zauważmy, że S jest fraktalem ściśle samopodobnym z tych samych powodów, co klasyczny dywan Sierpińskiego. Jest on sumą 8 fragmentów całości zawartych w kwadratach pierwszego podziału (tj. jak wcześniej $S = X_1 \cup \dots \cup X_8$, gdzie $X_i = K_i \cap S$, a K_i to kwadraty pierwszego podziału) podobnych do całego fraktala S . Skala podobieństwa s wynosi $\frac{1}{3}$, a pojedyncze części zawarte w kwadratach nie zachodzą na siebie - stykają się jedynie krawędziami. Konstrukcja pierwszych trzech kroków zaprezentowana jest na Rysunku 2.



Rysunek 2: Modyfikacja 1 dywanu Sierpińskiego (odręcznie)

Zauważmy, że konstrukcja zmodyfikowanego dywanu Sierpińskiego zawsze mówi o podziale kwadratu na kwadraty przystające i usunięciu jednego z nich. Mimo że otrzymujemy fraktal różniący się wyglądem od klasycznej jego wersji, pewne parametry z nim

związane są niezmiennie. Wciąż uzyskujemy 8^n kwadratów, a długości ich boków nadal stanowią $\frac{1}{3}$ długości poprzednich iteracji. Wymiar fraktalny otrzymanej modyfikacji prezentowałby się, jak poniżej:

$$D = \frac{\log(8)}{\log(1/(1/3))} = \frac{\log(8)}{\log(3)} \approx 1.892789$$

Zatem, wymiar fraktalny się nie zmienił w sytuacji, gdy usuwamy prawy górny kwadrat zamiast środkowego. Analogiczne rozumowania moglibyśmy przeprowadzić dla pozostałych 7 możliwości, a wynik pozostałby niezmienny. Dlatego możemy twierdzić, że zmiana usuwanego kwadratu w dywanie Sierpińskiego (przy podziale na 9 kwadratów) ze środkowego na jeden z ośmiu pozostałych, nie wpływa na wartość wymiaru fraktalnego tak zmodyfikowanej wersji.

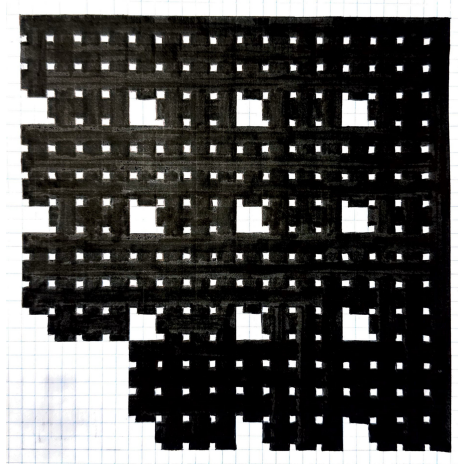
3.3 Zmiana parametru skali

Modyfikując znany nam już dywan Sierpińskiego, moglibyśmy zastanowić się, co by się zmieniło, zarówno w strukturze fraktala, jak i przede wszystkim w jego wymiarze, gdybyśmy zmieniali wartość parametru skali s , ale wciąż usuwali tylko jeden kwadrat tak, jak w klasycznej wersji. Dlatego w tym podrozdziale zbadamy wpływ takiej modyfikacji na wielkość wymiaru samopodobieństwa. Spodziewalibyśmy się, że zmniejszenie parametru skali s zwiększy wymiar, który dla odpowiednio małego $s \in (0, 1)$ byłby bliski $D = 2$, czyli nie większy niż wymiar pełnego kwadratu.

Rozważania i wnioski

Przede wszystkim, zacznijmy od skonstruowania przykładowego fraktala tego typu. Weźmy $S_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1]\}$. Przy wcześniejszych rozważaniach kwadrat ten dzieliliśmy na 9 przystających kwadratów, gdzie każdy miał bok długości $\frac{1}{3}$. Wtedy skala podobieństwa wynosiła $s = \frac{1}{3}$. Tym razem to parametr skali jest zmienny, a zatem - dla przykładu - zbadajmy podział na 16 kwadratów przystających, każdy o boku długości $\frac{1}{4}$. Następnie usuniemy jeden z nich, np. lewy dolny, gdyż z Podrozdziału 3.2 wiemy, że wybór usuwanego kwadratu w zmodyfikowanym dywanie Sierpińskiego nie wpływa na wartość wymiaru fraktalnego. W ten sposób otrzymujemy 15 kwadratów przystających, a ich sumę oznaczmy jako S_1 . Krok ten powtarzamy, dzieląc każdy z 15 kwadratów według tego samego schematu, jak w przypadku klasycznym, aż do n -tego kroku, gdzie otrzymujemy sumę S_n 15^n kwadratów o bokach długości 4^{-n} . Przecięcie $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ to konstruowany fraktal.

W tym przypadku figura S również jest ściśle samopodobna, jak w sytuacji z Podrozdziału 3.2, czy z klasycznej wersji dywanu. Jednakże różnicą w rozważaniach jest parametr skali, który tym razem nie wynosi $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{4}$ oraz liczba fragmentów całości to 15, nie 8. Fraktal S jest zatem sumą 15 fragmentów całości zawartych w kwadratach pierwszego podziału podobnych do S , czyli $S = X_1 \cup \dots \cup X_{15}$, gdzie $X_i = K_i \cap S$, a K_i to kwadraty pierwszego podziału. Tutaj skala podobieństwa wynosi $\frac{1}{4}$, a pojedyncze części zawarte w kwadratach stykają się tylko krawędziami. Omawianą konstrukcję dla pierwszych trzech kroków przedstawia Rysunek 3.



Rysunek 3: Modyfikacja 2 dywanu Sierpińskiego (odręcznie)

Skoro jest to fraktal ściśle samopodobny, to możemy wyznaczyć jego wymiar fraktalny przy pomocy wzoru na wymiar samopodobieństwa, gdzie $N = 15$, a $s = \frac{1}{4}$:

$$D = \frac{\log(15)}{\log(1/(1/4))} = \frac{\log(15)}{\log(4)} \approx 1.953445$$

Porównując otrzymaną wartość z wartością wymiaru dla $s = \frac{1}{3}$, czyli 1.892789, możemy zauważyć, że przy zmniejszeniu skali s z $\frac{1}{3}$ na $\frac{1}{4}$ wymiar fraktalny się zwiększył.

Jako, że rozważania o ścisłym samopodobieństwie przy innych wartościach skali będą analogiczne, wyznaczmy wymiar fraktalny przy pomocy wzoru na wymiar samopodobieństwa dla kilku innych wartości parametru s . Wtedy $N = \frac{1}{s^2} - 1$, gdyż wynika to z podobieństwa kwadratów. Skoro skala podobieństwa wynosi $s \in (0, 1)$, to przy podziale kwadratu jeden z boków dzielimy na $\frac{1}{s}$ odcinków równej długości. Zatem cały kwadrat dzielimy na $\frac{1}{s^2}$ jednakowych mniejszych kwadratów. Na koniec odejmujemy jeden z nich.

Przykład 3.2. Dla $s = \frac{1}{2}$ liczba kwadratów wynosi $N = (1/(1/2))^2 - 1 = 4 - 1 = 3$. Wtedy $D = \frac{\log(3)}{\log(1/(1/2))} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1.584963$.

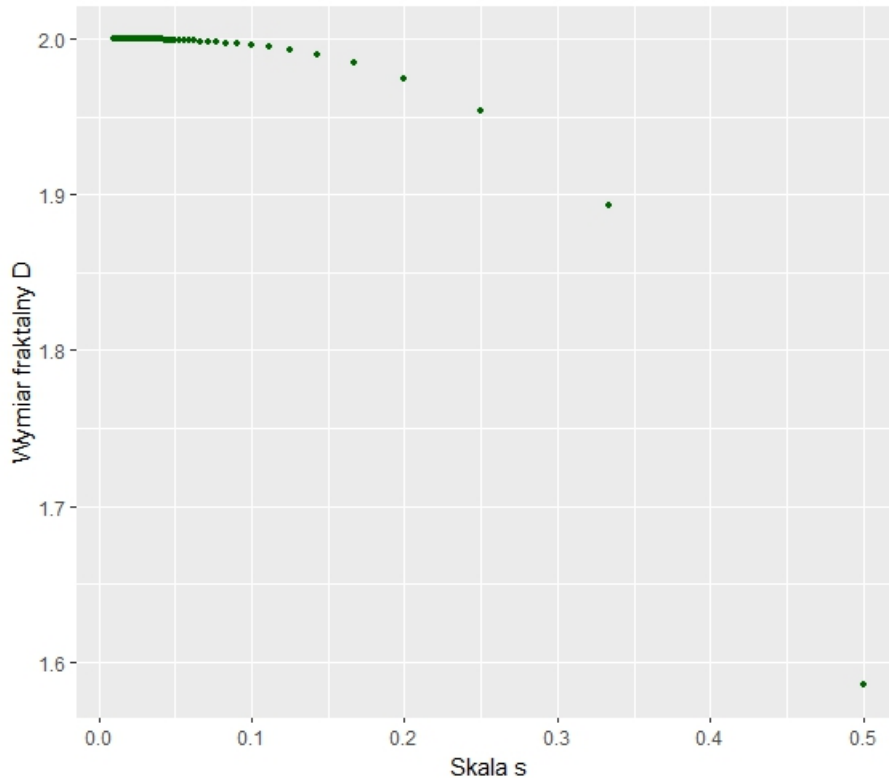
Przykład 3.3. Dla $s = \frac{1}{5}$ mamy $N = (1/(1/5))^2 - 1 = 25 - 1 = 24$ i $D = \frac{\log(24)}{\log(1/(1/5))} = \frac{\log(24)}{\log(5)} \approx 1.974636$.

Przykład 3.4. Dla $s = \frac{1}{6}$ N wynosi 35, a $D = \frac{\log(35)}{\log(6)} \approx 1.984278$.

Przykład 3.5. Weźmy $s = \frac{1}{10}$, wtedy $N = 100 - 1 = 99$, a $D = \frac{\log(99)}{\log(10)} \approx 1.995635$.

Na podstawie przedstawionych przykładów wydawałoby się, że wraz ze zmniejszaniem się skali, przy jednoczesnym odejmowaniu tylko jednego kwadratu przy każdym podziale, wymiar D samopodobieństwa rośnie. Do tego zaprezentowane przykłady nie przekraczają wartości wymiaru 2. Aby potwierdzić nasze domysły, narysujemy w programie RStudio wykres wartości D w zależności od parametru $s \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset (0, 1)$, gdyż parametr s będzie dyskretny, a nie ciągły, co wynika z tego, że zależy on od podziału kwadratu na naturalną ilość mniejszych kwadratów. Stworzymy najpierw wektor wartości dla zmiennej

s , a następnie wektor wyliczonych wartości wymiaru D . Otrzymane dane zapiszemy w ramce danych zawierającej oba wektory, ale przekształcone w kolumny. Z otrzymanych danych utworzymy wykres zależności D od s , którego osie zoptymalizujemy tak, aby były one czytelne i przydatne do dalszych rozważań, tzn. zakres zmiennej s będzie od $\frac{1}{100}$ do 0.5 (dla $n \in \{2, 3, \dots, 100\}$, gdzie $s = \frac{1}{n}$), gdyż dla s większych od 0.5 wykres ten nie będzie miał sensu z tego względu, że dla $n = 1$ mamy $s = 1$, a z założenia wartość ta nie jest osiągnięta (dla fraktali $s \in (0, 1)$, a więc wartość 1 nie może zachodzić). Natomiast dla wartości D oś będzie miała zakres od 1.55 do 2. Wykres prezentuje się, jak na Rysunku 4.



Rysunek 4: Wykres zależności wymiaru fraktalnego D od parametru skali s

Przyglądając się wykresowi z Rysunku 4 możemy zauważyć, że dla wartości s bliższych zera (tj. $s = \frac{1}{100}$) wymiar fraktalny jest bliski 2. Wraz ze wzrostem parametru s wymiar ten zaczyna maleć - z początku powoli i minimalnie, aż spadek ten zaczyna znacząco przyspieszać. Wygląd wykresu nie powinien zaskakiwać, jest on raczej spodziewany. Wyobraźmy sobie sytuację, w której konstruujemy fraktal, jak ten omawiany w tym podrozdziale. Jeśli zmniejszymy parametr skali, tzn. zwiększymy ilość kwadratów pierwszego podziału, to przy odjęciu jednego z nich pole "zamalowane" przez pozostałe kwadraty będzie większe, niż gdybyśmy tę skalę zwiększyli. Wynika to z tego, że usuwany kwadrat będzie mniejszy (będzie miał mniejsze pole). Dlatego w konsekwencji, gdy wykonamy n kroków podziału dla np. $s = \frac{1}{4}$ otrzymamy "gęstszy" fraktal niż dla $s = \frac{1}{3}$. Zatem zmniejszenie parametru skali zwiększa wymiar fraktalny.

Sprawdźmy jeszcze, czy przy pomocy teoretycznych wyliczeń potwierdzi się, że granicą wymiaru fraktalnego jest wartość 2 w badanej modyfikacji dywanu Sierpińskiego.

Formalnie powinniśmy sprawdzić, czy przy $n \rightarrow \infty$, gdzie $s = \frac{1}{n}$ granica ciągu wartości wymiaru dąży do 2, jednakże my zajmiemy się badaniem powiązanej funkcji ciągłej wymiaru samopodobieństwa przy $s \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(1/s)} &\stackrel{N=\frac{1}{s^2}-1}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log(\frac{1}{s^2}-1)}{\log(\frac{1}{s})} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{reguła de l'Hospitala}}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\frac{-2}{s^3}}{\frac{1}{s^2}-1} \right) : \left(\frac{\frac{-1}{s^2}}{\frac{1}{s}} \right) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\frac{-2}{s^3} \cdot s^3}{\frac{1}{s^2}-1/s^3} \right) : \left(\frac{\frac{-1}{s^2} \cdot s^2}{\frac{1}{s} \cdot s^2} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\left(\frac{-2}{s-s^3} \right) : \left(\frac{-1}{s} \right) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{-2s}{(s-s^3)(-1)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{1-s^2} = 2 \end{aligned}$$

Dzięki powyższym obliczeniom przekonaaliśmy się, że faktycznie granicą wymiaru samopodobieństwa dla fraktali ściśle samopodobnych przy zbieganiu parametru skali s do 0 jest wartość 2.

Zatem, przedstawione w tym podrozdziale rozważania potwierdzają nasze spekulacje dotyczące modyfikacji dywanu Sierpińskiego przy zmianie parametru skali s . Zmniejszenie wartości skali zwiększa wymiar fraktalny D , a granicą tego wymiaru przy coraz mniejszych wartościach s jest liczba 2.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na miarę Lebesgue'a (tj. pole) omawianych zmodyfikowanych fraktali. Gdy omawialiśmy uzyskane na wykresie wyniki oraz ich wyjaśnienia, powiedzieliśmy, że: "dla np. $s = \frac{1}{4}$ otrzymamy "gęstszy" fraktal niż dla $s = \frac{1}{3}$ ", co mogłoby budzić pewne wątpliwości, czy w takim razie "gęstszy" fraktal ma większe pole. Otóż, nie byłoby to prawdziwe stwierdzenie. Pojęcie "gęstszy" odnosi się do aspektów wizualnych samego fraktala, czyli do finalnego wyglądu jego struktury. Jednakże pole w obu przypadkach (ale i również we wszystkich pozostałych, tj. dla różnych wartości s) wynosi 0. Zastanówmy się, dlaczego tak jest. W Podrozdziale 3.1 wspomnieliśmy, że w konstrukcji klasycznego dywanu Sierpińskiego pole dla n -tego podziału wynosi $S_n = (\frac{8}{9})^n$. Przecięcie $\cap_{n=1}^{\infty} S_n = S \subset S_n$ dla każdego n , a $S_n \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, zatem pole S jest zerowe. W ogólnym przypadku, omawianym w tym podrozdziale, dla pierwszego podziału pole S_1 wynosi $S_1 = \frac{\frac{1}{s^2}-1}{\frac{1}{s^2}}$, jednakże jest to dość nieczytelne, zatem wprowadzimy klarowniejsze oznaczenia. Niech $s = \frac{1}{k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, czyli $k = \frac{1}{s}$. Wtedy mamy, że $S_1 = \frac{k^2-1}{k^2}$ (co bardziej przypomina rozważania dla klasycznego dywanu Sierpińskiego), gdyż pole każdego z kwadratów wynosi $k^2 - 1$, a w danym kroku jest ono k^2 razy mniejsze niż w poprzednim. Zatem dla S_2 mamy $S_2 = \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^2$, a dla S_3 jest to $\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^3$. Wtedy po n krokach pole figury S_n to $S_n = \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)^n$. Przecięcie $\cap_{n=1}^{\infty} S_n = S$ zawiera się w S_n dla każdego n . Pola S_n dążą do 0 przy $n \rightarrow \infty$, co przedstawimy w następującym rozumowaniu.

$$\left(\frac{k^2-1}{k^2} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)^n$$

Skoro $s \in (0, 1) \cap \mathbb{N}$ i $s = \frac{1}{k}$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$, to:

$$0 < \frac{1}{k^2} < 1, \quad -1 < -\frac{1}{k^2} < 0, \quad 0 < 1 - \frac{1}{k^2} < 1$$

A zatem $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. W takim razie pole przecięcia S , czyli omawianych fraktali, jest zerowe w każdym przypadku.

3.4 Zmiana ilości usuwanych kwadratów

Jako ostatnią modyfikację, proponujemy zmianę ilości usuwanych kwadratów. Oznacza to, że zbadamy, jak zachowuje się wymiar fraktalny w sytuacji, gdy zmienną wielkością jest ilość usuwanych kwadratów, która będzie stała przy każdym podziale, tj. gdybyśmy przy każdym kroku podziału usuwali m kwadratów, gdzie $s = \frac{1}{k}$ jest ustalone oraz m zmienia się od 1 do $k^2 - 1$, a $k \in \mathbb{N}_+$. Dzięki temu, że omówiliśmy wcześniej zachowanie się wymiaru w sytuacji, gdy zmieniamy jeden usuwany kwadrat (miejsce jego usuwania) oraz przy zmianie parametru skali s , będziemy mogli swobodnie korzystać z otrzymanych wniosków w celu pogłębienia analizy w tym podrozdziale. Spodziewalibyśmy się, że dla ustalonej skali s zwiększenie ustalonej dla danego podziału liczby m usuwanych kwadratów (tj. usuwanie np. zawsze 3 kwadratów w każdym kroku podziału) zmniejsza wymiar fraktalny.

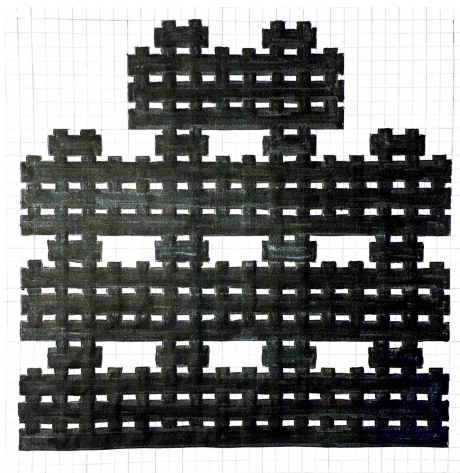
Rozważania i wnioski

Standardowo, zaczniemy od konstrukcji przykładowego fraktala, który będzie spełniał założenia omawianej modyfikacji. Weźmy $S_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0, 1]\}$. Dla przykładu założymy, że dzielimy kwadrat na 16 kwadratów przystających, gdzie każdy ma bok długości $\frac{1}{4}$. Następnie usuńmy dwa z nich, np. prawy górny oraz lewy górny. W ten sposób otrzymujemy 14 kwadratów przystających, a ich sumę oznaczmy jako S_1 . Krok ten oczywiście powtarzamy dla każdego z 14 pozostałych kwadratów i dostajemy sumę S_2 14² kwadratów, gdzie każdy ma bok długości 4^{-2} . Schemat ten powtarzamy nieskończenie wiele razy, otrzymując w ogólnym n -tym kroku sumę S_n 14 ^{n} kwadratów o bokach długości 4^{-n} . Wtedy przecięcie $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ będzie naszym skonstruowanym fraktalem. Rysunek 5 (poniżej) przedstawia figurę S_3 otrzymaną po 3 krokach wyżej opisanej konstrukcji, co jest przybliżoną ilustracją naszego końcowego fraktala S .

Otrzymany fraktal S jest figurą ściśle samopodobną. Wyjaśnienie tego stwierdzenia będzie zbliżone do tego dla klasycznego dywanu Sierpińskiego oraz zmodyfikowanej wersji w Podrozdziale 3.3. Oznaczmy fraktal S z przedstawionej konstrukcji jako $S = X$, aby nie zaszła kolizja oznaczeń w późniejszych rozważaniach, a następnie podzielmy pierwszy kwadrat $K = S_0$ na 16 kwadratów przystających. Z Podrozdziału 3.2 wiemy, że miejsce usuwanego kwadratu nie wpływa na wymiar fraktalny, zatem z otrzymanych 16 kwadratów usuńmy dwa z nich - w tym przypadku prawy górny i lewy górny, ale możemy to uogólnić dla dowolnych dwóch kwadratów. Dostajemy więc kwadraty $K_1, \dots, K_{14}$. Każdy K_i (włącznie z usuniętymi K_{15} i K_{16}) jest podobny do pierwotnego $K = S_0$ w skali $s = \frac{1}{4}$ z przystawianiem kwadratów. Definiujemy $X_i = K_i \cap X$, gdzie $X = X_1 \cup \dots \cup X_{14}$. X_i są podobne do X w skali $s = \frac{1}{4}$, co postaramy się teraz wyjaśnić. Powtórzmy zaproponowany schemat dzielenia dla każdego K_i , a wtedy otrzymamy kwadraty $K_{i1}, \dots, K_{i14}$, które są podobne do K_i w skali $s = \frac{1}{4}$. Oznaczmy $K_{i1} \cup \dots \cup K_{i14}$ jako U_i (bez usuniętych dwóch kwadratów K_{i15} i K_{i16}), a K bez dwóch kwadratów jako $K \setminus (K_{15} \cup K_{16})$. Każdy bok U_i stanowi $\frac{1}{4}$ boku $K \setminus (K_{15} \cup K_{16})$ (zarówno wewnętrzne, jak i zewnętrzne odcinki, bo K_{i15} oraz K_{i16} są podobne do odpowiednio K_{15} i K_{16} w skali $s = \frac{1}{4}$). Zatem U_i są podobne do $K \setminus (K_{15} \cup K_{16})$. Oczywiście rozumowanie to kontynuujemy dla kolejnych iteracji i w

końcu otrzymujemy, że $X_i = K_i \cap X$ jest podobny do X .

Skala podobieństwa wynosi $\frac{1}{4}$, a pojedyncze części zawarte w kwadratach stykają się jedynie na krawędziach. Poniżej prezentujemy wspomniany wcześniej Rysunek 5.



Rysunek 5: Modyfikacja 3 dywanu Sierpińskiego (odręcznie)

Z racji tego, że otrzymany fraktal jest ściśle samopodobny, wyznaczmy jego wymiar fraktalny przy użyciu wzoru na wymiar samopodobieństwa dla $s = \frac{1}{4}$ i $N = 14$:

$$D = \frac{\log(14)}{\log(1/(1/4))} = \frac{\log(14)}{\log(4)} \approx 1.903677$$

Przywołując wartość wymiaru fraktalnego z Podrozdziału 3.3 dla $s = \frac{1}{4}$, ale $N = 15$, tj. 1.953445, widzimy, że wymiar samopodobieństwa się zmniejszył, gdy wartość N zmalała, czyli liczba odejmowanych kwadratów zwiększyła się z 1 do 2. Jako że wszystkie rozważania dotyczące ścisłego samopodobieństwa moglibyśmy uogólnić dla dowolnej liczby usuwanych kwadratów (wystarczy skorzystać z wniosków z Podrozdziału 3.2 o wymiarze przy zmianie usuwanego kwadratu oraz odpowiednio oznaczyć otrzymane fragmenty całości zawartych w kwadratach pierwszego podziału, których liczba zależy od ich usuwanej liczby), zobaczmy, jak będzie się zmieniał wymiar fraktalny w sytuacji, gdy parametr skali będzie niezmienny, tj. będzie wynosił $s = \frac{1}{4}$, ale liczba N będzie malała.

Przykład 3.6. Gdy odejmujemy **trzy** kwadraty, czyli gdy $N = 13$, wymiar fraktalny wynosi $D = \frac{\log(13)}{\log(1/(1/4))} = \frac{\log(13)}{\log(4)} \approx 1.85022$.

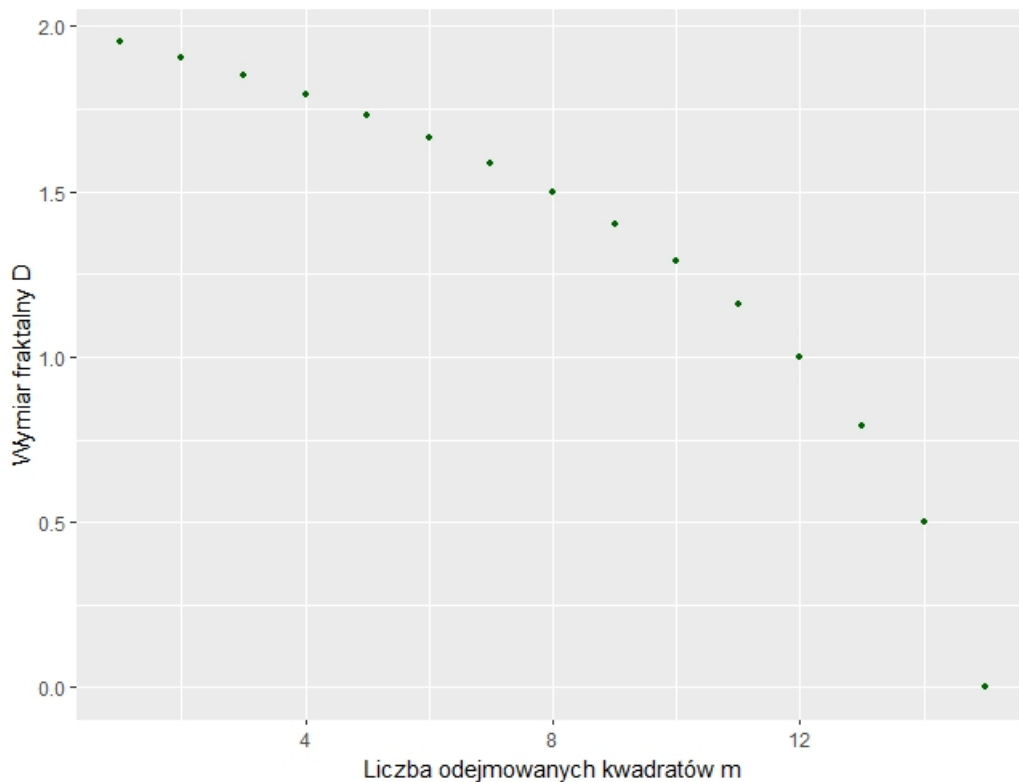
Przykład 3.7. Gdy odejmujemy **cztery** kwadraty, czyli gdy $N = 12$, wymiar fraktalny wynosi $D = \frac{\log(12)}{\log(1/(1/4))} = \frac{\log(12)}{\log(4)} \approx 1.792481$.

Przykład 3.8. Gdy odejmujemy **osiem** kwadratów, czyli gdy $N = 8$, wymiar fraktalny wynosi $D = \frac{\log(8)}{\log(1/(1/4))} = \frac{\log(8)}{\log(4)} = 1.5$.

Przykład 3.9. Gdy odejmujemy **dziewięć** kwadratów, czyli gdy $N = 7$, wymiar fraktalny wynosi $D = \frac{\log(9)}{\log(4)} \approx 1.403677$.

Przykład 3.10. Gdy odejmujemy **trzynaście** kwadratów, czyli gdy $N = 3$, wymiar fraktalny wynosi $D = \frac{\log(3)}{\log(4)} \approx 0.792481$.

Wybrane przykłady modyfikacji dla $s = \frac{1}{4}$ sugerowałyby, że zmniejszenie się liczby fragmentów, czyli zwiększenie liczby odejmowanych kwadratów, zmniejsza wartość wymiaru samopodobieństwa D . Oczywiście sprawdziliśmy tylko kilka możliwości spośród wszystkich potencjalnych wartości N . Dlatego, aby przekonać się, że nasze przypuszczenia są słuszne bez konieczności wypisywania wszystkich przypadków na wymiar D , skonstruujemy wykres (w RStudio) zależności wymiaru fraktalnego D od liczby odejmowanych kwadratów m . Stworzymy wektor wartości $m \in \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ oraz wyliczonych wartości wymiaru D . Otrzymane dane zapiszemy w ramce danych, a następnie stworzymy z nich wykres, gdzie oś X będzie liczbą odejmowanych kwadratów m , a jej zakres będzie taki, jak zakres wektora m . Z kolei oś Y wartości wymiaru fraktalnego D określimy od 0 do 2. Wykres przedstawiony jest na Rysunku 6.



Rysunek 6: Wykres zależności wymiaru fraktalnego D od liczby usuwanych kwadratów m (dla $s = \frac{1}{4}$)

Widzimy, że z wykresu wynika, że faktycznie zwiększenie liczby odejmowanych kwadratów zmniejsza wymiar fraktalny, który maleje do 0. Wniosek ten przedstawimy w formie lematu, a następnie udowodnimy go.

Lemat 3.11. *Funkcja wymiaru fraktalnego $D = \frac{\log(N)}{\log(1/s)}$ przy ustalonym parametrze s oraz zmiennej liczbie m odejmowanych kwadratów jest funkcją malejącą do 0.*

Dowód: Określmy N jako $N = \frac{1}{s^2} - m = k^2 - m$, gdzie $k = \frac{1}{s}$ oraz $k \in \mathbb{N}_+$, a $m \in \{1, 2, \dots, k^2 - 1\}$. Wtedy $D = \frac{\log(N)}{\log(1/s)} = \frac{\log(k^2 - m)}{\log(k)}$. Wartość $\log(k)$ jest stała dla ustalonego s , czyli ustalonego k . Z kolei $\log(N) = \log(k^2 - m)$ jest funkcją malejącą dla ustalonego s ,

czyli ustalonego k oraz zmiennej m , gdyż $k^2 - m$ jest funkcją malejącą liniowo (oczywiście osiąga wartości naturalne dla zadanych wcześniej zakresów). Dla $m_{max} = k^2 - 1$ mamy, że $\log(k^2 - m) = \log(k^2 - (k^2 - 1)) = \log(k^2 - k^2 + 1) = \log(1) = 0$. Zatem funkcja D jest funkcją malejącą do 0. $\square$

Na sam koniec, zwróćmy jeszcze uwagę na miarę Lebesgue'a omawianych zmodyfikowanych fraktali. Analizując wpływ zwiększenia liczby usuwanych kwadratów, moglibyśmy zastanowić się, czy zmiana ta wpływa na pole fraktala, czy jednak pozostaje ono zerowe, jak w rozważaniach dla klasycznej wersji dywanu Sierpińskiego oraz jego zmodyfikowanych wersji z Podrozdziału 3.3. Okaze się, że pozostanie ono zerowe, dlatego aby się o tym przekonać, przeprowadzimy potrzebne rozumowania. Oznaczmy liczbę usuwanych kwadratów jako $m \in \{1, 2, \dots, k^2 - 1\}$, gdzie $k = \frac{1}{s}$ i $s \in (0, 1)$, a więc $k \in \mathbb{N}_+$. W konstrukcji kwadratu S_0 przy podziale na $\frac{1}{s^2} = k^2$ mniejszych kwadratów przystających wiemy, że każdy z nich ma pole k^2 razy mniejsze niż w poprzednim kroku. Następnie usuwamy m kwadratów i otrzymujemy, że pole powstałej figury wynosi $S_1 = \frac{k^2 - m}{k^2}$. Dla S_2 mamy $S_2 = \left(\frac{k^2 - m}{k^2}\right)^2$, a dla S_3 jest to $S_3 = \left(\frac{k^2 - m}{k^2}\right)^3$. W końcu po n krokach pole figury S_n wynosi $S_n = \left(\frac{k^2 - m}{k^2}\right)^n$. Przecięcie $\cap_{n=1}^{\infty} S_n = S$ zawiera się w S_n dla każdego n . Zobaczymy, że pola S_n dążą do 0 przy $n \rightarrow \infty$. Zaczniemy od zależności:

$$\left(\frac{k^2 - m}{k^2}\right)^n = \left(1 - \frac{m}{k^2}\right)^n.$$

Przeprowadźmy teraz analogiczne rozumowanie, jak w Podrozdziale 3.3.

$$\begin{aligned} 1 &\leq m \leq k^2 - 1 \\ 0 &< \frac{1}{k^2} \leq \frac{m}{k^2} \leq \frac{k^2 - 1}{k^2} < 1 \\ -1 &< -\frac{m}{k^2} < 0 \\ 0 &< 1 - \frac{m}{k^2} < 1 \end{aligned}$$

Z przedstawionych rozważań wynika, że $\left(1 - \frac{m}{k^2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dlatego pole przecięcia S , czyli omawianych fraktali, jest zerowe.

4 Krzywa Kocha i inne pokrewne fraktale

W tym rozdziale omówimy krzywą Kocha oraz pokrewne jej fraktale. Podobnie jak w Rozdziale 3, głównym celem będzie przeanalizowanie, w jaki sposób modyfikacje klasycznej wersji krzywej Kocha wpływają na jej wymiar fraktalny. W Podrozdziale 4.1 przedstawimy konstrukcję klasycznej krzywej Kocha. Następnie w Podrozdziale 4.2 zmodyfikujemy generator krzywej poprzez przesunięcie fragmentu trójkąta równobocznego (stanowiącego podstawę konstrukcji) w lewą stronę. W Podrozdziale 4.3 przeanalizujemy efekt zmniejszania skali podobieństwa, zaś w Podrozdziale 4.4 zbadamy wpływ zmiany kąta nachylenia odcinków tworzących generator krzywej.

4.1 Klasyczna krzywa Kocha

Wśród najbardziej znanych i jednocześnie najczęściej przywoływanych przykładów fraktali w matematyce, krzywa Kocha zajmuje szczególne miejsce. Często pojawia się ona w kontekście nauki o fraktalach jako jeden z pierwszych i najbardziej intuicyjnych przykładów figury o nieskończonej długości i skończonym obszarze zawartym w ograniczonej przestrzeni.

W przeciwieństwie do dywanu Sierpińskiego, którego konstrukcja opiera się na kwadracie, krzywa Kocha powstaje poprzez modyfikację odcinka.

Najprostszym sposobem opisanie budowy krzywej Kocha jest uznanie jej za graniczny rezultat nieskończonej modyfikacji odcinka. W każdej iteracji dzielimy każdy odcinek poprzednio uzyskanej łamanej na trzy równe części, po czym środkową z nich zastępujemy dwoma bokami trójkąta równobocznego (z usuniętą podstawą). Z każdym kolejnym krokiem liczba odcinków łamanych wzrasta wykładniczo, a długość całkowita krzywej rośnie bez ograniczeń. Aby to opisać formalnie, wprowadzamy poniższą definicję.

Definicja 4.1 (Formalna konstrukcja krzywej Kocha). *Niech K_0 będzie odcinkiem jednostkowym w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, czyli:*

$$K_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}.$$

W pierwszym kroku konstruujemy K_1 poprzez podział odcinka K_0 na trzy równe części, każda o długości $\frac{1}{3}$, i zastąpienie środkowego segmentu dwiema krawędziami mającymi także długość $\frac{1}{3}$ tworzącymi z usuwaną krawędzią trójkąt równoboczny. W efekcie K_1 składa się z czterech odcinków tej samej długości (patrz Rysunek 7(b)).

Proces ten powtarzamy dla każdego nowo powstałego odcinka – każdorazowo dzieląc każdy z nich na trzy części i środkową część zastępując dwiema krawędziami tworzącymi nowy „ząbek” (patrz Rysunki 7(c)-(f)). W ogólności, przyjmujemy rekurencyjnie:

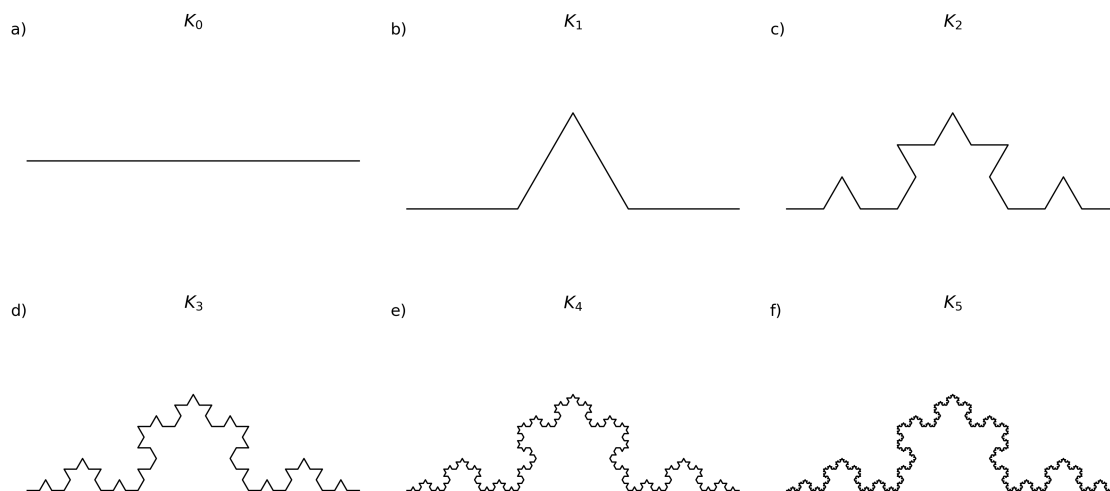
- K_n składa się z 4^n odcinków,
- każdy z nich ma długość 3^{-n} ,
- suma długości wszystkich odcinków w K_n wynosi $\left(\frac{4}{3}\right)^n$.

Ostatecznie krzywa Kocha K definiowana jest jako:

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n.$$

Krzywą Kocha możemy uogólnić do dowolnej długości odcinka wyjściowego K_0 . Możemy wtedy otrzymać odpowiednio przeskalowane warianty krzywej Kocha, będące figurami podobnymi do naszej podstawowej krzywej Kocha K .

Na Rysunku 7 przedstawiamy pięć kolejnych iteracji konstrukcji krzywej Kocha.



Rysunek 7: Kolejne iteracje konstrukcji klasycznej krzywej Kocha

Krzywa Kocha jest klasycznym przykładem figury samopodobnej, którą można wykorzystać do zilustrowania pojęcia ściśle samopodobnej figury w sensie Definicji 2.1.

Rozważmy klasyczną krzywą Kocha powstającą jako granica ciągu krzywych K_n , gdzie K_0 to odcinek jednostkowy. W pierwszym kroku konstrukcji, czyli dla $n = 1$, odcinek ten dzielimy na trzy równe części i środkową z nich zastępujemy dwoma odcinkami, które tworzą z usuwanym odcinkiem boki trójkąta równobocznego. W wyniku tego powstaje łamana K_1 , złożona z czterech odcinków o jednakowej długości, które kolejno oznaczmy przez I_1, I_2, I_3, I_4 . Każda z tych części po wykonaniu na niej kolejnych iteracji konstrukcji, stanowi fragment będący dokładnie taką samą krzywą Kocha, jak całość, lecz przeskalowaną w skali $s = \frac{1}{3}$. Oznaczmy te mniejsze krzywe Kocha otrzymane z odcinków I_j przez L_1, L_2, L_3, L_4 . Oznacza to, że każda z figur L_j jest podobna do całej krzywej K w tej samej skali $s = \frac{1}{3}$, co spełnia pierwszy warunek definicji. Na każdym z tych czterech odcinków kontynuujemy konstrukcję w ten sam sposób, uzyskując kolejne przybliżenia krzywej Kocha.

Ostateczna krzywa Kocha K jest sumą tych czterech fragmentów, to znaczy $K = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$. Każda z figur L_j jest podobna do figury K w tej samej skali $s = \frac{1}{3}$, a ich wnętrza nie zachodzą na siebie, gdyż każdy fragment osadzony jest na osobnym odcinku I_j łamanej K_1 , co oznacza, że ich przecięcia mogą występować najwyżej w punktach brzegowych.

Wobec tego, zgodnie z Definicją 2.1, krzywa Kocha spełnia warunki ścisłej samopodobności. Możemy zatem zastosować wzór na wymiar samopodobieństwa (2.3) i wówczas otrzymujemy:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(1/(1/3))} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.26186.$$

Jest to wartość z przedziału $(1, 2)$, co potwierdza, że krzywa Kocha jest bardziej „rozwinęta” niż zwykła linia, ale nie zajmuje jeszcze powierzchni.

Inną istotną własnością tej krzywej jest jej długość. W Tabeli 1 możemy zauważyć ile wynosi całkowita długość w kolejnych iteracjach konstrukcji.

n	Liczba odcinków N	Długość odcinka	Długość całkowita
0	1	1	1
1	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3} \approx 1,33$
2	16	$(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$	$\frac{16}{9} \approx 1,78$
3	64	$(\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{27}$	$\frac{64}{27} \approx 2,37$
4	256	$(\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$	$\frac{256}{81} \approx 3,16$
...	...	...	...
n	4^n	$(\frac{1}{3})^n$	$(\frac{4}{3})^n$

Tabela 1: Długość łamanych K_n w kolejnych krokach konstrukcji krzywej Kocha

Ponieważ:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty,$$

długość kolejnych przybliżeń krzywej Kocha rośnie bez ograniczeń i w granicy jest nieskończona, mimo że figura pozostaje ograniczona w przestrzeni.

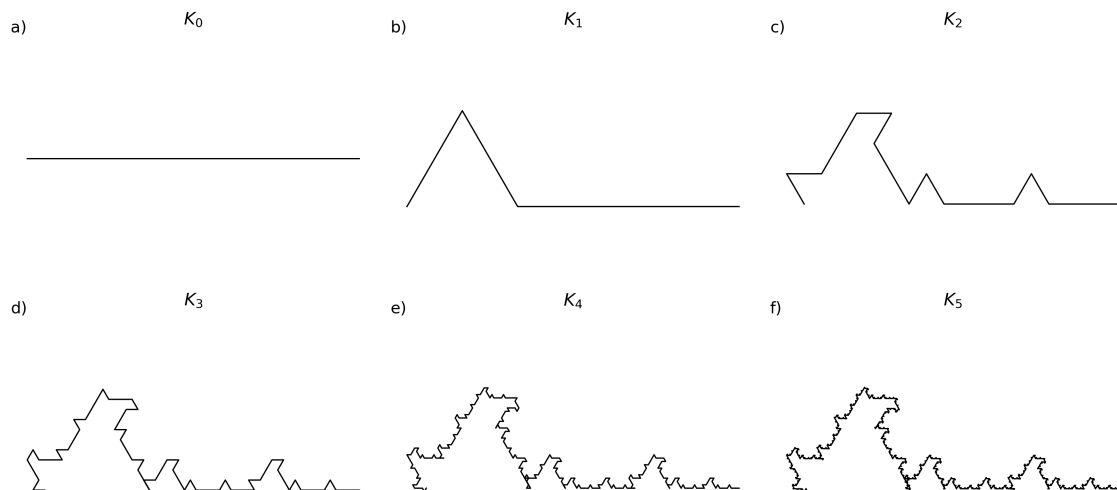
4.2 Asymetryczna krzywa Kocha (lewostronna)

Po przeczytaniu Podrozdziału 4.1 wiemy już czym jest klasyczna krzywa Kocha, jak przebiega jej konstrukcja oraz jaki posiada wymiar samopodobieństwa. W niniejszym podrozdziale przedstawimy pierwszą modyfikację tej krzywej i sprawdzimy, czy – a jeśli tak, to w jaki sposób – zmienia się jej wymiar fraktalny. Przez analogię do analizy zawartej w Podrozdziale 3.2 możemy przypuszczać, że wartość tego wymiaru pozostanie niezmienną. Aby się o tym przekonać, przeprowadzimy poniższe rozważania.

Rozważania i wnioski

Konstrukcję zmodyfikowanej krzywej Kocha rozpoczniemy od odcinka jednostkowego K_0 , tak jak w przypadku klasycznym. W pierwszym kroku, czyli dla K_1 , dzielimy odcinek na trzy równe części. W miejsce pierwszego odcinka (skrajnego lewego) – zamiast środkowego, jak w wersji klasycznej – wstawiamy dwa odcinki tworzące wraz z tym odcinkiem zastępowanym boki trójkąta równobocznego, tworząc charakterystyczny „ząbek” przesunięty na lewą stronę krzywej. W efekcie tego podziału uzyskujemy łamaną K_1 (patrz Rysunek 8(b)) złożoną z czterech odcinków o jednakowej długości. Podobnie jak w wersji klasycznej, każdy z tych odcinków ma długość $\frac{1}{3}$ długości odcinka początkowego.

Na każdym z tych czterech odcinków kontynuujemy konstrukcję zgodnie z tym samym schematem – to znaczy, na każdej z części tworzymy lokalnie taką samą krzywą, z tą różnicą, że „ząbek” pojawia się zawsze na lewej jednej trzeciej (patrz Rysunki 8(c)-(f)).



Rysunek 8: Kolejne kroki konstrukcji przesuniętej w lewo krzywej Kocha

Asymetryczna, lewostronna krzywa Kocha stanowi kolejny przykład figury, która doskonale nadaje się do zilustrowania pojęcia figury ściśle samopodobnej, zgodnie z Definicji 2.1. Rozważmy taką krzywą, którą oznaczmy przez K , powstającą jako granica nieskończonego procesu iteracyjnego. Zaczynamy od odcinka jednostkowego – to nasz etap zerowy, czyli K_0 . Wytlumaczenie jest analogiczne jak w przypadku klasycznej krzywej Kocha. W pierwszym kroku konstrukcji, dla $n = 1$, odcinek ten dzielimy na trzy równe części. W przeciwieństwie do wersji klasycznej, gdzie przekształcamy środkowy fragment, tutaj modyfikujemy fragment skrajny – lewy. Usuwamy pierwszy z trzech odcinków i na jego miejscu budujemy trójkąt równoboczny, którego podstawa pokrywa się z tym usuniętym odcinkiem, a nowo dodane boki skierowane są w górę, tworząc charakterystyczny „ząbek”.

Po tym przekształceniu otrzymujemy łamaną K_1 , składającą się z czterech odcinków o tej samej długości, oznaczanych kolejno jako I_1, I_2, I_3, I_4 . Każdy z tych odcinków podlega w kolejnych iteracjach dokładnie tej samej regule konstrukcyjnej, co oznacza, że na każdym z nich wykonujemy tę samą operację: usunięcie lewej jednej trzeciej i zastąpienie jej dwoma bokami trójkąta równobocznego. Proces ten jest kontynuowany w nieskończoność, a jego granicą jest pełna krzywa Kocha, oznaczana przez K .

Kluczowe jest to, że każdy z odcinków I_j (dla $j = 1, 2, 3, 4$) przekształca się w fragment krzywej, który jest identyczny w kształcie jak cała figura K , tylko odpowiednio pomniejszony – dokładnie w tej samej skali $s = \frac{1}{3}$, ponieważ każdy z tych odcinków ma długość $\frac{1}{3}$ odcinka początkowego. Fragmenty te oznaczmy jako L_1, L_2, L_3, L_4 , czyli: $K = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$

Każdy z fragmentów L_j jest podobny do całej figury K w tej samej skali $s = \frac{1}{3}$, co spełnia pierwszy warunek definicji figury ściśle samopodobnej. Dodatkowo, ponieważ każdy fragment powstaje na oddzielnym odcinku łamanej K_1 , ich wnętrza nie przecinają się – mogą się stykać jedynie w punktach brzegowych.

Zatem asymetryczna lewostronna krzywa Kocha spełnia wszystkie wymagania definicji figury ściśle samopodobnej: składa się z czterech podfigur, które są do niej podobne w tej samej skali s , a ich wnętrza nie nachodzą na siebie.

Można zauważyć, że taka zmiana wpływa na kształt i symetrię fraktala, ale nie wpływa na jego strukturę z punktu widzenia samopodobieństwa ani na jego wymiar fraktalny. Liczba fragmentów pozostaje taka sama ($N = 4$), podobnie jak skala podobieństwa ($s = \frac{1}{3}$), zatem wymiar fraktalny obliczamy ze wzoru:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(1/(1/3))} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.26186.$$

Widzimy zatem, że modyfikacja polegająca na przesunięciu fragmentu trójkąta równobocznego (stanowiącego podstawę konstrukcji) w lewą stronę nie narusza ścisłego samopodobieństwa fraktala, ani nie wpływa na jego wymiar przy zachowaniu skali $\frac{1}{3}$.

4.3 Zmiana parametru skali

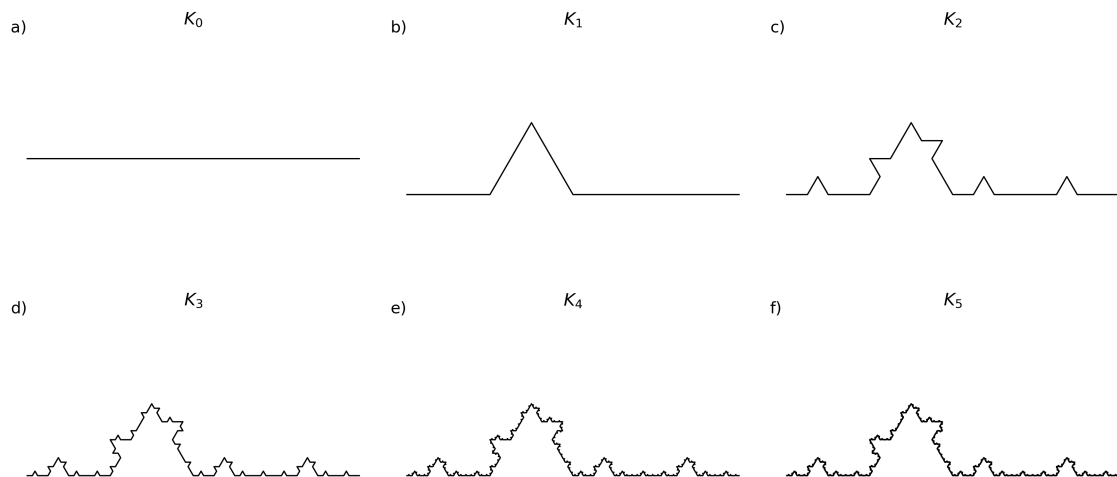
W poprzednich podrozdziałach wykazaliśmy, że krzywa Kocha – zarówno klasyczna, jak i jej asymetryczna modyfikacja – spełnia warunki ścisłego samopodobieństwa zgodnie z Definicją 2.1. Oznacza to, że każda z tych krzywych może być traktowana jako zbiór fraktalny zbudowany z przeskalowanych kopii samej siebie. Punktem wyjścia w obu przypadkach była skala $s = \frac{1}{3}$, dla której krzywa dzieli się na $N = 4$ fragmenty, a każdy z nich jest podobny do całości w tej samej skali.

W niniejszym podrozdziale interesuje nas odpowiedź na pytanie: jak zmienia się struktura i wymiar fraktalny figury, gdy zastosujemy inną skalę podobieństwa niż $\frac{1}{3}$? W szczególności rozważymy przypadek $s = \frac{1}{4}$, a następnie uogólnimy zależność.

Rozważania i wnioski

W celu lepszego zrozumienia wpływu zmiany parametru skali na strukturę i właściwości geometryczne fraktali, rozważmy modyfikację klasycznego algorytmu konstrukcji krzywej Kocha. W wersji pierwotnej konstrukcja opiera się na podziale odcinka jednostkowego na trzy równe części, co odpowiada zastosowaniu skali $s = \frac{1}{3}$. W niniejszym rozważaniu interesuje nas przypadek, w którym zamiast trójkąpodziału zastosujemy podział na większą liczbę części – na przykład cztery – czyli przyjmijmy skalę $s = \frac{1}{4}$.

Konstrukcję rozpoczynamy od odcinka jednostkowego. Dzielimy go na cztery równe segmenty, z których każdy ma długość $\frac{1}{4}$. Następnie, aby zachować strukturę charakterystyczną dla fraktali z rodziny krzywej Kocha, w jednym z tych segmentów (na przykład w drugim z lewej) dokonujemy modyfikacji – zastępujemy go dwoma odcinkami, które tworzą boki trójkąta równobocznego wraz z odcinkiem, który usuwamy. W efekcie otrzymujemy krzywą łamaną K_1 (patrz Rysunek 9(b)), składającą się z pięciu odcinków, każdy długości $\frac{1}{4}$. W kolejnym kroku proces konstrukcyjny powtarzamy dla każdego z pięciu odcinków uzyskanej łamanej. Na każdej z tych części odtwarzamy lokalnie ten sam wzorec co w K_1 , co prowadzi do uzyskania kolejnych przybliżeń krzywej (patrz Rysunek 9(c)-(f)).



Rysunek 9: Kolejne iteracje konstrukcji krzywej Kocha dla skali $s = \frac{1}{4}$

Podobnie jak w poprzednich podrozdziałach krzywa Kocha w wersji opartej na cztero-
podziale stanowi kolejny przykład figury spełniającej warunki definicji figury ściśle samo-
podobnej (zob. Definicja 2.1). Oznaczmy tę krzywą przez K . Powstaje ona jako granica
nieskończonego procesu iteracyjnego, którego punktem wyjścia jest odcinek jednostkowy
– to etap zerowy, oznaczany przez K_0 . W pierwszym kroku dzielimy odcinek długości 1 na
cztery równe części. Następnie, zgodnie z asymetryczną regułą wprowadzoną wcześniej,
modyfikujemy tylko jeden z fragmentów – tym razem drugi segment od lewej. Zostaje on
usunięty i zastąpiony dwoma bokami trójkąta równobocznego. Tak powstała łamana K_1
złożona jest z pięciu odcinków opisanych kolejno I_j dla $j = 1, 2, 3, 4, 5$ i długości $\frac{1}{4}$. W
kolejnych iteracjach każdy z tych pięciu odcinków podlega dokładnie tej samej regule kon-
strukcyjnej: usuwamy z niego lewą jedną czwartą i w jej miejsce wstawiamy dwa ramiona
trójkąta równobocznego bez podstawy. Proces ten kontynuujemy w nieskończoność, a
jego granicą jest krzywa K .

Podobnie jak w przypadku wersji trójpodziałowej, każdy z odcinków I_j przekształca
się w fragment krzywej, który jest wierną miniaturą całej figury K – tyle że w skali $s = \frac{1}{4}$.
Oznaczmy te pięć fragmentów jako L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 , tak że: $K = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup L_5$

Każdy z fragmentów L_j stanowi przekształcenie całej krzywej K w tej samej skali
 $s = \frac{1}{4}$, co – zgodnie z definicją – oznacza spełnienie warunku ścisłej samopodobności.

Tak skonstruowana figura spełnia zatem wszystkie warunki definicji ścisłej samopo-
dobności (Definicja 2.1). Każdy z pięciu fragmentów jest odwzorowaniem całej figury
przez przekształcenie podobieństwa – w tym przypadku skalowanie z czynnikiem $s = \frac{1}{4}$,
a także odpowiednie przesunięcie i ewentualnie obrót (w przypadku boków trójkąta).
Ponadto, wnętrza tych fragmentów są parami rozłączne, co jest wymagane w kontek-
ście samopodobnych zbiorów fraktalnych. Nie dochodzi również do ich nakładania się –
każdy z nich zajmuje inną część przestrzeni, co można bezpośrednio zaobserwować już
na poziomie pierwszej iteracji konstrukcji. Na Rysunku 9 przedstawiamy kolejne iteracje
konstrukcji tak zmodyfikowanej krzywej Kocha dla skali $s = \frac{1}{4}$

Skoro jest to fraktal ściśle samopodobny, to możemy wyznaczyć jego wymiar fraktalny

przy pomocy wzoru na wymiar samopodobieństwa, gdzie $N = 5$, a $s = \frac{1}{4}$:

$$D = \frac{\log(5)}{\log(1/(1/4))} = \frac{\log(5)}{\log(4)} \approx 1.16096.$$

Powyższy sposób budowy można uogólnić na przypadek dowolnej liczby podziałów. Jeśli przyjmiemy, że dzielimy odcinek na n równych części, a następnie wprowadzamy jedną modyfikację analogiczną do opisanej wcześniej (czyli zastąpienie jednego z segmentów dwoma bokami trójkąta), to całkowita liczba powstałych odcinków po pierwszej iteracji będzie równa $N = n + 1$. Każdy z tych odcinków ma wówczas długość $\frac{1}{n}$, a wszystkie są przeskalowanymi kopiami całości, co ponownie prowadzi do wniosku, że figura jest ściśle samopodobna. W naszych rozważaniach przyjmujemy, że $s = \frac{1}{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $n \geq 2$, wtedy mamy również $N = \frac{1}{s} + 1 = \frac{1}{s} + 1$. Ograniczenie $n \geq 2$ wynika z faktu, że dla $n = 1$ figura nie podlega żadnemu podziałowi i nie można rozpocząć konstrukcji fraktalnej. Dla $n \geq 2$ możliwy jest równy podział odcinka oraz umieszczenie charakterystycznego „ząbka”.

Przykład 4.2. Dla $s = \frac{1}{2}$ liczba odcinków wynosi $N = \frac{1}{\frac{1}{2}} + 1 = 2 + 1 = 3$. Wtedy $D = \frac{\log(3)}{\log(1/(1/2))} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1.58496$.

Przykład 4.3. Dla $s = \frac{1}{5}$ liczba odcinków wynosi $N = \frac{1}{\frac{1}{5}} + 1 = 5 + 1 = 6$. Wtedy $D = \frac{\log(6)}{\log(1/(1/5))} = \frac{\log(6)}{\log(5)} \approx 1.11328$.

Przykład 4.4. Dla $s = \frac{1}{6}$ liczba odcinków wynosi $N = \frac{1}{\frac{1}{6}} + 1 = 6 + 1 = 7$. Wtedy $D = \frac{\log(7)}{\log(1/(1/6))} = \frac{\log(7)}{\log(6)} \approx 1.08603$.

Przykład 4.5. Dla $s = \frac{1}{10}$ liczba odcinków wynosi $N = \frac{1}{\frac{1}{10}} + 1 = 10 + 1 = 11$. Wtedy $D = \frac{\log(11)}{\log(1/(1/10))} = \frac{\log(11)}{\log(10)} \approx 1.04139$.

Na podstawie wcześniejszych przykładów możemy sformułować ogólną regułę wyznaczania wymiaru fraktalnego D dla figur zbudowanych na wzór krzywej Kocha, w których odcinek jednostkowy dzielony jest na n równych części, a następnie jeden z nich zostaje zastąpiony dwoma bokami trójkąta równobocznego. W takim przypadku:

- liczba części po pierwszej iteracji konstrukcji wynosi $N = n + 1$,
- długość każdego odcinka to $s = \frac{1}{n}$.

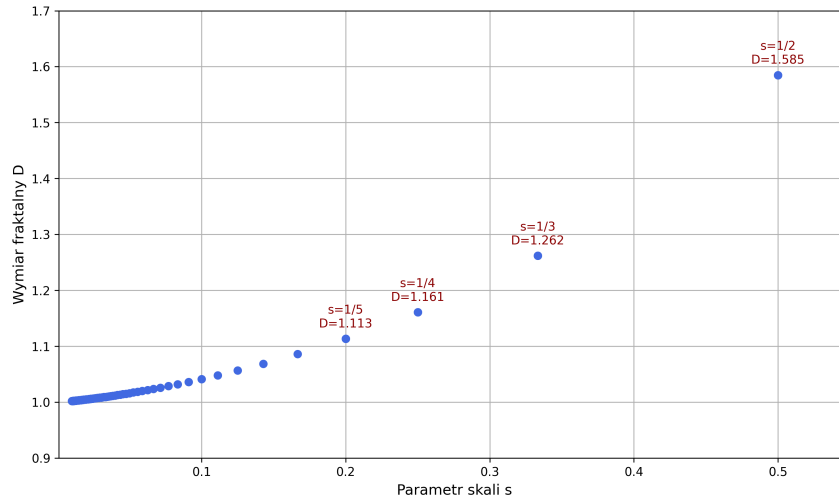
Ponieważ graniczna figura uzyskana z kolejnych iteracji powyższej konstrukcji spełnia warunki ścisłej samopodobności (każdy fragment jest przekształceniem całej figury przez skalowanie, przesunięcie i ewentualnie obrót), możemy zastosować klasyczny wzór na wymiar fraktalny zbioru samopodobnego:

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{s}\right)}.$$

Po podstawieniu zależności $N = n + 1 = \frac{1}{s} + 1$ i $s = \frac{1}{n}$, otrzymujemy:

$$D = \frac{\log(n+1)}{\log(n)} = \frac{\log\left(\frac{1}{s} + 1\right)}{\log\left(\frac{1}{s}\right)}.$$

Po przeanalizowaniu powyższych przykładów możemy wywnioskować, że wraz ze zmniejszaniem się skali, wymiar D samopodobieństwa maleje. Aby lepiej to zobaczyć, narysujemy w programie Python wykres wartości wymiaru fraktalnego D w zależności od parametru $s = \frac{1}{n}$.



Rysunek 10: Wykres zależności wymiaru fraktalnego D od parametru skali s

Na wykresie na Rysunku 10 widzimy, że przy zmniejszaniu parametru skali wymiar fraktalny maleje i jest coraz bliższy 1. Formalnie sprawdzimy czy przy $n \rightarrow \infty$, gdzie $s = \frac{1}{n}$ granica ciągu wartości wymiaru fraktalnego dąży do 1. My jednak zbadamy funkcję ciągłą wymiaru samopodobieństwa przy $s \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(1/s)} &\stackrel{N=\frac{1}{s}+1}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{1}{s} + 1\right)}{\log\left(\frac{1}{s}\right)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{ reguła de l'Hospitala } \lim_{s \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\frac{-1}{s^2}}{\frac{1}{s} + 1} \right) : \left(\frac{\frac{-1}{s^2}}{\frac{1}{s}} \right) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{-1}{s^2}}{\frac{1}{s} + 1} \cdot \frac{s}{\frac{-1}{s^2}} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{s}}{\frac{1}{s} + 1} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{s} : \left(\frac{1}{s} + 1 \right) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{s}{1 + s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + s} = 1 \end{aligned}$$

Powyższe obliczenia pokazują, że faktycznie granica wymiaru samopodobieństwa dla $s \rightarrow 0$ wynosi 1. Oznacza to, że w przypadku bardzo małej skali podobieństwa fraktalna figura staje się coraz bardziej zbliżona do zwykłego odcinka – jej złożoność maleje, a wymiar fraktalny dąży do wymiaru topologicznego jednowymiarowego odcinka.

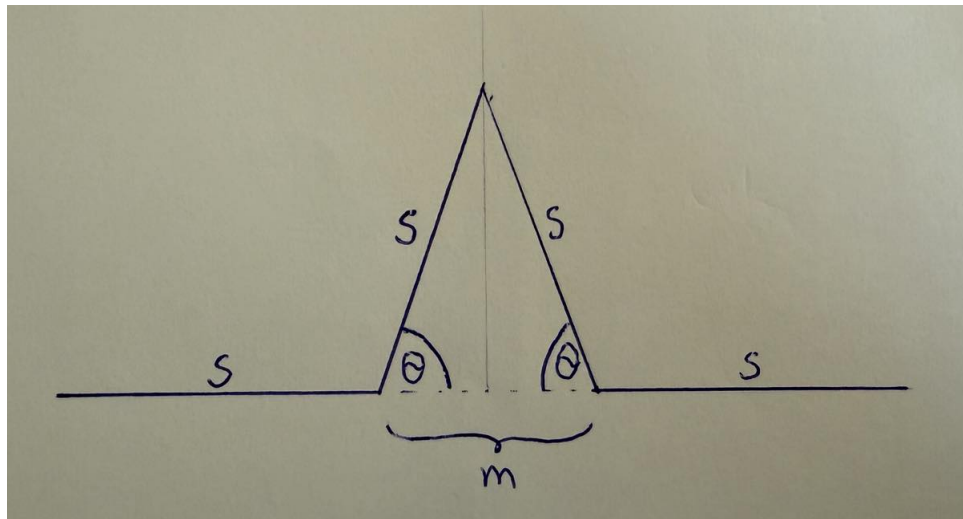
4.4 Zmiana kąta

W klasycznej konstrukcji krzywej Kocha wykorzystuje się trójkąt równoboczny, co oznacza, że „ząbek” tej łamanej tworzony jest pod kątem 60° . Możliwe jest jednak ogólniejsze

podejście, w którym zamiast kąta 60° przyjmuje się dowolny kąt $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$. W niniejszym podrozdziale skupimy się na tym, jak zmienia się wygląd fraktali w zależności od wartości kąta θ , a także jak wpływa on na ich wymiar fraktalny.

Rozważania i wnioski

Podobnie jak we wcześniejszych podrozdziałach, zaczniemy od opisanie, jak powstaje taka krzywa Kocha w zależności od kąta θ , rozumianego jako kąt zawarty pomiędzy odcinkiem usuwanym w każdej iteracji a ramionami podstawianego trójkąta równoramiennego. Punkt wyjścia stanowi odcinek jednostkowy, który standardowo oznaczamy jako K_0 . W pierwszym kroku dzielimy odcinek długości 1 na trzy części. W odróżnieniu od klasycznej wersji krzywej Kocha, podział ten zależy od kąta θ , dlatego dwa skrajne odcinki mają długość s , natomiast środkowy odcinek, który zostaje usunięty, ma długość m . Stąd mamy $2s + m = 1$. W miejsce tego środkowego odcinka m wstawiamy trójkąt równoramienny (bez podstawy) o kącie θ przy podstawie. Ramiona tego trójkąta również mają długość s , co zapewnia spójność konstrukcji i pozwala na jej iteracyjne powtarzanie w kolejnych krokach (patrz Rysunek 11).



Rysunek 11:

Powstały w ten sposób trójkąt jest równoramienny, zatem jego wysokość dzieli podstawę długości m na dwie równe części, każda o długości $\frac{m}{2}$. Rozpatrzmy jedną z tych połówek – tworzy ona trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątną stanowi ramię trójkąta o długości s , kąt przy podstawie wynosi θ , a przyprostokątną przylegającą do tego kąta jest odcinek o długości $\frac{m}{2}$.

Z definicji funkcji cosinus w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\cos \theta = \frac{\frac{m}{2}}{s},$$

czyli po przekształceniu:

$$s \cdot \cos \theta = \frac{m}{2}.$$

Z wcześniejszego warunku $2s + m = 1$, podstawiając $m = 2s \cos \theta$, otrzymujemy:

$$2s + 2s \cos \theta = 1,$$

$$2s(1 + \cos \theta) = 1,$$

$$s = \frac{1}{2(1 + \cos \theta)}.$$

Krzywa Kocha z kątem θ jako figura ściśle samopodobna

Krzywa Kocha konstruowana z trójkątów równoramiennych o kącie θ przy podstawie stanowi przykład fraktala, który również spełnia definicję figury ściśle samopodobnej, zgodnie z Definicją 2.1. Oznaczmy przez K granicę tego procesu iteracyjnego. Punkt wyjścia stanowi odcinek jednostkowy K_0 , a pierwszy krok konstrukcji polega na zastąpieniu środkowej części odcinka trójkątem równoramiennym bez podstawy, o ramionach długości s i kącie przy podstawie równym θ . W efekcie otrzymujemy łamaną K_1 , składającą się z czterech odcinków o takiej samej długości (patrz Rysunek 11), oznaczanych jako I_1, I_2, I_3, I_4 . Na każdym z tych odcinków, w kolejnych krokach konstrukcji, stosujemy identyczną regułę: usuwamy środkowy fragment i wstawiamy nowy trójkąt o tym samym kącie θ . Dzięki temu, w wyniku nieskończonego procesu iteracyjnego, powstaje krzywa K . Otrzymane krzywe z odcinków I_j oznaczmy kolejno L_1, L_2, L_3, L_4 co oznacza, że każda z figur L_j jest podobna do całej krzywej K w skali s , którą wcześniej obliczyliśmy jako:

$$s = \frac{1}{2 + 2 \cos \theta}$$

Ponieważ łamana K_1 składa się z czterech odcinków nie nachodzących na siebie we wnętrzach, odpowiadające im fragmenty L_1, L_2, L_3, L_4 również nie mają wspólnych wnętrz – mogą co najwyżej stykać się w punktach brzegowych. Każdy z fragmentów jest w dokładnie tej samej relacji samopodobieństwa względem całej krzywej K , dzięki czemu spełniony jest warunek, że całość można przedstawić jako sumę czterech mniejszych fragmentów o takim samym kształcie $K = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$.

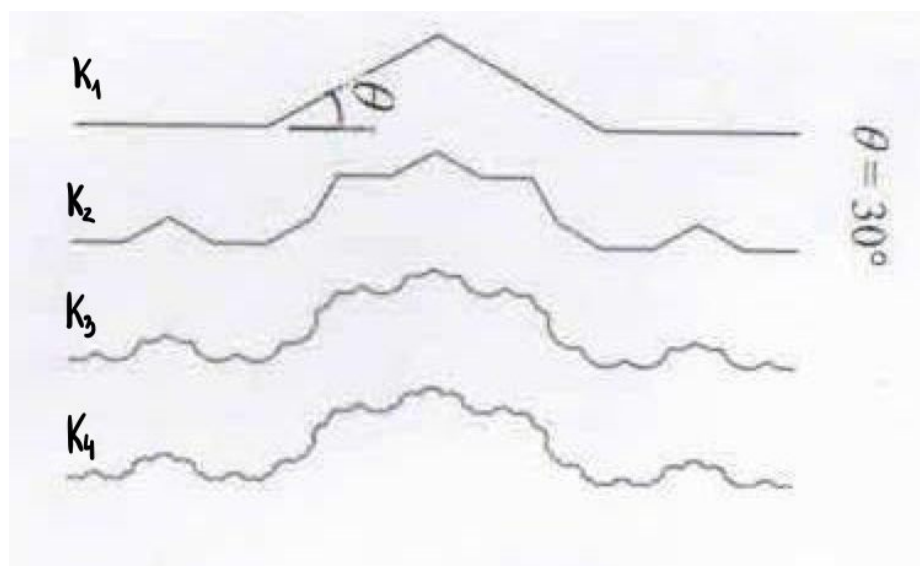
Z powyższej konstrukcji wynika, że krzywa Kocha z parametrem θ spełnia wszystkie warunki definicji figury ściśle samopodobnej: składa się z czterech części podobnych do całej figury, wszystkie w tej samej skali.

Zauważmy ponadto, że ponieważ parametr θ może przyjmować dowolną wartość z przedziału $(0, 90^\circ)$, to uzyskana konstrukcja tworzy rodzinę fraktali ściśle samopodobnych, zależnych od parametru ciągłego. Tym samym mamy do czynienia nie z pojedynczą figurą, lecz z całą klasą geometrycznych obiektów, których struktura samopodobna zmienia się płynnie wraz ze zmianą θ .

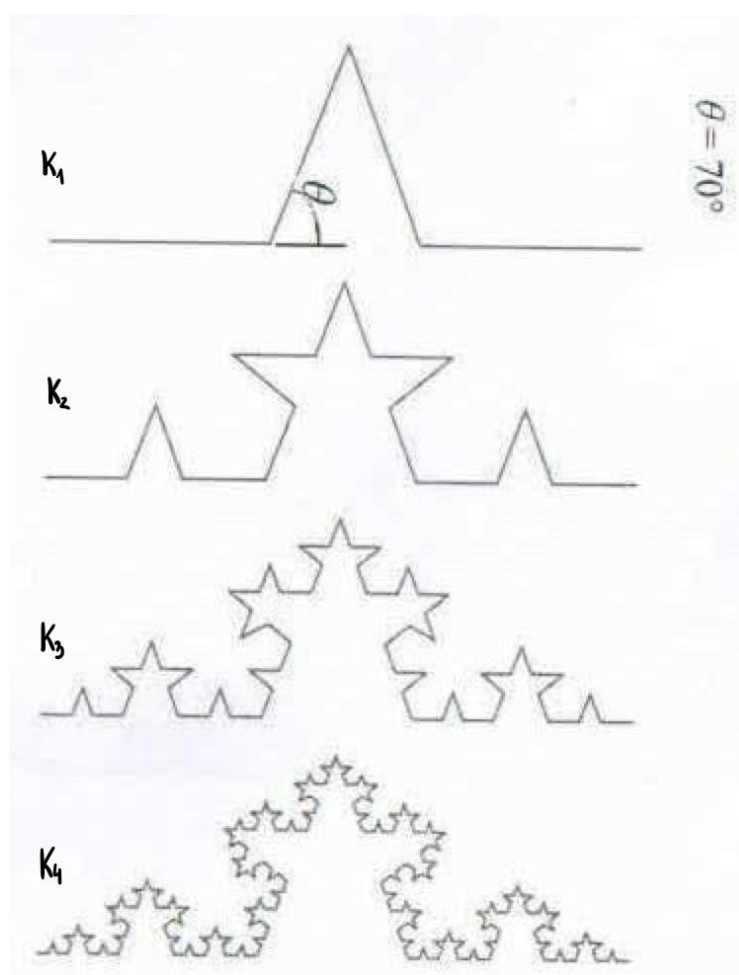
W każdej iteracji powstają 4 odcinki o długości s , dlatego wymiar fraktalny D tej krzywej wyraża się wzorem:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(2(1 + \cos \theta))}.$$

Poniżej na Rysunku 12 i 13, przedstawiono wygląd kolejnych iteracji konstrukcji krzywej Kocha dla różnych wartości kąta θ .



Rysunek 12: Kolejne iteracje konstrukcji krzywej Kocha dla $\theta = 30^\circ$



Rysunek 13: Kolejne iteracje konstrukcji krzywej Kocha dla $\theta = 70^\circ$

Wymiar fraktalny figur uzyskanych z tej konstrukcji zmienia się w zależności od wartości kąta θ . Poniżej przedstawiono przykładowe wartości.

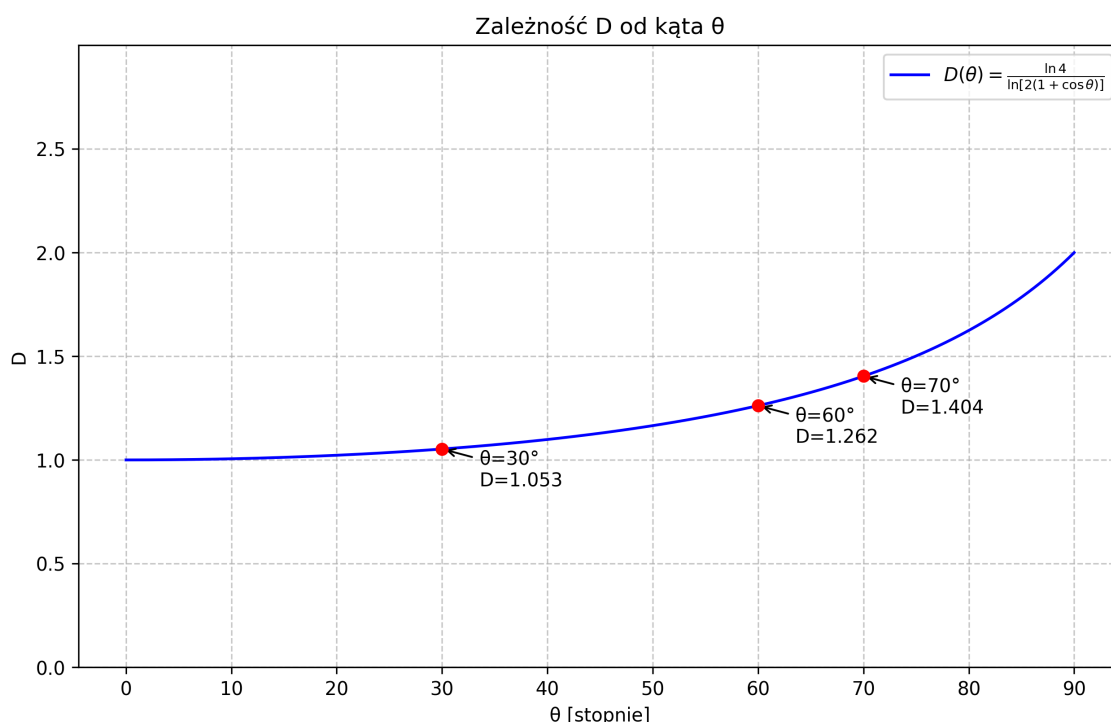
Przykład 4.6. Dla kąta $\theta = 30^\circ$ wymiar fraktalny wynosi $D = \frac{\log(4)}{\log(2(1+\cos 30^\circ))} \approx 1.053$.

Przykład 4.7. Dla kąta $\theta = 45^\circ$ wymiar fraktalny wynosi $D = \frac{\log(4)}{\log(2(1+\cos 45^\circ))} \approx 1.129$.

Przykład 4.8. Dla kąta $\theta = 60^\circ$ wymiar fraktalny wynosi $D = \frac{\log(4)}{\log(2(1+\cos 60^\circ))} \approx 1.262$. Dodatkowo wiemy, że dla klasycznej wersji właśnie taki wynik powinien nam wyjść.

Przykład 4.9. Dla kąta $\theta = 70^\circ$ wymiar fraktalny wynosi $D = \frac{\log(4)}{\log(2(1+\cos 70^\circ))} \approx 1.404$.

Z przedstawionych przykładów wynika, że zmiana kąta θ wpływa bezpośrednio na wymiar fraktalny. Wraz ze wzrostem wartości θ , zwiększa się również wartość wymiaru fraktalnego D . Zależność tą możemy zobrazować na wykresie narysowanym w programie Python.



Rysunek 14: Wykres zależności wymiaru D od kąta θ

Na wykresie (patrz Rysunek 14) widzimy, że wymiar fraktalny $D(\theta)$ rośnie wraz ze wzrostem kąta θ . Oznacza to, że krzywa staje się bardziej złożona geometrycznie, im większy jest kąt podstawianego trójkąta. Zdefiniowana funkcja:

$$D(\theta) = \frac{\log 4}{\log(2(1 + \cos \theta))}$$

jest określona dla $\theta \in (0, 90^\circ)$, ponieważ $\cos \theta \in (0, 1)$, co zapewnia dodatniość i ciągłość mianownika.

Ponieważ funkcja $\cos \theta$ jest ciągła i ściśle malejąca w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$, to $2(1 + \cos \theta)$ również jest funkcją ciągłą i ściśle malejącą. Z kolei funkcja $\log(2(1 + \cos \theta))$ jest ciągła i ściśle malejąca, a jej odwrotność również jest ciągła i ściśle rosnąca. Zatem funkcja $D(\theta)$, będąca kompozycją funkcji ciągłych i monotonicznych, jest również ciągła oraz ściśle rosnąca w całym przedziale $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Dodatkowo, można zauważyć, że:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \cos \theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\theta \rightarrow 0^+} D(\theta) = \frac{\log 4}{\log(2(1 + 1))} = \frac{\log 4}{\log 4} = 1,$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} D(\theta) = \frac{\log 4}{\log 2} = 2.$$

Zatem funkcja wymiaru fraktalnego przyjmuje wartości w przedziale otwartym:

$$D(\theta) \in (1, 2),$$

co oznacza, że każda wartość wymiaru fraktalnego pomiędzy 1 a 2 jest osiągnięta dla pewnego kąta $\theta \in (0, 90^\circ)$.

Ponieważ $D(\theta)$ jest ciągła na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$, na mocy **twierdzenia Darboux** (twierdzenia o wartości pośredniej), oznacza to również, że dla każdego $d \in (1, 2)$ istnieje taki kąt θ , dla którego $D(\theta) = d$. Dowodzi to, że nasza rodzina fraktali stanowi przykład konstrukcji zależnej od ciągłego parametru – kąta θ – a każda wartość wymiaru fraktalnego w tym przedziale jest realizowalna geometrycznie.

5 Zbiór Cantora i inne pokrewne fraktale

W tym rozdziale przedstawimy klasyczny Zbiór Cantora oraz Pył Cantora (ang. Cantor Dust, iloczyn kartezjański dwóch zbiorów Cantora). Zbadamy jak modyfikacje tych fraktali wpływają na ich wymiar fraktalny. W Podrozdziale 5.1 omówimy klasyczny zbiór Cantora, w 5.2 jego wariant odpowiadający podziałowi wyjściowego odcinka na nieparzystą liczbę odcinków i usuwaniu co drugiego z nich. W 5.3 zmienimy długość usuwanego odcinka. Podrozdziały 5.4 i 5.5 odpowiednio poświęcimy klasycznemu pyłowi Cantora oraz zmianom szerokości usuwanego pasa. Za każdym razem będziemy sprawdzać jak wprowadzone zmiany wpływają na wymiar fraktalny opisywanych zbiorów.

5.1 Klasyczny Zbiór Cantora

Zbiór Cantora jest uznawany za najprostrzy przykład fraktala.

Definicja 5.1. (Formalna konstrukcja zbioru Cantora)

Niech C_0 będzie odcinkiem jednostkowym $I = [0, 1]$. C_0 dzielimy na 3 odcinki, każdy długości $\frac{1}{3}$, i usuwamy środkowy. Sumę pozostałych 2 odcinków oznaczamy C_1 . Z kolei każdy z 2 odcinków z C_1 dzielimy na 3 odcinki o długości $\frac{1}{3^2}$ każdy i usuwamy środkowy. Pozostałą sumę 2^2 odcinków oznaczamy jako C_2 . Kontynuując rozumowanie określamy indukcyjnie C_n , który jest sumą 2^n odcinków o długości 3^{-n} . Przecięcie:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

nazywamy zbiorem Cantora.

Powyższą konstrukcję możemy uogólnić na dowolną długość odcinka, gdyż istotny jest stosunek długości poszczególnych odcinków (czyli skali podobieństwa), a ten zawsze będzie wynosił $\frac{1}{3}$ długości poprzedniego.

Przykładowa wizualizacja zbioru Cantora po sześciu krokach przedstawia się, jak na Rysunku 15.



Rysunek 15: Klasyczny zbiór Cantora [6]

Sprawdźmy, że zbiór Cantora jest figurą ściśle samopodobną. Rozumowanie jest podobne do rozumowania o dywanie Sierpińskiego. Oznaczmy fraktal taki, jak w konstrukcji z definicji jako $C = X$. Przy podziale odcinka $I = C_0$ na 3 odcinki równej długości i usunięciu wnętrza środkowego z nich otrzymujemy dwa odcinki, które nazwiemy J_1, J_2 . Każdy J_i (włącznie z usuniętym J_3) jest podobny do wyjściowego $I = C_0$ w skali $s = \frac{1}{3}$. Schemat podziału na 3 odcinki równej długości i usuwaniu środkowego z nich powtarzamy dla każdego J_i i otrzymujemy odcinki J_{i1}, J_{i2} , które ponownie będą podobne do J_i w skali $s = \frac{1}{3}$. Po nieskończeniu wielu krokach otrzymamy fraktal C , gdzie $C = X_1 \cup X_2$,

gdzie $X_i = J_i \cap X$ ("odcinki podziurowane"). Wyjaśnijmy, dlaczego X_i są podobne do X w skali $s = \frac{1}{3}$. Oznaczmy $J_{i1} \cup J_{i2}$ jako R_i (usunięty jeden środkowy odcinek J_{i3}), a I bez środkowego odcinka jako $I \setminus J_1$. Każdy odcinek z R_i stanowi $\frac{1}{3}$ odcinka $I \setminus J_1$ oraz J_{i3} jest podobny do $I \setminus J_1$ w skali $s = \frac{1}{3}$. Zatem R_i są podobne do $I \setminus J_1$ w skali $s = \frac{1}{3}$. Takie rozumowanie moglibyśmy kontynuować dla kolejnych iteracji, a więc ostatecznie dochodzimy do tego, że $C_i = J_i \cap X$ jest podobny do X w skali $s = \frac{1}{3}$.

Uzyskane mniejsze zbiory Cantora X_1 i X_2 są rozłączne. Zatem, odwołując się do wzoru na wymiar samopodobieństwa (2.3) otrzymujemy:

$$D = \frac{\log(2)}{\log(1/(1/3))} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0.6309,$$

co daje nam wynik z przedziału $(0,1)$, czyli między wymiarem punktu a wymiarem prostej.

5.2 Zmiana parametru skali

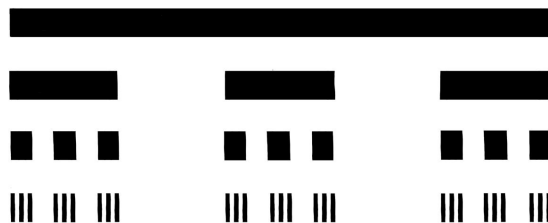
Modyfikując zbiór Cantora, możemy się zastanowić, jak by się zmienił wymiar fraktalny, gdybyśmy dzielili w każdym kroku poprzednio uzyskane odcinki na większą liczbę równych odcinków i usuwalibyśmy co drugi z nich. Ma to sens dla podziału na nieparzystą liczbę równych odcinków $M = 2k + 1$, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wtedy skala podobieństwa $s = \frac{1}{M}$, a w każdym kroku usuwamy $L = \frac{M-1}{2}$ odcinków. Po usunięciu zostanie $N = M - L = k + 1 = \frac{M+1}{2}$ odcinków podobnych.

Przykład 5.2. Dla $k = 1$: $M = 2k + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $s = \frac{1}{M} = \frac{1}{3}$, $L = \frac{M-1}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$. Czyli w pierwszym kroku dzielimy odcinek jednostkowy I na $M = 3$ równe odcinki, i usuwamy $L = 1$ z nich. Kontynuując iterację dostaniemy klasyczny zbiór Cantora.

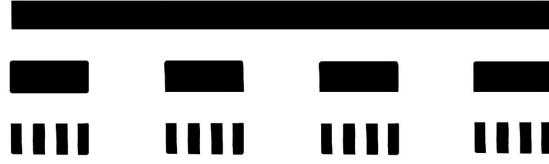
Przykład 5.3. Dla $k = 2$: $M = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $s = \frac{1}{M} = \frac{1}{5}$, $L = \frac{M-1}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$. Czyli w pierwszym kroku dzielimy odcinek jednostkowy I na $M = 5$ równych odcinków, i usuwamy $L = 2$ z nich.

Przykład 5.4. Dla $k = 3$: $M = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $s = \frac{1}{M} = \frac{1}{7}$, $L = \frac{M-1}{2} = \frac{7-1}{2} = 3$. Czyli w pierwszym kroku dzielimy odcinek jednostkowy I na $M = 7$ równych odcinków, i usuwamy $L = 3$ z nich.

Wizualizację Przykładu 5.3 po trzech krokach iteracji przedstawia Rysunek 16, zaś Przykładu 5.4 po dwóch krokach iteracji - Rysunek 17.



Rysunek 16: Modyfikacja zbioru Cantora z podziałem na 5 odcinków (odręcznie)



Rysunek 17: Modyfikacja zbioru Cantora z podziałem na 7 odcinków (odręcznie)

Uzasadnienie samopodobieństwa dla podanej rodziny fraktali jest bardzo podobne jak dla klasycznego zbioru Cantora, z tym, że całość będzie podzielona na $M = 2k + 1$ fragmentów podobnych do całości w skali $s = \frac{1}{M}$, a w każdym podziale będziemy usuwać wewnątrz $L = \frac{M-1}{2}$ odcinków, czyli zostaną $N = k + 1$ odcinki podobne.

Policzmy wymiar samopodobieństwa otrzymanych fraktali.

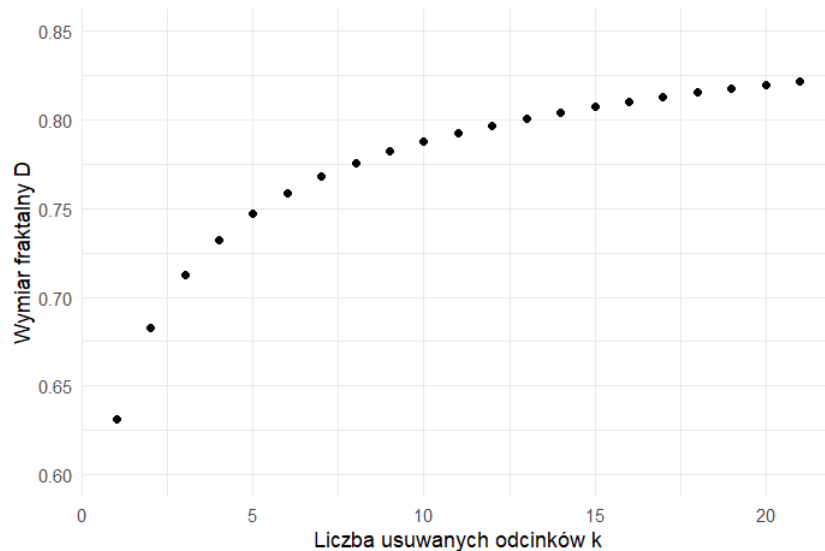
Dla $k=2$:

$$D = \frac{\log(3)}{\log(1/(1/5))} = \frac{\log(3)}{\log(5)} \approx 0.6826$$

Dla $k=3$:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(1/(1/7))} = \frac{\log(4)}{\log(7)} \approx 0.7124$$

Widzimy, że wymiar fraktalny się zwiększa wraz ze wzrostem ilości usuwanych odcinków (czyli zmniejszeniem skali). Wykres na Rysunku 15 przedstawia zmienność wymiaru fraktali w zależności od wartości parametru k .



Rysunek 18: Wykres zależności wymiaru fraktalnego D od liczby usuwanych odcinków k

Zobaczmy co będzie się działo dla $k \rightarrow \infty$. Wtedy $M = 2k + 1 \rightarrow \infty$, $s = \frac{1}{M} \rightarrow 0$, $N = k + 1 = \frac{M+1}{2} \rightarrow \infty$. Odpowiednio wymiar samopodobieństwa wylicza się wtedy ze wzoru:

$$D = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{s})} = \frac{\log(\frac{M+1}{2})}{\log(M)}$$

Gdy $M \rightarrow \infty$ to graniczna wartość wymiaru wynosi:

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log(1/s)} & \stackrel{M=2 \cdot k+1, s=\frac{1}{M}, N=\frac{M+1}{2}}{=} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\log(\frac{M+1}{2})}{\log(M)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \text{ reguła de l'Hospitala} \\
& = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{2 \cdot \frac{M+1}{2}} \right) : \left(\frac{1}{M} \right) \right] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M}{M+1} = \\
& = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{M}} = \lim_{\frac{1}{M} \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{1}{M}} = 1
\end{aligned}$$

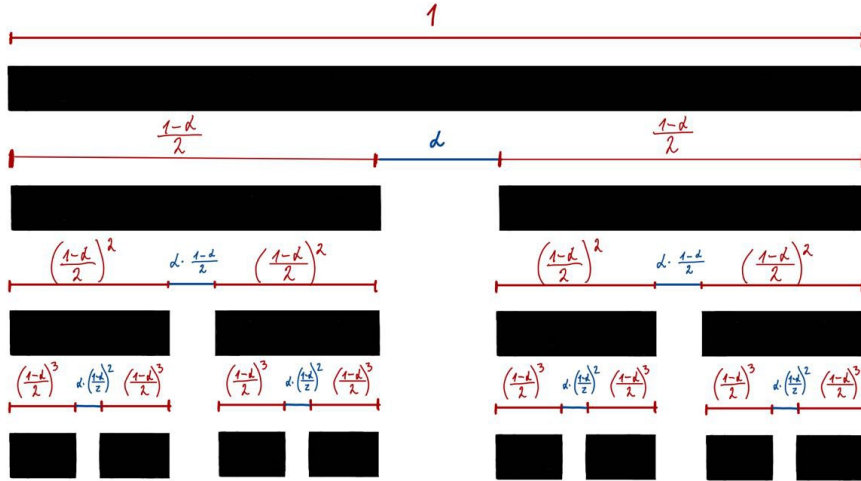
Dzięki powyższym obliczeniom przekonaaliśmy się, że przy zwiększaniu ilości usuwanych odcinków, czyli przy parametrze k zbiegającym do ∞ , skala s zbiega do 0 oraz granica wymiaru samopodobieństwa jest równa 1.

5.3 Zmiana długości usuwanego odcinka

Modyfikując klasyczny zbiór Cantora, moglibyśmy zastanowić się, co by się zmieniło, zarówno w strukturze fraktala, jak i przede wszystkim w jego wymiarze, gdybyśmy wciąż usuwali jeden odcinek, ale zmienilibyśmy długość tego odcinka. Dlatego w tym podrozdziale zbadamy wpływ takiej modyfikacji na wielkość wymiaru samopodobieństwa.

Przyjmijmy, że wyjściowy odcinek ma długość 1. Oznaczmy długość usuwanego odcinka jako $\alpha \in (0, 1)$. Wtedy w pierwszym kroku po usunięciu z I odcinka środkowego długości α zostaną 2 odcinki długości $\frac{1-\alpha}{2}$ każdy, w drugim kroku 2^2 odcinków długości $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2$, a w n -tym kroku 2^n odcinków długości $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^n$ każdy.

Na Rysunku 19 jest przedstawiona wizualizacja tego fraktala po trzech krokach iteracji dla parametru $\alpha = \frac{1}{7}$.



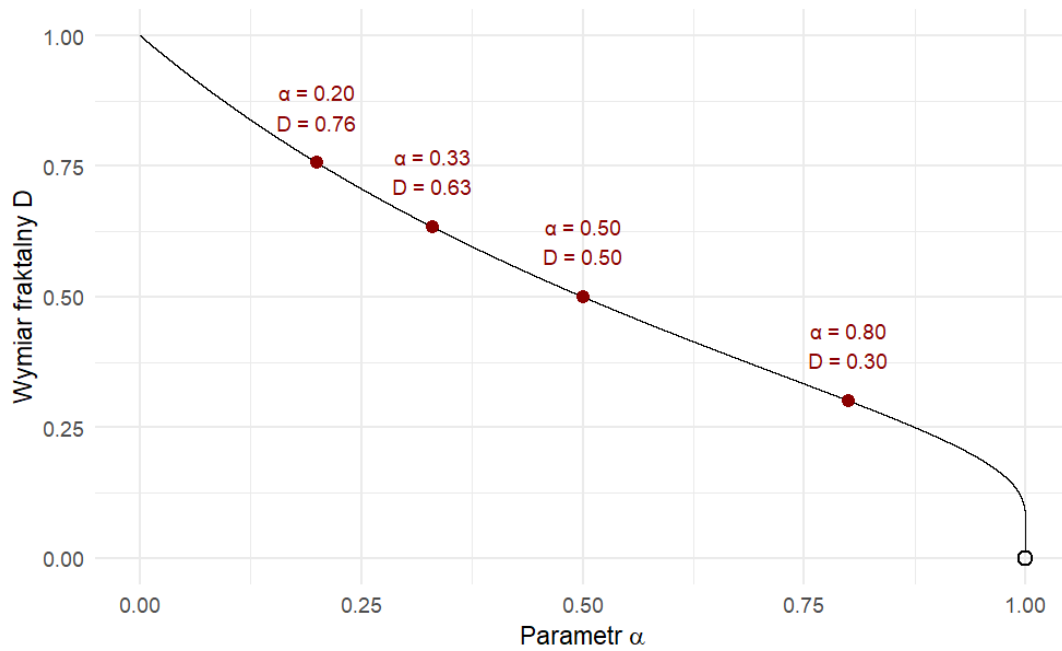
Rysunek 19: Modyfikacja zbioru Cantora w zależności od długości usuwanego odcinka α (odręcznie)

Uzasadnienie, że dla dowolnego $\alpha \in (0, 1)$ tak zmodyfikowany zbiór Cantora jest figurą ściśle samopodobną przebiega identycznie jak dla klasycznego zbioru Cantora, z tym, że skala podobieństwa zmodyfikowanych X_1, X_2 do całości X wynosi $s = \frac{1-\alpha}{2}$.

Policzmy wymiar dla przedstawionej modyfikacji. Zachodzi $s = \frac{1-\alpha}{2}$, $N = 2$. Wtedy:

$$D = \frac{\log(2)}{\log(1/\frac{1-\alpha}{2})} = \frac{\log(2)}{\log(\frac{2}{1-\alpha})}$$

Wykres na Rysunku 20 przedstawia wartości wymiaru fraktalnego D dla $\alpha \in (0, 1)$ z krokiem 10^{-12} .



Rysunek 20: Wykres zależności wymiaru fraktalnego D od długości usuwanego odcinka α

Z wykresu widzimy, że wymiar fraktalny maleje wraz ze zwiększeniem długości usuwanego odcinka α , w tym D przyjmuje dowolną wartość z przedziału $(0, 1)$, a jego granica dla $\alpha \rightarrow 1$ wynosi 0, zaś granica dla $\alpha \rightarrow 0$ wynosi 1. Potwierdźmy analitycznym rachunkiem tą obserwację dotyczącą granicy wymiaru D dla $\alpha \rightarrow 0$ i dla $\alpha \rightarrow 1$.

W punkcie $\alpha = 0$ funkcja jest ciągła, więc możemy obliczyć granice jako wartość funkcji w $\alpha = 0$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log(2)}{\log(\frac{2}{1-\alpha})} = \frac{\log(2)}{\log(\frac{2}{2-0})} = 1$$

Wartość granicy wymiaru D dla $\alpha \rightarrow 1$ obliczymy poprzez granicę lewostronną w punkcie $\alpha = 1$. Czyli $\alpha \rightarrow 1^-$, skąd $(1 - \alpha) \rightarrow 0^+$. Wtedy $\log(1 - \alpha) \rightarrow -\infty$ oraz $1 - \frac{\log(1-\alpha)}{\log(2)} \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\log(2)}{\log(\frac{2}{1-\alpha})} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\log(2)}{\log(2) - \log(1-\alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - \frac{\log(1-\alpha)}{\log(2)}} = 0$$

Jest to rodzina fraktali, zależna od ciągłego parametru, w której każda liczba z przedziału $(0, 1)$ jest realizowana jako wymiar fraktalny jednego z przykładów. Przekształcając wzór na wymiar fraktalny dostaniemy wzór, który pozwala wyliczyć α odpowiadające dowolnemu wybranemu $D \in (0, 1)$.

$$\begin{aligned} D &= \frac{\log(2)}{\log(\frac{2}{1-\alpha})} \\ \log(\frac{2}{1-\alpha}) &= \frac{\log(2)}{D} \\ \frac{2}{1-\alpha} &= 10^{\frac{\log(2)}{D}} \\ 1-\alpha &= \frac{2}{10^{\frac{\log(2)}{D}}} \\ \alpha &= 1 - \frac{2}{10^{\frac{\log(2)}{D}}} \end{aligned}$$

5.4 Klasyczny pył Cantora

Następnym klasycznym przykładem fraktali, który przedstawimy jest pył Cantora. Ten fraktal jest iloczynem kartezjańskim dwóch zbiorów Cantora.

Definicja 5.5. (Formalna konstrukcja pyłu Cantora)

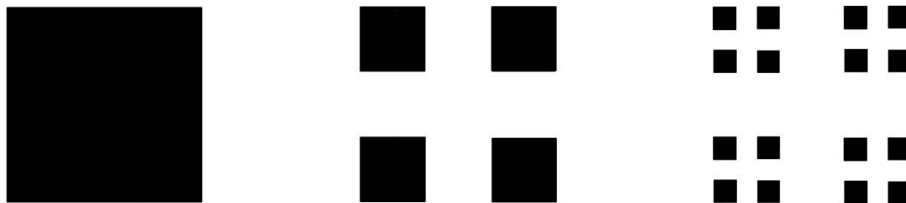
Niech P_0 będzie kwadratem jednostkowym $I = [0, 1]^2$. Każdy z boków P_0 dzielimy na 3 odcinki, każdy długości $\frac{1}{3}$, i usuwamy wnętrza dwóch pasów, utworzonych przez połączenie środkowych odcinków z ich odpowiednikami na przeciwległych bokach kwadratu. Sumę pozostałych 4 kwadratów oznaczamy P_1 . Z kolei każdy z boków 4 kwadratów z P_1 dzielimy na 3 odcinki o długości $\frac{1}{3^2}$ każdy i usuwamy dwa pasy, utworzone przez środkowe odcinki, w analogiczny sposób jak w poprzednim kroku. Pozostałą sumę 4^3 kwadratów oznaczamy jako P_2 . Kontynuując rozumowanie określamy indukcyjnie P_n , który jest sumą 4^n kwadratów o długości boku 3^{-n} każdy. Przecięcie:

$$P = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n$$

nazywamy pyłem Cantora.

Powyższą konstrukcję możemy uogólnić na dowolną długość boku kwadratu, gdyż istotny jest stosunek długość poszczególnych boków (czyli skali podobieństwa), a ten zawsze będzie wynosił $\frac{1}{3}$ długości poprzedniego boku.

Przykładowa wizualizacja pyłu Cantora po dwóch krokach przedstawia się, jak na Rysunku 21.



Rysunek 21: Klasyczny pył Cantora (odręcznie)

Sprawdźmy, że pył Cantora jest figurą ściśle samopodobną. Rozumowanie jest podobne do rozumowania o klasycznym zbiorze Cantora. Oznaczmy fraktal taki, jak w konstrukcji z definicji jako $P = X$. Przy podziale każdego z boków kwadratu $L = P_0$ na 3 odcinki równej długości i po usunięciu wnętrza dwóch pasów, utworzonych poprzez połączenie środkowych odcinków z ich odpowiednikami na przeciwległych bokach, otrzymujemy cztery kwadraty, które nazwiemy L_1, L_2, L_3, L_4 . Każdy z kwadratów L_i jest podobny do wyjściowego kwadratu $L = P_0$ w skali $s = \frac{1}{3}$. Schemat podziału boków poszczególnych kwadratów na 3 odcinki równej długości i usunięcia pasa, utworzonego ze środkowych odcinków w analogiczny sposób, jak w kroku poprzednim, powtarzamy dla każdego L_i i otrzymujemy kwadraty, które ponownie będą podobne do L_i w skali $s = \frac{1}{3}$. Po nieskończonym wielu krokach otrzymamy fraktal $P = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup X_4$, w którym $X_i = L_i \cap X$ ("kwadraty bez pasów"). Wyjaśnijmy, dlaczego X_i są podobne do X w skali $s = \frac{1}{3}$. Schemat podziału boków poszczególnych kwadratów i usunięcia środkowych pasów, opisanego jak wyżej, powtarzamy dla każdego L_i i otrzymujemy kwadraty $L_{i1}, L_{i2}, L_{i3}, L_{i4}$, które są podobne do L_i w skali $s = \frac{1}{3}$. Oznaczmy $L_{i1} \cup L_{i2} \cup L_{i3} \cup L_{i4}$ jako T_i (usunięte zostały pasy środkowe o szerokości $\frac{1}{9}$), a L bez środkowych pasów jako $L \setminus p$, gdzie p oznacza usunięte pasy o szerokości $\frac{1}{3}$. Każdy kwadrat z T_i stanowi $\frac{1}{3}$ kwadratu z $L \setminus p$ oraz szerokość pasów p jest podobna do długości boku kwadratu $L \setminus p$ w skali $s = \frac{1}{3}$. Zatem T_i są podobne do $L \setminus p$ w skali $s = \frac{1}{3}$. Takie rozumowanie moglibyśmy kontynuować dla kolejnych iteracji, a więc ostatecznie dochodzimy do tego, że $P_i = L_i \cap X$ jest podobny do X w skali $s = \frac{1}{3}$.

Uzyskane mniejsze pyły Cantora X_1, X_2, X_3, X_4 są rozłączne. Zatem, odwołując się do wzoru na wymiar samopodobieństwa (2.3) otrzymujemy:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(1/(1/3))} = \frac{2 \log(2)}{\log(3)} \approx 1,26,$$

co daje nam wynik z przedziału $(1, 2)$, czyli między wymiarem prostej a wymiarem figury płaskiej.

Można zauważyć, że wymiar pyłu Cantora jest 2 razy większy od wymiaru zbioru Cantora:

$$D_{\text{pyłu Cantora}} = 2 \frac{\log(2)}{\log(3)} = 2D_{\text{zbioru Cantora}}.$$

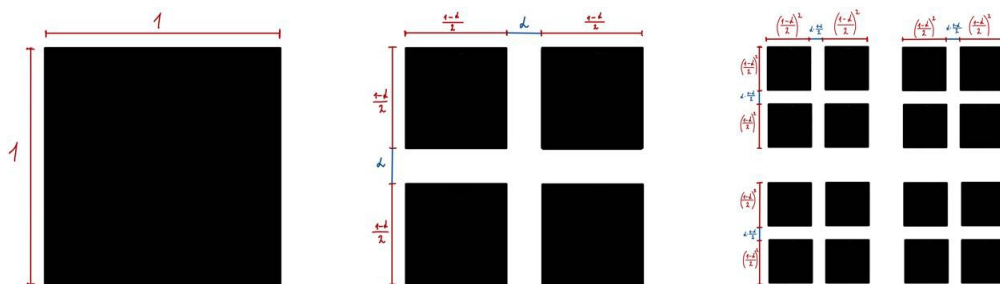
5.5 Zmiana szerokości usuwanych pasów pyłu Cantora

Podobnie jak w Podrozdziale 5.3, modyfikując klasyczny pył Cantora moglibyśmy zastanowić się, co by się zmieniło, zarówno w strukturze fraktala, jak i przede wszystkim w jego

wymiarze, gdybyśmy zmienili szerokość usuwanych pasów. Dlatego w tym podrozdziale zbadamy wpływ takiej modyfikacji na wielkość wymiaru samopodobieństwa.

Przyjmijmy, że bok kwadratu wyjściowego jest równy 1. Oznaczmy szerokości usuwanych pasów jako $\alpha \in (0, 1)$. Wtedy w pierwszym kroku po usunięciu z kwadratu I pasów środkowych szerokości α zostaną 4 kwadraty o bokach długość $\frac{1-\alpha}{2}$ każdy, w drugim kroku 4^2 kwadratów o bokach długości $(\frac{1-\alpha}{2})^2$ każdy, a w n -tym kroku 4^n kwadratów o długości boku $(\frac{1-\alpha}{2})^n$ każdy.

Na Rysunku 22 jest przedstawiona wizualizacja tego fraktala po dwóch krokach iteracji dla parametru $\alpha = \frac{1}{7}$.



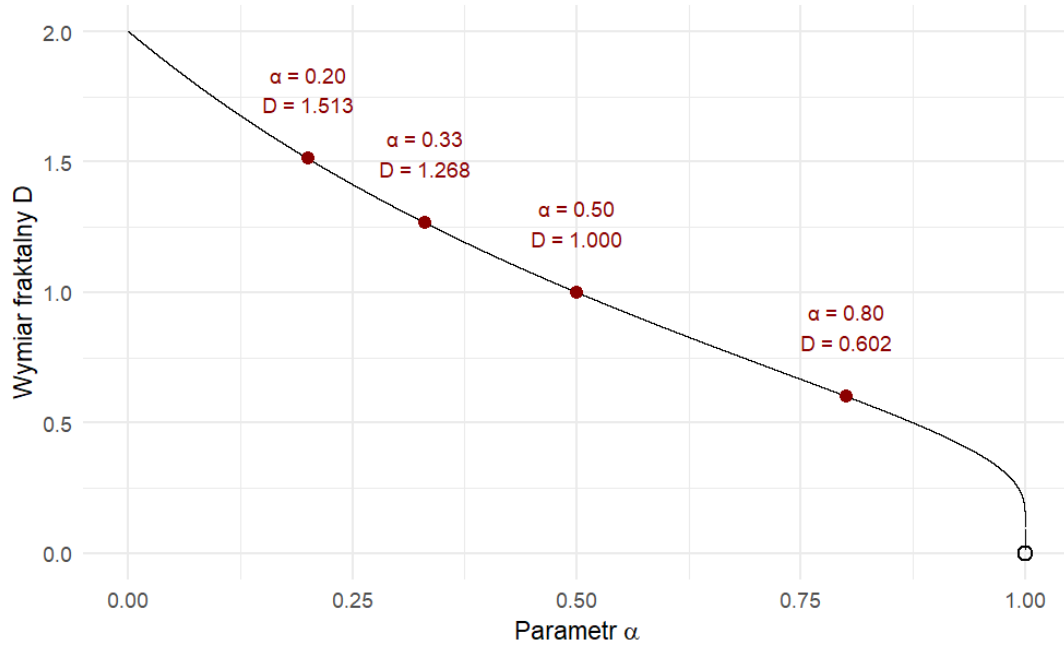
Rysunek 22: Modyfikacja pyłu Cantora w zależności od szerokości usuwanych pasów (odręcznie)

Uzasadnienie, że dla dowolnego $\alpha \in (0, 1)$ tak zmodyfikowany pył Cantora jest figurą ściśle samopodobną przebiega identycznie jak dla klasycznego pyłu Cantora, z tym, że skala podobieństwa fragmentów X_1, X_2, X_3, X_4 do całości X wynosi $s = \frac{1-\alpha}{2}$.

Policzmy wymiar dla przedstawionej modyfikacji. Zachodzi $s = \frac{1-\alpha}{2}$, $N = 4$. Wtedy:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(1/\frac{1-\alpha}{2})} = \frac{\log(4)}{\log(\frac{2}{1-\alpha})}$$

Wykres na Rysunku 23 przedstawia zależność wymiaru fraktalnego D od parametru α dla $\alpha \in (0, 1)$ z krokiem 10^{-12} .



Rysunek 23: Wykres zależności wymiaru fraktalnego D od szerokości usuwanych pasów α

Z wykresu widzimy, że wymiar fraktalny maleje wraz ze zwiększeniem szerokości α usuwanych pasów, w tym D przyjmuje dowolną wartość z przedziału $(0, 2)$, a jego granica dla $\alpha \rightarrow 1$ wynosi 0, zaś dla $\alpha \rightarrow 0$ wynosi 2. Potwierdźmy analitycznym rachunkiem tą obserwację dotyczącą granicy wymiaru D dla $\alpha \rightarrow 0$ i dla $\alpha \rightarrow 1$.

W punkcie $\alpha = 0$ funkcja jest ciągła, więc możemy obliczyć granice jako wartość funkcji w $\alpha = 0$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\log(4)}{\log(\frac{2}{1-\alpha})} = \frac{\log(4)}{\log(\frac{2}{1-0})} = \frac{\log(4)}{\log(2)} = 2$$

Wartość granicy wymiaru D dla $\alpha \rightarrow 1$ obliczymy poprzez granicę lewostronną w punkcie $\alpha = 1$. Czyli $\alpha \rightarrow 1^-$, skąd $(1 - \alpha) \rightarrow 0^+$. Wtedy $\log(1 - \alpha) \rightarrow -\infty$ oraz $1 - \frac{\log(1-\alpha)}{\log(2)} \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\log(4)}{\log(\frac{2}{1-\alpha})} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{2\log(2)}{\log(2) - \log(1-\alpha)} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{2}{1 - \frac{\log(1-\alpha)}{\log(2)}} = 0$$

Jest to rodzina fraktali, zależna od ciągłego parametru, w której każda liczba z przedziału $(0, 2)$ jest realizowana jako wymiar fraktalny jednego z przykładów. Przekształcając wzór na wymiar fraktalny dostaniemy wzór, który pozwala wyliczyć α odpowiadające dowolnemu wybranemu $D \in (0, 2)$.

$$\begin{aligned}
D &= \frac{\log(4)}{\log(\frac{2}{1-\alpha})} \\
\log(\frac{2}{1-\alpha}) &= \frac{2\log(2)}{D} \\
\frac{2}{1-\alpha} &= 10^{\frac{2\log(2)}{D}} \\
1-\alpha &= \frac{2}{10^{\frac{2\log(2)}{D}}} \\
\alpha &= 1 - \frac{2}{10^{\frac{2\log(2)}{D}}}
\end{aligned}$$

Można zauważyć, że wymiar zmodyfikowanego pyłu Cantora jest 2 razy większy od wymiaru zmodyfikowanego zbioru Cantora (z Podrozdziału 5.3) dla tego samego parametru $\alpha \in (0, 1)$:

$$D_{\text{zmodyf. pyłu Cantora}} = 2 \frac{\log(2)}{\log(\frac{2}{1-\alpha})} = 2D_{\text{zmodyf. zbioru Cantora}}.$$

Literatura

- [1] Falconer K.: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.*, John Wiley and Sons Inc, New York, 1990
- [2] Engelking R., Sieklucki K.: *Geometria i topologia. Część II. Topologia*, PWN, Warszawa, 1980
- [3] Duda R.: *Wprowadzenie do topologii. Część I. Topologia ogólna*, PWN, Warszawa, 1986
- [4] https://pl.wikipedia.org/wiki/Dywan_Sierpi%C5%84skiego#/media/Plik:Sierpinski6.png
- [5] Falconer K.: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. Second Edition.*, John Wiley and Sons Inc, 2003
- [6] https://pl.wikipedia.org/wiki/Zbi%C3%B3r_Cantora