

Spis treści

1. Wprowadzenie.

- 1.1. Wstęp.
- 1.2. Zagadnienie Apolloniusza, krótki opis.
- 1.3. Inwersja.
- 1.4. Własności inwersji.
- 1.5. Podstawowe konstrukcje geometryczne.
- 1.6. Konstrukcja okręgu Apolloniusza.

2. Opis programu „t-nwtsys”.

- 2.1. Wstęp.
- 2.2. Opis metody iteracyjnej Newtona.
- 2.3. Wywołanie procedury *Newtonsystem*.
- 2.4. Sposób doboru parametrów początkowych iteracji.
- 2.5. Metody wprowadzania współrzędnych danych okręgów.
- 2.6. Wydruki.

3. Rozpatrzenie przypadków „szczególnych położeń”.

- 3.1. Położenie ogólne.
- 3.2. Położenie szczególne I-go stopnia.
- 3.3. Położenie szczególne II-go stopnia.
- 3.4. Położenie szczególne III-go stopnia.
- 3.5. Położenie szczególne IV-go stopnia.
- 3.6. Położenie szczególne V-go stopnia.
- 3.7. Położenie szczególne VI-go stopnia.
- 3.8. Uogólnienie zagadnienia Apolloniusza.
- 3.9. Położenia - uzupełnienie.
- 3.10. Podsumowanie.

4. Rozpatrzenie wszystkich obszarów jakie powstają w wyniku podziału płaszczyzny przez trzy okręgi.

- 4.1. Wstęp.
- 4.2. Obszary.
- 4.3. Podsumowanie.

5. Algebraiczny dowód istnienia co najwyżej ośmiu okręgów Apolloniusza.

1. Wprowadzenie

1.1. Wstęp

Celem tej pracy jest przedstawienie zagadnienia Apolloniusza, rozważenie wszystkich kombinacji wzajemnych położzeń trzech okręgów na płaszczyźnie, analiza ilości rozwiązań w zależności od wzajemnego położenia okręgów oraz przeprowadzenie dowodu istnienia co najwyżej ośmiu rozwiązań tegoż zagadnienia.

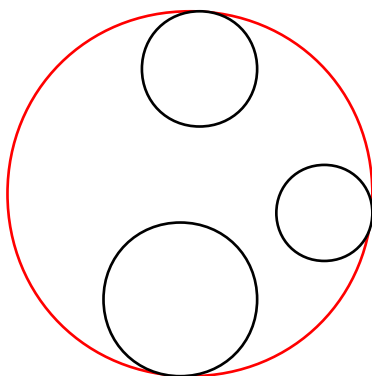
1.2. Zagadnienie Apolloniusza, krótki opis.

Rozwiązywanie zagadnień konstrukcyjnych za pomocą cyrkla i liniału interesowało od dawna wszystkich zajmujących się geometrią. Za pomocą tych przyrządów można podzielić dowolny kąt, lub odcinek na połowę, można z dowolnego miejsca poprowadzić prostą prostopadłą do danej prostej, itd. Nie wszystkie jednak konstrukcje były tak proste jak te wymienione wyżej, niektóre z nich przez wiele lat czekały na odkrywców, a to nasuwało matematykom myśl, czy przypadkiem nie jest prawdziwe twierdzenie, że takich konstrukcji nie da się w ogóle wykonać za pomocą cyrkla i liniału.

Przyjrzyjmy się teraz jednemu z zagadnień, które sprawiło matematykom tyle kłopotu. Niewątpliwie jednym z najslynniejszych, ale dającym się rozwiązać problemem konstrukcyjnym jest zagadnienie Apolloniusza. Pochodzi ono z 200 r.p.n.e. i brzmi następująco:

Do danych trzech okręgów położonych na płaszczyźnie należy znaleźć czwarty, styczny do wszystkich trzech (rys. 1).

Okrąg styczny do danych trzech okręgów nazywać będziemy *okręgiem Apolloniusza*.



Rys. 1

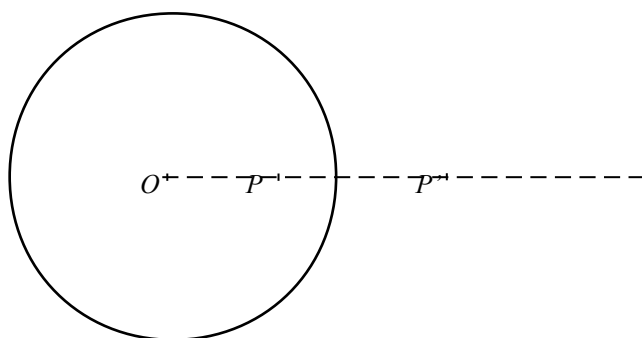
Z rozwiązaniem tego zagadnienia przez długi czas były spore trudności, jednak w końcu udało się rozwiązać ten problem dzięki zastosowaniu przekształcenia zwanego inwersją. Dla porządku dalszych rozważań przypomnijmy sobie na czym to przekształcenie polega.

1.3. Inwersja

Definicja 1.3.1. *Inwersją* względem okręgu o środku w punkcie O i promieniu r nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, przy którym dowolnie wybranemu punktowi P , różnemu od punktu O , odpowiada taki punkt P' na półprostej OP , że

$$|OP| \times |OP'| = r^2 \quad (1)$$

(rys. 2). Punkt O nazywamy *środkiem inwersji*; liczbę r^2 - *potęgą* albo *współczynnikiem inwersji*.



Rys.2

Punkty P i P' nazywa się inwersyjnymi względem okręgu C .

Z definicji tej wynika, że jeżeli P' jest punktem inwersyjnym w stosunku do P to P jest punktem inwersyjnym do P' . Inwersja zamienia wnętrze i zewnątrz okręgu C ; przy $OP < r$ mamy bowiem $OP' > r$ i przy $OP > r$ mamy $OP' < r$.

Jedynymi punktami płaszczyzny, które pozostają niezmienione przy inwersji, są punkty samego okręgu C .

Reguła (1) nie definiuje obrazu środka O . Jasne jest, że jeżeli punkt P zbliża się do środka okręgu to punkt P' odsuwa się coraz dalej od punktu O . Mówimy, że punktowi O odpowiada przy inwersji punkt w nieskończoności. Użycie takiej terminologii pozwala nam uważać, iż inwersja ustala między punktami płaszczyzny i ich obrazami odpowiedniość wzajemnie jednoznaczłą bez wyjątków: każdy punkt ma jeden i tylko jeden obraz i sam jest obrazem jednego i tylko jednego punktu.

1.4. Własności inwersji

- I. prosta przechodząca przez punkt O przekształca się w prostą przechodzącą przez punkt O .
- II. Prosta nie przechodząca przez punkt O przekształca się na okrąg przechodzący przez punkt O .
- III. Okrąg przechodzący przez punkt O przekształca się na prostą nie przechodzącą przez punkt O .
- IV. Okrąg nie przechodzący przez punkt O przekształca się na okrąg nie przechodzący przez punkt O .
- V. Kąt między dwoma krzywymi jest niezmiennikiem inwersji. (Inwersja przekształca każde dwie krzywe przecinające się pod kątem α na dwie krzywe przecinające się pod tym samym kątem, gdzie przez kąt między dwiema krzywymi rozumiemy kąt między stycznymi do tych krzywych w punkcie przecięcia)

Z własności inwersji wynika, że:

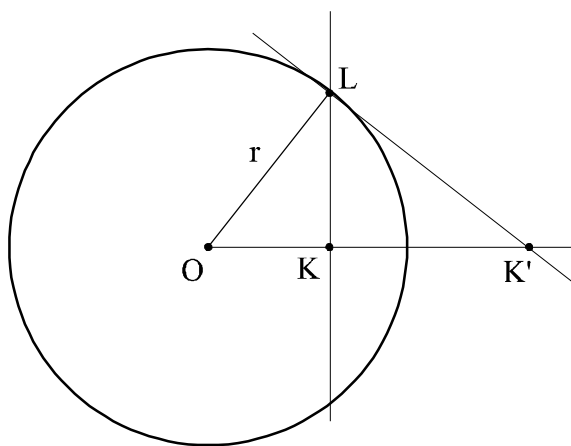
- a) Inwersja przekształca okręgi ortogonalne (przecinające się pod kątem prostym) na okręgi ortogonalne, oraz dwa okręgi styczne w punkcie różnym od środka inwersji na okręgi styczne.
- b) Rodzinę okręgów stycznych w środku inwersji przekształca na rodzinę prostych równoległych.

1.4. Podstawowe konstrukcje geometryczne.

Zanim przejdziemy do konstruowania okręgu Apolloniusza za pomocą cyrkla i linijki przypomnijmy sobie podstawowe konstrukcje wykorzystywane w kolejnych etapach naszych rozważań.

Konstrukcja 1.4.1. Aby skonstruować obraz punktu K leżącego wewnątrz okręgu inwersji i różnego od O wykonujemy następujące czynności:

1. Rysujemy prostą prostopadłą do prostej OK , przechodzącą przez K i znajdujemy punkt L będący jej przecięciem z okręgiem inwersyjnym.
2. Konstruujemy styczną do okręgu inwersyjnego w punkcie L .
3. Punkt przecięcia stycznej z prostą OK – K' – jest obrazem punktu K (rys. 3).



rys. 3

Uzasadnienie poprawności konstrukcji:

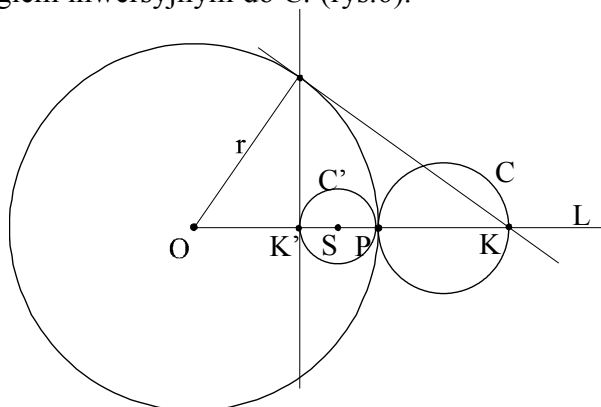
Trójkąty OKL i OLK' są prostokątne ($\angle OKL = \angle OLK' = 90^\circ$) i mają kąt wspólny LOK . Z tego i z warunków podobieństwa trójkątów wynika, iż trójkąty OKL i OLK' są podobne. Zatem prawdziwa jest równość:

$$\frac{|OK|}{|OL|} = \frac{|OL|}{|OK'|}, \quad |OL| = r$$
$$|OK| \times |OK'| = r^2$$

Konstrukcja 1.4.2. Żeby znaleźć obraz punktu K , w przypadku gdy leży on na zewnątrz okręgu inwersyjnego, postępowanie jest następujące:

1. Konstruujemy okrąg oparty na średnicy OK .
2. Znajdujemy punkt jego przecięcia L z okręgiem inwersyjnym.
3. Rysujemy prostą prostopadłą do OK przechodzącą przez L .
4. Punkt przecięcia obu prostych – K' – jest obrazem punktu K (rys. 4).

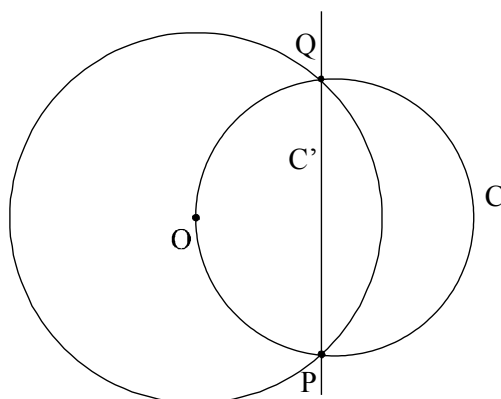
szukanym okręgiem inwersyjnym do C . (rys.6).



rys. 6

Konstrukcja 1.4.5. Żeby znaleźć obraz okręgu C , w przypadku gdy okrąg inwersji przecina go, a środek inwersji leży on okręgu C :

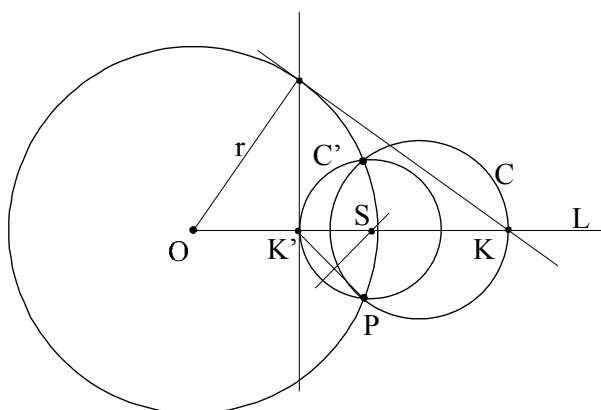
1. Korzystając z I własności inwersji, oraz tego, że punkty leżące na okręgu inwersyjnym są niezmiennikami inwersji kreślimy prostą C' przechodzącą przez punkty P i R będącą obrazem inwersyjnym okręgu C (rys. 7).



rys. 7

Konstrukcja 1.4.6. Żeby znaleźć obraz okręgu C , w przypadku gdy okrąg inwersji przecina go lecz środek inwersji nie leży na okręgu C postępujemy w następujący sposób:

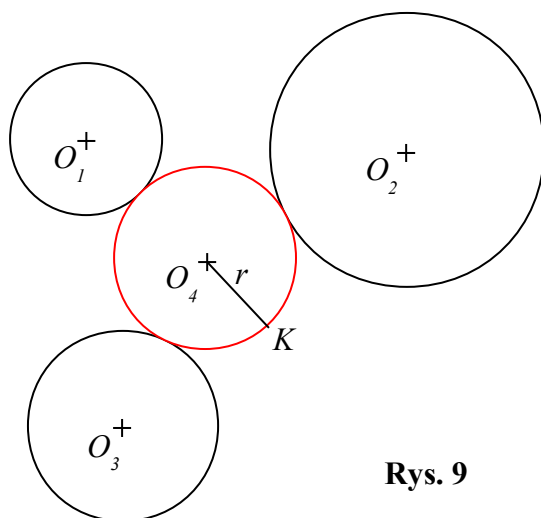
1. Rysujemy prostą L przechodzącą przez środek okręgu inwersji oraz przez środek okręgu C .
2. Znajdujemy punkt K' będący obrazem punktu K - punktu przecięcia prostej L z okręgiem C .
3. Wyznaczamy środkową odcinka $K'P$.
4. Z punktu przecięcia środkowej z prostą L - S , rozwartością cyrkla $|SP|$ rysujemy okrąg C' , który jest szukanym okręgiem inwersyjnym do C . (rys.8).



rys.8.

1.6. Konstrukcja okręgu Apolloniusza

Przeprowadźmy teraz prostą konstrukcję okręgu stycznego do trzech danych okręgów. Z własności inwersji wynika, że stosując te przekształcenia względem dowolnie wybranego środka inwersji, zagadnienie Apolloniusza dla trzech danych okręgów można sprowadzić do odpowiedniego zagadnienia dla trzech innych okręgów. Stąd wynika, że jeżeli można podać konstrukcję czwartego okręgu stycznego do pewnych trzech okręgów, to zagadnienie jest rozwiązywalne dla każdych trzech okręgów, które możemy otrzymać z danej trójki przez inwersję. Wykorzystując ten fakt wystarczy podać konstrukcję dla najprostszego układu okręgów. W tym celu rozpatrzmy trzy okręgi o środkach w punktach O_1, O_2, O_3 (rys. 8), do których szukany okrąg K o środku w punkcie O_4 i promieniu r jest styczny zewnętrznie.

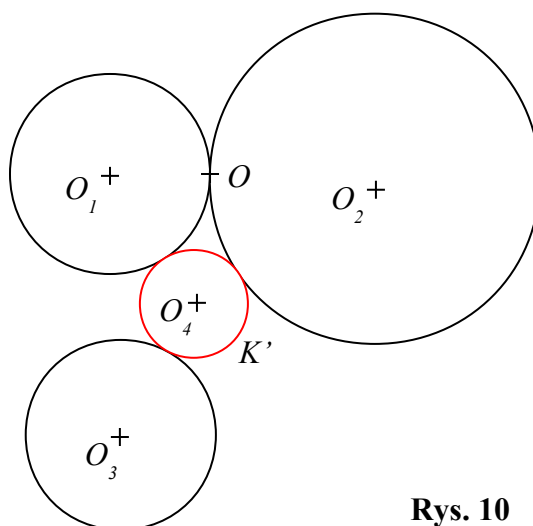


Rys. 9

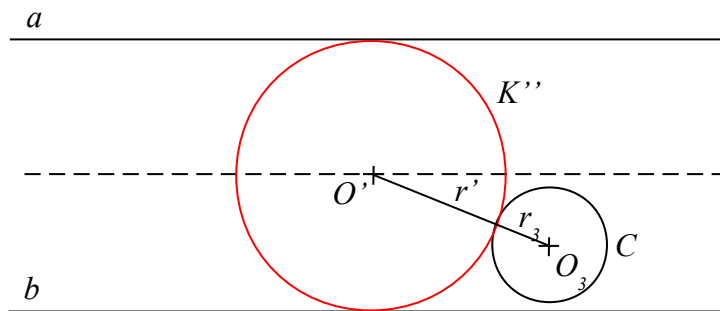
Zauważmy, że jeżeli zwiększymy promienie trzech danych okręgów o tę samą długość np. o d , to okrąg o promieniu $r - d$ i o środku O_4 będzie również rozwiązaniem zagadnienia dla zwiększonych okręgów.

Wykorzystując tę uwagę przekształćmy okręgi przedstawione na rys. 9 tak aby dwa z nich były styczne w punkcie O (rys. 10).

Dokonujemy teraz inwersji całej figury przedstawionej na rys. 10 względem pewnego okręgu o środku w punkcie O . Wówczas okręgi o środkach w punktach O_1 i O_2 przejdą na proste równoległe a i b , trzeci zaś okrąg przejdzie na pewien okrąg C . Sytuację tą przedstawia rys. 11. Jak wiadomo obrazy inwersyjne a, b, c można skonstruować używając wyłącznie cyrkla i linijki.



Rys. 10



Rys. 11

Poszukiwany przez nas okrąg K' , przy inwersji względem okręgu o środku O i promieniu mniejszym lub równym $2 \cdot r_1$ przeszedł w taki okrąg K'' o środku w punkcie O' , że jest on styczny do prostych równoległych a i b oraz okręgu C . Znalezienie środka i promienia okręgu K'' nie nastęcza już trudności. Promień r' jest oczywiście

równy połowie odległości pomiędzy prostymi a i b . Natomiast środek okręgu K'' znajdujemy w następujący sposób:

Z punktu O_3 zakresłamy promieniem $r + r'$ (gdzie r jest promieniem okręgu c) okrąg. Jeden z punktów przecięcia tego okręgu z prostą równoległą do a i b leżącą w połowie odległości pomiędzy tymi prostymi jest środkiem szukanego okręgu K'' . Jeśli teraz skonstruujemy okrąg inwersyjny do okręgu K'' i powiększymy jego promień o d , to otrzymamy szukany okrąg K .

W ten sposób skonstruowaliśmy okrąg styczny do trzech danych okręgów, jednak na pierwszy rzut oka widać, że takich okręgów będzie więcej. Ile jest rozwiązań zagadnienia Apolloniusza? Od czego zależy ilość tychże rozwiązań? Na te pytania postaram się dać odpowiedź w następnych rozdziałach.

2. Program t-nwtsys, opis

2.1. Wstęp

Ponieważ konstrukcje geometryczne opisane w poprzednim rozdziale są dosyć żmudne, a na potrzeby dalszych rozważań konieczne będzie wykonanie bardzo wielu, napisałem i wykorzystałem w dalszej części pracy program „konstruujący” okręgi Apolloniusza, a dokładnie znajdujący ich parametry (współrzędne środka i promienie) . Wyjaśnię teraz zasadę działania tego programu i kryteria którymi kierowałem się w doborze kluczowych parametrów.

Jak wiadomo wiele zjawisk zachodzących na płaszczyźnie daje się opisać za pomocą narzędzi algebraicznych: wzorów, równań itp. Podobnie jest z zagadnieniem Apolloniusza, istnieje bowiem warunek na styczność poszukiwanego okręgu do trzech danych okręgów.

Założmy, że dane trzy okręgi mają środki: (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) i promienie odpowiednio równe r_1, r_2, r_3 . Oznaczmy współrzędne środka szukanego okręgu przez (x, y) i promień przez r . Wtedy odległość środka szukanego okręgu od środka okręgów danych jest równa sumie lub różnicy promieni (w zależności od tego czy okręgi są styczne zewnętrznie czy wewnętrznie) co daje następujący układ równań:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 = 0 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

2.2. Opis metody iteracyjnej Newtona

Program t-nwtsys opiera się na metodzie Newtona. Jest to metoda iteracyjna określona wzorem

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - [Df(x^{(i)})]^{-1} \cdot f(x^{(i)}), \quad i=0,1,2,\dots \quad (3)$$

lub

$$Df(x^{(i)}) \cdot x^{(i+1)} = Df(x^{(i)}) \cdot x^{(i)} - f(x^{(i)}), \quad i=0,1,2,\dots \quad (4)$$

gdzie

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \end{bmatrix}, \quad Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

i gdzie $x^{(0)}$ jest dany.

W tym konkretnym przypadku mamy do czynienia z trzema niewiadomymi, a więc podstawiamy :

$$x_1 := x, \quad x_2 := y, \quad x_3 := r \quad (5)$$

W każdym kroku iteracyjnym należy rozwiązać układ równań liniowych (3). W procedurze Newtonsystem stosuje się do tego celu metodę eliminacji Gaussa-Jordana z pełnym wyborem elementu podstawowego. Proces iteracji przerywa się gdy dla każdego $k=1, 2, \dots, n$ zachodzi nierówność

$$x_k^{(i)} \neq 0$$

$$\frac{|x_k^{(i+1)} - x_k^{(i)}|}{\max(|x_k^{(i+1)}|, |x_k^{(i)}|)} < \varepsilon \quad \text{gdzie} \quad x_k^{(i+1)} \neq 0 \quad \text{lub} \quad x_k^{(i)} \neq 0 \quad (6)$$

gdzie ε oznacz dokładność zadaną z góry, lub gdy $x_k^{(i+1)} = x_k^{(i)} = 0$

2.3. Wywołanie procedury *Newtonsystem*.

Procedurę Newtonsystem wywołujemy w następujący sposób:

$$\text{Newtonsystem}(n, x, f, df, mit, eps, it, st)$$

Parametry wejściowe:

- n – liczba równań układu równań (w naszym przypadku stale równa 3).
 x – tablica, której elementy $x[i]$, $i=(1, 2, \dots, n)$ zawierają początkowe przybliżenia składowych rozwiązania.
 f – funkcja języka Turbo Pascal, która dla danej wartości i oraz $x_1, x_2, \dots, x_n$ oblicza wartości funkcji $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
 df – procedura języka Turbo Pascal, która dla danej wartości i oraz $x_1, x_2, \dots, x_n$ oblicza wartości pochodnych $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ dla $j=1, 2, \dots, n$.
 mit – maksymalna ilość iteracji.
 eps – błąd względny rozwiązania.

Po wykonaniu procedury zmieniają się wartości w tablicy x (zawiera ona wyniki)

Wyniki:

- x – tablica zawierająca przybliżone rozwiązania układu równań.
 it – liczba wykonanych iteracji
 st – zmienna, której w procedurze *Newtonsystem* jest przypisana jedna z następujących wartości:
- 1 gdy $n < 1$ lub $mit < 1$
 - 2 jeżeli podczas obliczeń (w którejś iteracji) macierz układu równań liniowych jest osobliwa
 - 3 jeśli liczba iteracji jest większa od wartości mit
 - 0 w przeciwnym przypadku.

2.4. Sposób doboru początkowych parametrów iteracji.

Ze względu na przeznaczenie programu *t-nwtsys* w wyniku jego działania musiały znaleźć się wszystkie rozwiązania układu równań (2). Jak wiadomo metoda iteracyjna kończy się w momencie „trafienia” na najbliższe rozwiązanie (otrzymane w wyniku najmniejszej liczby przybliżeń), a więc odpowiednie dobranie parametrów początkowych w dużej mierze decyduje o tym, czy w wyniku działania programu otrzymamy wszystkie rozwiązania. Ponieważ metoda doboru parametrów startowych nie jest sama w sobie przedmiotem naszych rozważań przedstawię ją w sposób schematyczny.

Ponieważ obszar, w którym znajdują się dane okręgi (*obszar danych*) jest ograniczony to obszar, w którym występują rozwiązania danego układu równań (*obszar rozwiązań*) w ogromnej większości przypadków także będzie ograniczony. Podzieliłem więc obszar rozwiązań na trzy części:

- 1 – część płaszczyzny nad prostą $y=x$
- 2 – część płaszczyzny pod prostą $y=x$
- 3 – prosta $y=x$

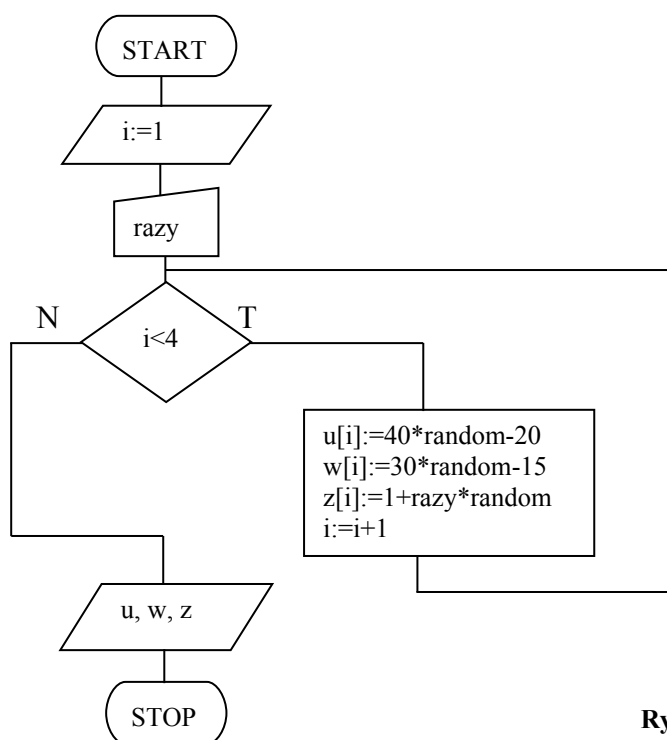
Pierwsza iteracja rozpoczyna się od punktu $P_1(a, -a)$ leżącego w „prawym, dolnym rogu” obszaru rozwiązań, jeżeli odnaleziony wynik leży w części 1 lub 2, to drugą iterację rozpoczynam od punktu $P_2(-a, a)$ leżącego w „lewym górnym rogu” obszaru rozwiązań,

jeżeli wynik leży na prostej $y=x$ współrzędne punktu P_2 zmieniam odejmując od jednej z nich stałą wartość b . Wielkości a i b (*skraja obszaru rozwiązań*) dobrałem doświadczalnie.

2.5. Metody wprowadzania współrzędnych okręgów.

Współrzędne danych okręgów można wprowadzać ręcznie (z klawiatury) lub losowo, w tym przypadku program dobiera je według określonego algorytmu:

T



Rys. 12

W przypadku układów specjalnych, np. takich gdzie dane okręgi są styczne, lub wszystkie trzy dane okręgi mają wspólne styczne zastosowałem metodę ręcznego doboru współrzędnych.

2.6. Wydruki

Oprócz wyświetlania wykresów i tabeli rozwiązań na ekranie program realizuje również funkcję wydruku ekranu do pliku. Podczas rozpoczętej sesji pracy programu po naciśnięciu klawisza „Z” wyświetlany ekran zostaje zapamiętany w pliku o nazwie :

- **apolXXXX.bmp** - wykres
- **tabXXXX.bmp** - tabela rozwiązań

gdzie **XXXX** jest liczbą określającą po raz który w czasie trwania sesji programu funkcja wydruku została użyta.

W ten sposób powstało dosyć sprawne narzędzie, znajdujące rozwiązania zagadnienia Apolloniusza dla wielu różnych konfiguracji danych trzech okręgów.

3. Rozpatrzenie przypadków „szczególnych położeń”.

Podczas testów polegających na losowym dobieraniu współrzędnych i promieni okręgów zauważyć można, że większość rozwiązań jest bardzo do siebie podobna. Dlaczego tak się dzieje? Ponieważ ilość rozwiązań zależy od wzajemnego położenia (względem siebie) okręgów. W niniejszym rozdziale zajmiemy się tym zagadnieniem i spróbujemy uporządkować układy okręgów Apolloniusza według pewnego schematu.

Jako elementy wyróżniające poszczególne położenia przyjmijmy:

0. jedna styczność – w układzie występuje jeden punkt pojedynczej styczności,
1. dwie styczności – dwa punkty pojedynczej styczności,
2. trzy styczności – trzy punkty pojedynczej styczności,
3. potrójna styczność – wszystkie trzy okręgi są styczne w jednym punkcie,
4. punkt potrójny – trzy okręgi przecinają się w jednym punkcie,
5. dwa punkty potrójne – wszystkie okręgi przecinają się w dwóch punktach.

3.1. Położenie ogólne:

- żadne dwa okręgi nie są styczne
- trzy nie mają punktu wspólnego

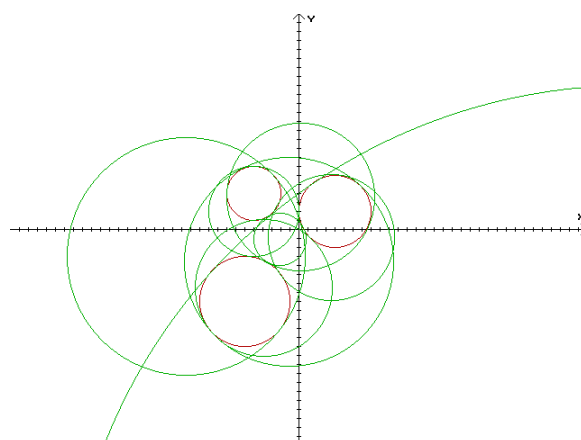
a oto wszystkie warianty spełniające powyższy warunek:

Wariant 1. Trzy okręgi bez przecięć i nie zawierające się wzajemnie
Ilość rozwiązań: 8

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-5.000000	y =	4.000000	r =	3.000000
2)	x =	-6.000000	y =	-8.000000	r =	5.000000
3)	x =	4.000000	y =	2.000000	r =	4.000000

	sts	x	y	r
1)	0	-2.127833	-1.133896	-2.882706
2)	0	-1.075850	-3.632356	-11.582064
3)	0	36.919407	-46.751958	-62.825511
4)	0	0.162706	3.644719	-8.174916
5)	0	-12.502106	-2.954809	-13.229905
6)	0	-5.023860	1.976249	-5.023891
7)	0	-3.852427	-6.536511	-7.598821
8)	0	3.647560	-0.936100	-6.957178
9)	0	-1.075850	-3.632356	11.582064
10)	0	-2.127833	-1.133896	2.882706
11)	0	-5.023860	1.976249	5.023891
12)	0	-3.852427	-6.536511	7.598821
13)	0	3.647560	-0.936100	6.957178
14)	0	36.919407	-46.751958	62.825511
15)	0	0.162706	3.644719	8.174916
16)	0	-12.502106	-2.954809	13.229905



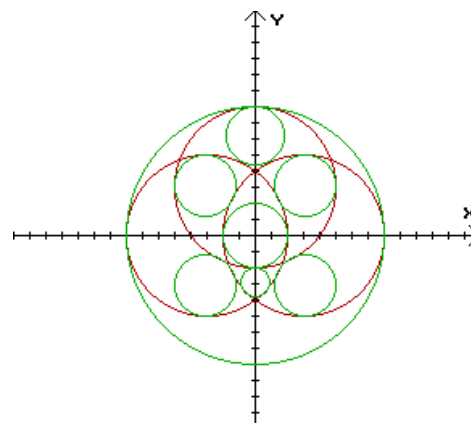
Wariant 2. Dwa okręgi przecinają się, trzeci przecina obydwą przecinając ich część wspólną.

Ilość rozwiązań: 8

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-3.000000	y =	0.000000	r =	5.000000
2)	x =	3.000000	y =	0.000000	r =	5.000000
3)	x =	0.000000	y =	3.000000	r =	5.000000

	sts	x	y	r
1)	0	-0.000000	-0.000000	2.000000
2)	0	-0.000000	-0.000000	-8.000000
3)	0	3.123475	3.123475	-1.874085
4)	0	-3.123475	3.123475	-1.874085
5)	0	0.000000	6.153846	1.846154
6)	0	3.123475	3.123475	1.874085
7)	0	3.123475	-3.123475	-1.874085
8)	0	0.000000	6.153846	-1.846154
9)	0	-0.000000	-0.000000	8.000000
10)	0	-0.000000	-0.000000	-2.000000
11)	0	-3.123475	-3.123475	1.874085
12)	0	3.123475	-3.123475	1.874085
13)	0	-0.000000	-2.857143	-0.857143
14)	0	-3.123475	-3.123475	-1.874085
15)	0	-3.123475	3.123475	1.874085
16)	0	-0.000000	-2.857143	0.857143



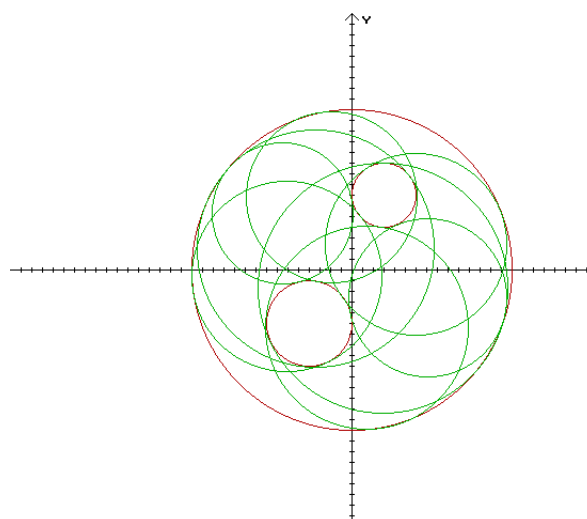
Wariant 3. Jeden z okręgów zawiera dwa pozostałe, które nie przecinają się ani nie zawierają w sobie.

Ilość rozwiązań: 8

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	15.000000
2)	x =	-4.000000	y =	-5.000000	r =	4.000000
3)	x =	3.000000	y =	7.000000	r =	3.000000

	sts	x	y	r
1)	0	2.895796	-1.661018	11.661645
2)	0	2.895796	-1.661018	-11.661645
3)	0	7.146233	-2.550960	7.412112
4)	0	6.040170	2.428923	-8.489752
5)	0	1.441952	-5.355718	-9.453565
6)	0	7.146233	-2.550960	-7.412112
7)	0	6.040170	2.428923	8.489752
8)	0	1.441952	-5.355718	9.453565
9)	0	-3.362232	2.038984	11.067817
10)	0	-3.362232	2.038984	-11.067817
11)	0	-6.471560	5.326598	6.618250
12)	0	-1.946625	6.774071	-7.951782
13)	0	-6.103198	-0.611762	-8.866218
14)	0	-6.471560	5.326598	-6.618250
15)	0	-1.946625	6.774071	7.951782
16)	0	-6.103198	-0.611762	8.866218



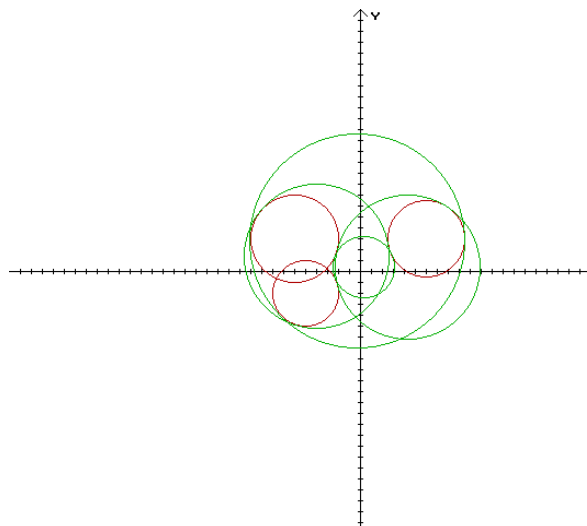
Wariant 4. Dwa okręgi przecinają się, żaden z okręgów nie zawiera innego

Ilość rozwiązań: 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-5.000000	y =	-2.000000	r =	3.000000
2)	x =	-6.000000	y =	3.000000	r =	4.000000
3)	x =	6.000000	y =	3.000000	r =	3.500000

	sts	x	y	r
1)	0	0.272563	0.396208	-2.791523
2)	0	-0.250138	2.800636	-9.753317
3)	3	-0.906966	36.442653	-25.517176
4)	3	-3.758441	8.917220	6.263506
5)	0	-3.956401	1.424768	-6.580242
6)	3	0.403306	-7.320437	-5.929356
7)	3	-18.845897	39.695629	-30.403435
8)	0	4.274724	0.437033	6.589559
9)	0	-0.250138	2.800636	9.753317
10)	0	0.272563	0.396208	2.791523
11)	3	-0.914156	6.22203	-4.089739
12)	3	-1.592567	4.498836	2.798107
13)	0	4.274724	0.437033	6.589559
14)	3	-1.732890	64.028521	45.339357
15)	3	0.390309	0.453769	0.374495
16)	0	-3.956401	1.424768	6.580242



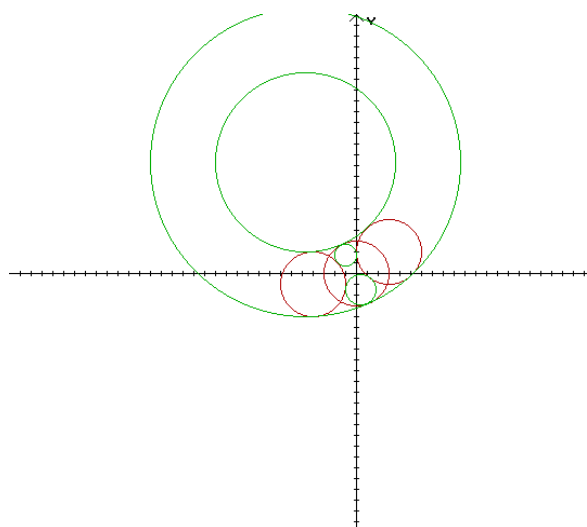
Wariant 5. Jeden z okręgów przecina dwa pozostałe

Ilość rozwiązań: 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-4.000000	y =	-1.000000	r =	3.000000
2)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	3.000000
3)	x =	3.000000	y =	2.000000	r =	3.000000

	sts	x	y	r
1)	0	-4.700000	10.300000	-8.321661
2)	0	-4.700000	10.300000	-14.321661
3)	3	0.594173	2.358741	-2.205905
4)	0	-1.012767	1.696456	1.024231
5)	3	-2.701090	2.304359	-1.665759
6)	3	1.561732	0.907403	2.609055
7)	0	-1.012767	1.696456	-1.024231
8)	3	-2.011380	-0.453680	2.240350
9)	0	-4.700000	10.300000	14.321661
10)	0	-4.700000	10.300000	8.321661
11)	3	2.502784	-0.504175	-3.001160
12)	0	0.376315	-1.544736	1.410088
13)	3	-6.150839	16.103357	1.209033
14)	3	1.037355	1.693967	2.390565
15)	0	0.376315	-1.544736	-1.410088
16)	3	1.515035	-14.560139	5.179196



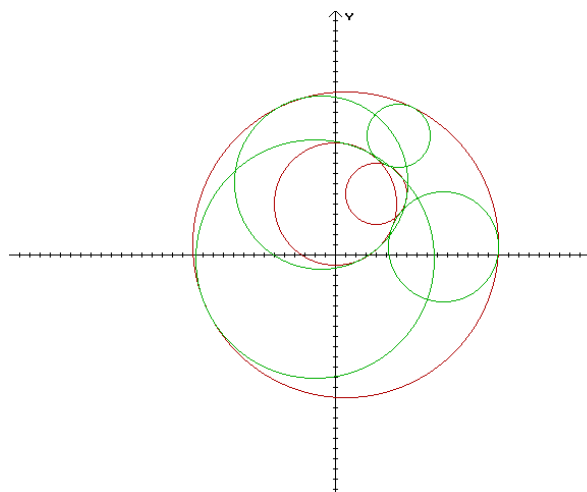
Wariant 6. Jeden z okręgów zawiera dwa pozostałe przecinające się okręgi.

Ilość rozwiązań: 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	1.000000	y =	1.000000	r =	15.000000
2)	x =	4.000000	y =	6.000000	r =	3.000000
3)	x =	0.000000	y =	5.000000	r =	6.000000

sts	x	y	r
1)	0	-1.379551	7.065840
2)	0	-1.379551	7.065840
3)	0	6.152315	11.717044
4)	3	-6.202015	15.996642
5)	3	13.347120	9.122211
6)	0	6.152315	11.717044
7)	3	-6.168531	16.052448
8)	3	26.787402	-8.562372
9)	0	-1.953245	-0.392190
10)	0	-1.953245	-0.392190
11)	0	10.598669	0.803266
12)	3	-14.229784	2.617027
13)	3	3.710002	21.802629
14)	0	10.598669	0.803266
15)	3	-28.822318	-21.703863
16)	3	11.663403	11.337627



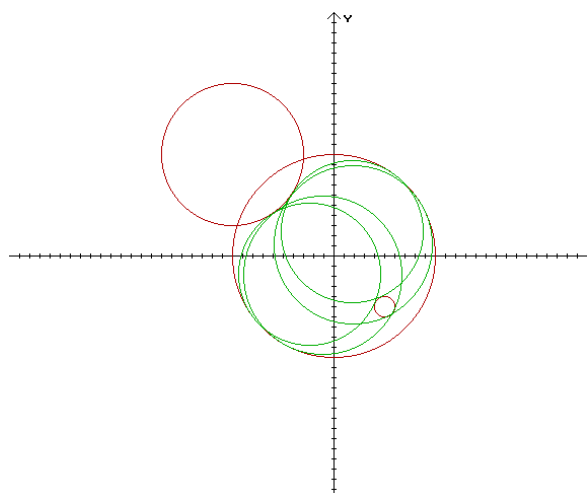
Wariant 7. Dwa okręgi przecinają się, jeden z nich zawiera trzeci okrąg.

Ilość rozwiązań: 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
2)	x =	-10.000000	y =	10.000000	r =	7.000000
3)	x =	5.000000	y =	-5.000000	r =	1.000000

sts	x	y	r
1)	3	-9.156421	-0.527850
2)	3	-5.213772	3.414799
3)	0	1.781315	2.365930
4)	0	1.865680	1.082823
5)	3	-3.477657	5.778343
6)	0	-1.781315	2.365930
7)	0	1.865680	1.082823
8)	3	-3.589743	5.666257
9)	3	-5.418432	3.210140
10)	3	-5.689072	2.939499
11)	0	-2.365930	-1.781315
12)	0	-1.082823	-1.865680
13)	3	-6.456680	2.797320
14)	0	-2.365930	-1.781315
15)	0	-1.082823	-1.865680
16)	3	-4.412032	4.843968



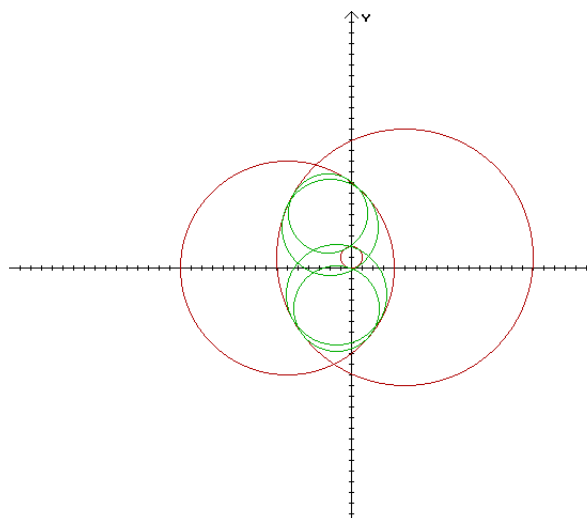
Wariant 8. Dwa okręgi przecinają się i zawierają w części wspólnej trzeci okrąg

Ilość rozwiązań: 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-6.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
2)	x =	5.000000	y =	1.000000	r =	12.000000
3)	x =	0.000000	y =	1.000000	r =	1.000000

sts	x	y	r
1)	0	-1.991865	3.826999
2)	0	-1.991865	3.826999
3)	3	0.034583	90.965417
4)	3	22.020768	16.947280
5)	0	-2.249964	5.095783
6)	3	26.626674	64.372326
7)	3	28.111683	1.485728
8)	0	-2.249964	5.095783
9)	0	-1.366434	-2.484162
10)	0	-1.366434	-2.484162
11)	3	-90.095928	181.095928
12)	3	46.926138	-46.274043
13)	0	-1.379039	-3.814451
14)	3	-54.552869	145.552869
15)	3	21.453104	18.388275
16)	0	-1.379039	-3.814451



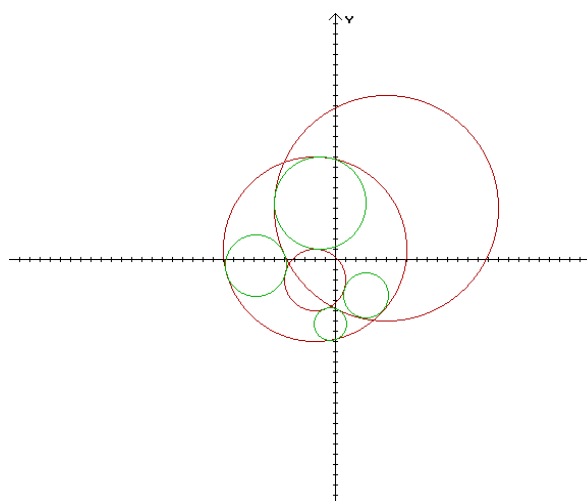
Wariant 9. Dwa okręgi przecinają się, trzeci zawiera się w jednym z nich i przecina z drugim.

Ilość rozwiązań: 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	5.000000	y =	5.000000	r =	11.000000
2)	x =	-2.000000	y =	1.000000	r =	9.000000
3)	x =	-2.000000	y =	-2.000000	r =	3.000000

	sts	x	y	r
1)	3	-0.288235	5.672781	9.086390
2)	3	-2.358486	10.503134	-11.501567
3)	3	29.796413	-23.648207	5.574103
4)	0	-0.482215	-6.291610	1.552097
5)	0	-1.488342	5.476684	-4.494171
6)	3	-2.506663	-7.496668	2.501666
7)	0	-0.482215	-6.291610	-1.552097
8)	0	-1.488342	5.476684	4.494171
9)	3	6.045233	-9.105660	1.697170
10)	3	1.948892	0.452585	-6.476292
11)	3	-8.008924	-4.745538	-3.877231
12)	0	-7.808774	-0.593175	2.976706
13)	0	3.014658	-3.529316	-2.242671
14)	3	-67.084962	24.792481	18.646241
15)	0	-7.808774	-0.593175	-2.976706
16)	0	3.014658	-3.529316	2.242671



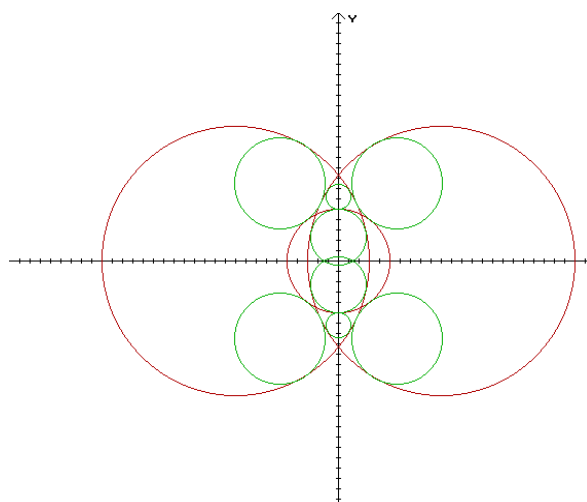
Wariant 10. Dwa okręgi przecinają się, trzeci zawiera się w nich i przecina oba.

Ilość rozwiązań 8

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	5.000000
2)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	13.000000
3)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	13.000000

	sts	x	y	r
1)	0	0.000000	2.250000	2.750000
2)	0	0.000000	2.250000	-2.750000
3)	0	0.000000	6.222222	-1.222222
4)	0	-5.720000	7.459330	4.400000
5)	0	5.720000	7.459330	4.400000
6)	0	-0.000000	6.222222	1.222222
7)	0	-5.720000	7.459330	-4.400000
8)	0	5.720000	7.459330	-4.400000
9)	0	0.000000	-2.250000	2.750000
10)	0	-0.000000	-2.250000	-2.750000
11)	0	-0.000000	-6.222222	-1.222222
12)	0	-5.720000	-7.459330	4.400000
13)	0	5.720000	-7.459330	4.400000
14)	0	-0.000000	-6.222222	1.222222
15)	0	-5.720000	-7.459330	-4.400000
16)	0	5.720000	-7.459330	-4.400000



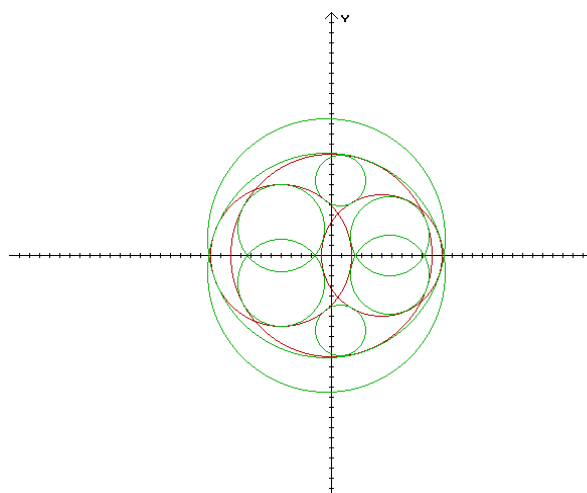
Wariant 11. Dwa okręgi przecinają się, trzeci przecina obydwie nie przecinając ich części wspólnej i zawierając ją.

Ilość rozwiązań: 8

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
2)	x =	5.000000	y =	0.000000	r =	6.000000
3)	x =	-5.000000	y =	0.000000	r =	7.000000

	sts	x	y	r
1)	0	-0.528571	1.705693	11.785714
2)	0	-0.528571	1.705693	-11.785714
3)	0	0.900000	7.445804	2.500000
4)	0	-4.994737	2.657890	-4.342105
5)	0	5.757143	1.928095	-3.928571
6)	0	0.900000	7.445804	-2.500000
7)	0	-4.994737	2.657890	4.342105
8)	0	5.757143	1.928095	3.928571
9)	0	-0.528571	-1.705693	11.785714
10)	0	-0.528571	-1.705693	-11.785714
11)	0	0.900000	-7.445804	2.500000
12)	0	-4.994737	-2.657890	-4.342105
13)	0	5.757143	-1.928095	-3.928571
14)	0	0.900000	-7.445804	-2.500000
15)	0	-4.994737	-2.657890	4.342105
16)	0	5.757143	-1.928095	3.928571

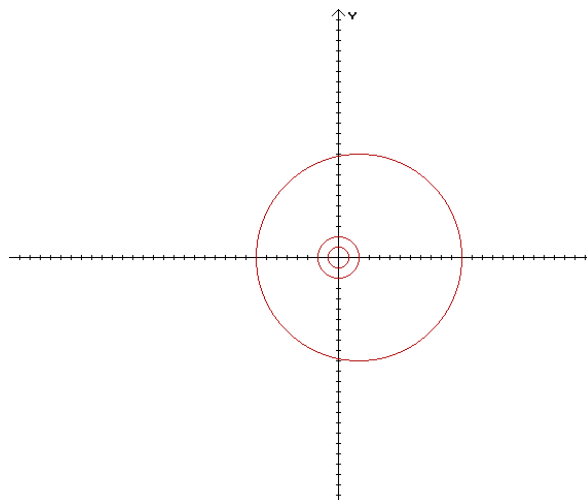


Wariant 12. Okręgi zawierają się „koncentrycznie”
Ilość rozwiązań: **0**

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	1.000000
2)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	2.000000
3)	x =	2.000000	y =	0.000000	r =	10.000000

	sts	x	y	r
1)	3	-17.000000	16.385582	1.500000
2)	3	-17.000000	-250.400979	-1.500000
3)	3	-21.000000	70.150829	-0.500000
4)	3	-26.000000	-29.277448	0.500000
5)	3	-32.000000	-0.911801	-1.500000
6)	3	-21.000000	32.227363	0.500000
7)	3	-26.000000	-83.114792	-0.500000
8)	3	-32.000000	-135.648205	1.500000
9)	3	-17.000000	2.461687	1.500000
10)	3	-17.000000	-20.030969	-1.500000
11)	3	-21.000000	6.280951	-0.500000
12)	3	-26.000000	-3.057797	0.500000
13)	3	-32.000000	-3.152934	-1.500000
14)	3	-21.000000	30.394847	0.500000
15)	3	-26.000000	6.498192	-0.500000
16)	3	-32.000000	-57.270015	1.500000

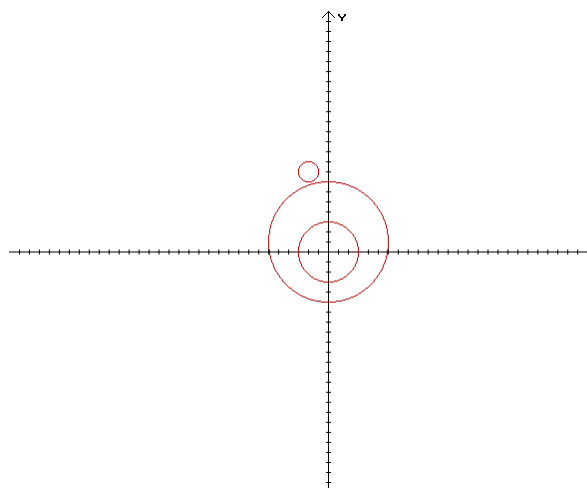


Wariant 13. Jeden okrąg zawiera drugi, trzeci leży na zewnątrz.
Ilość rozwiązań: **0**

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	3.000000
2)	x =	0.000000	y =	1.000000	r =	6.000000
3)	x =	-2.000000	y =	8.000000	r =	1.000000

	sts	x	y	r
1)	3	-3.826190	2.501649	5.167216
2)	3	-34.397944	-4.553372	-2.815543
3)	3	-0.234658	5.732002	-2.081334
4)	3	-3.879465	4.259566	1.917730
5)	3	-1.032495	1.993037	-4.997679
6)	3	-35.203457	-3.524444	1.052840
7)	3	-1.942522	4.757637	-1.973071
8)	3	-0.805933	2.041586	5.013862
9)	3	317.219522	76.589120	29.863040
10)	3	0.241367	-3.440315	-5.480105
11)	3	0.678584	5.973743	-2.108194
12)	3	2.306276	5.850185	2.094465
13)	3	6.890470	3.690815	-5.563605
14)	3	-0.261288	5.724953	2.080550
15)	3	-0.273229	5.186884	-2.020765
16)	3	0.237037	2.265079	5.088360

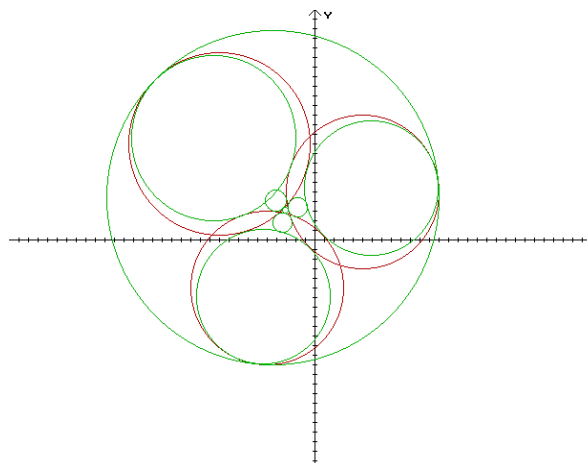


Wariant 14. Dwa okręgi przecinają się, trzeci przecina dwa pozostałe nie zawierając ich części wspólnej.
Ilość rozwiązań: **8**

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	5.000000	y =	5.000000	r =	8.000000
2)	x =	-5.000000	y =	-5.000000	r =	8.000000
3)	x =	-10.000000	y =	10.000000	r =	9.500000

	sts	x	y	r
1)	0	-3.071356	3.071356	-0.298582
2)	0	-4.400199	4.400199	-17.419315
3)	0	5.881529	5.381566	7.039434
4)	0	-3.418434	1.819991	0.999027
5)	0	-4.077373	4.077373	1.124141
6)	0	5.881529	5.381566	-7.039434
7)	0	-3.418434	1.819991	-0.999027
8)	0	-10.628509	10.628509	-8.611154
9)	0	-4.400199	4.400199	17.419315
10)	0	-3.071356	3.071356	0.298582
11)	0	-1.819991	3.418434	0.999027
12)	0	-5.381566	-5.881529	7.039434
13)	0	-10.628509	10.628509	8.611154
14)	0	-1.819991	3.418434	-0.999027
15)	0	-5.381566	-5.881529	-7.039434
16)	0	-4.077373	4.077373	-1.124141



3.2. Położenie szczególne I-go stopnia:

- jedna styczna
- bez punktów potrójnych
- bez potrójnych stycznych

a oto wszystkie warianty spełniające powyższy warunek

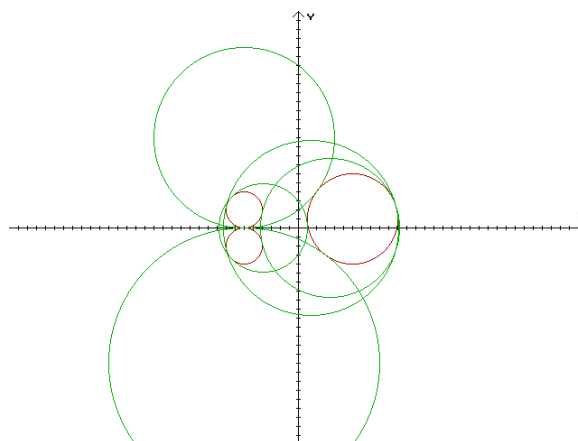
Wariant 1. Dwa okręgi styczne zewnętrznie trzeci jest położony na zewnątrz.

Ilość rozwiązań 6

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-6.000000	y =	-2.000000	r =	2.000000
2)	x =	-6.000000	y =	2.000000	r =	2.000000
3)	x =	6.000000	y =	1.000000	r =	5.000000

sts	x	y	r
1)	0	-1.688254	-0.000000
2)	3	1.421587	-0.000000
3)	0	-5.999996	-14.999986
4)	0	-5.999996	9.999993
5)	0	-3.870736	-0.000000
6)	0	-5.999996	-14.999989
7)	0	-6.000005	10.000010
8)	0	3.491788	-0.000000
9)	0	1.421587	-0.000000
10)	3	-1.688254	-0.000000
11)	0	-6.000004	-15.000012
12)	0	-6.000004	10.000007
13)	0	3.491788	-0.000000
14)	0	0.000004	-15.000011
15)	0	-5.999997	9.999995
16)	0	-3.870736	-0.000000



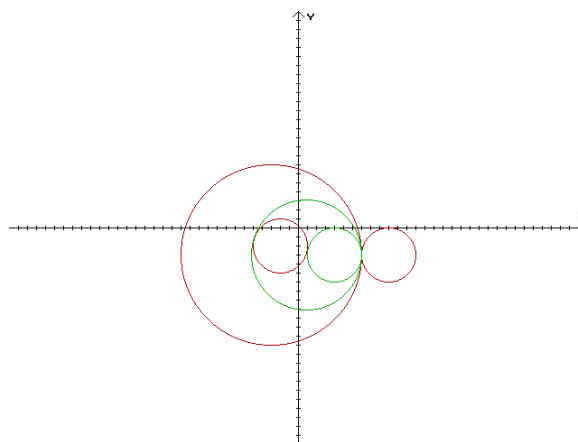
Wariant 2. Dwa okręgi styczne zewnętrznie, trzeci zawiera się w jednym z nich.

Ilość rozwiązań 2

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-2.000000	y =	-2.000000	r =	3.000000
2)	x =	-3.000000	y =	-3.000000	r =	10.000000
3)	x =	10.000000	y =	-3.000000	r =	3.000000

sts	x	y	r
1)	3	2.848689	-16.315737
2)	3	3.046067	-13.947193
3)	3	5.945840	9.103737
4)	0	3.958333	-2.999998
5)	0	0.916667	-2.999998
6)	3	5.720690	3.893109
7)	0	3.958333	-2.999998
8)	0	0.916667	-2.999997
9)	3	5.075341	10.404094
10)	3	5.094146	10.629756
11)	3	5.845730	6.786897
12)	0	3.958333	-3.000002
13)	0	0.916666	-3.000002
14)	3	5.646799	2.203890
15)	0	3.958333	-3.000002
16)	0	0.916666	-3.000003



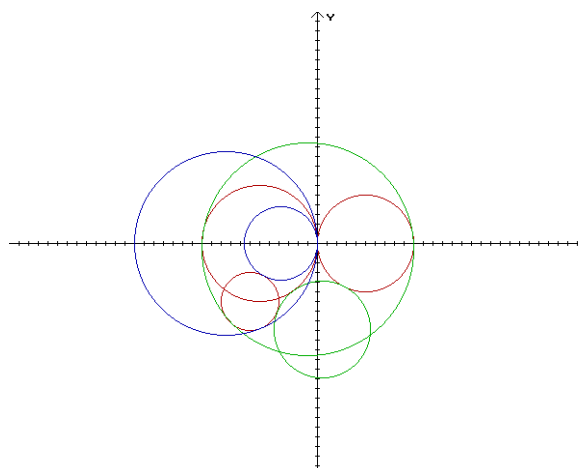
Wariant 3. Dwa okręgi styczne zewnętrznie, trzeci przecina się z jednym z nich.

Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	5.000000	y =	0.000000	r =	5.000000
2)	x =	-6.000000	y =	0.000000	r =	6.000000
3)	x =	-7.000000	y =	-6.000000	r =	3.000000

sts	x	y	r
1)	0	0.454803	-8.910553
2)	0	-1.003476	-0.646969
3)	2	-9.500000	0.000000
4)	2	-3.800000	0.000000
5)	3	-0.546054	2.767573
6)	2	-9.500000	0.000000
7)	2	-3.800000	0.000000
8)	3	-0.020508	-5.991535
9)	0	-1.003476	-0.646969
10)	0	0.454803	-8.910553
11)	2	-9.500000	-0.000000
12)	2	-3.800000	0.000000
13)	3	1.764460	-35.741007
14)	2	-9.500000	0.000000
15)	2	-3.800000	0.000000
16)	3	-0.912416	8.873598



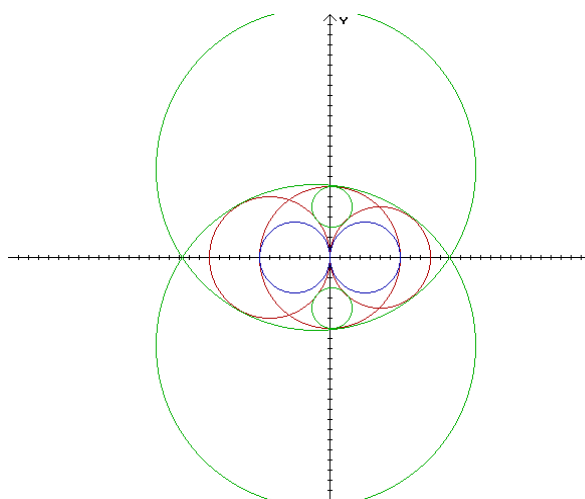
Wariant 4. Dwa okręgi styczne zewnętrznie, trzeci przecina się z obydwoima zawierając punkt styczności.

Ilość rozwiązań 6

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	5.000000	y =	0.000000	r =	5.000000
2)	x =	-6.000000	y =	0.000000	r =	6.000000
3)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	7.000000

	sts	x	y	r
1)	0	-1.441176	8.734848	15.852941
2)	0	-1.441176	8.734848	-15.852941
3)	2	-3.500000	0.000000	-3.500000
4)	2	3.500000	-0.000000	-3.500000
5)	0	0.178832	5.029668	1.967153
6)	2	-3.500000	0.000000	3.500000
7)	2	3.500000	0.000000	3.500000
8)	0	0.178832	5.029668	-1.967153
9)	0	-1.441176	-8.734848	15.852941
10)	0	-1.441176	-8.734848	-15.852941
11)	3	-3.500000	-0.000000	-3.500000
12)	2	3.500000	0.000000	-3.500000
13)	0	0.178832	-5.029668	1.967153
14)	2	-3.500000	0.000000	3.500000
15)	2	3.500000	0.000000	3.500000
16)	0	0.178832	-5.029668	-1.967153



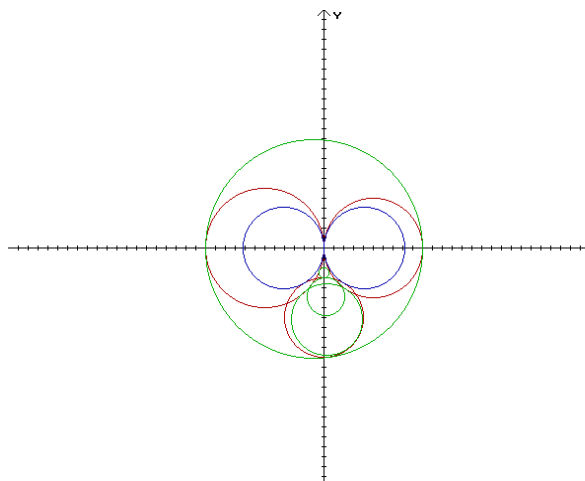
Wariant 5. Dwa okręgi styczne zewnętrznie, trzeci przecina się z obydwoima nie zawierając punktu styczności.

Ilość rozwiązań 6

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	5.000000	y =	0.000000	r =	5.000000
2)	x =	-6.000000	y =	0.000000	r =	6.000000
3)	x =	0.000000	y =	-7.000000	r =	4.000000

	sts	x	y	r
1)	0	0.048407	-2.467786	-0.532472
2)	0	-1.000042	-0.071332	-11.000466
3)	2	4.125000	0.000000	4.125000
4)	2	-4.125000	0.000000	4.125000
5)	0	0.168380	-4.858795	1.852185
6)	2	4.125000	0.000000	-4.125000
7)	2	-4.125000	0.000000	-4.125000
8)	0	0.168380	-4.858795	-1.852185
9)	0	-1.000042	-0.071332	11.000466
10)	0	0.048407	-2.467786	0.532472
11)	2	4.125000	0.000000	4.125000
12)	2	-4.125000	0.000000	4.125000
13)	0	0.327568	-7.223863	3.603244
14)	2	4.125000	0.000000	-4.125000
15)	2	-4.125000	0.000000	-4.125000
16)	0	0.327568	-7.223863	-3.603244



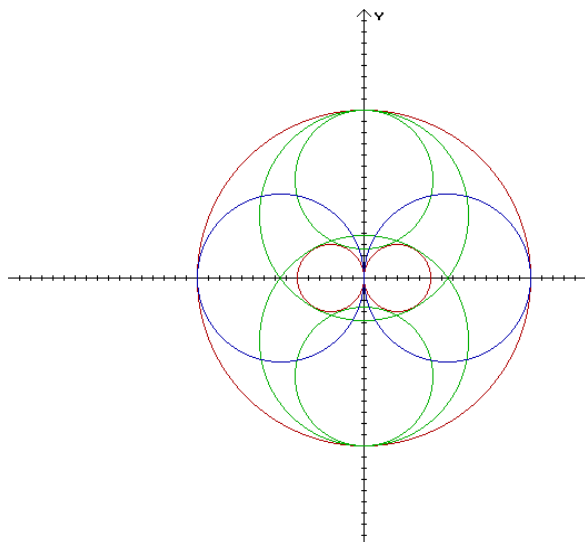
Wariant 6. Dwa okręgi styczne zewnętrznie zawierają się w trzecim okręgu.

Ilość rozwiązań 6

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	15.000000
2)	x =	3.000000	y =	0.000000	r =	3.000000
3)	x =	-3.000000	y =	0.000000	r =	3.000000

	sts	x	y	r
1)	0	0.000000	5.625000	9.375000
2)	0	0.000000	5.625000	-9.375000
3)	0	0.000000	8.750000	6.250000
4)	2	-7.500000	0.000000	-7.500000
5)	2	7.500000	-0.000000	-7.500000
6)	0	0.000000	8.750000	-6.250000
7)	2	-7.500000	0.000000	7.500000
8)	2	7.500000	0.000000	7.500000
9)	0	0.000000	-5.625000	9.375000
10)	0	0.000000	-5.625000	-9.375000
11)	0	0.000000	-8.750000	6.250000
12)	2	-7.500000	-0.000000	-7.500000
13)	2	7.500000	0.000000	-7.500000
14)	0	0.000000	-8.750000	-6.250000
15)	2	-7.500000	0.000000	7.500000
16)	2	7.500000	-0.000000	7.500000



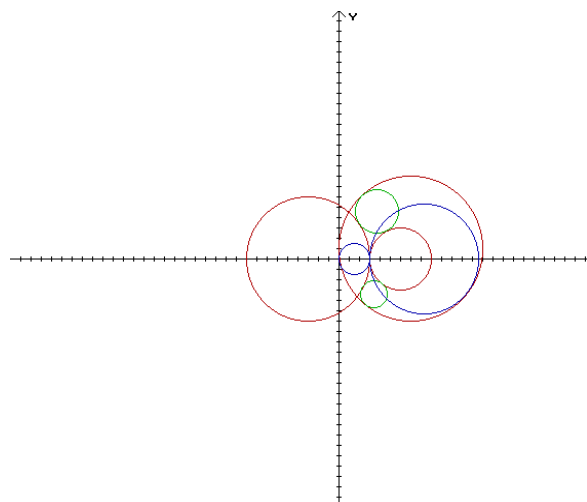
Wariant 7. Dwa okręgi styczne zewnętrznie, jeden z nich zawiera się w trzecim okręgu.

Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-3.000000	y =	0.000000	r =	6.000000
2)	x =	6.000000	y =	0.000000	r =	3.000000
3)	x =	7.000000	y =	1.000000	r =	7.000000

	sts	x	y	r
1)	3	2.173158	-5.251057	2.480525
2)	3	1.878916	-1.425909	-3.363252
3)	2	8.333333	0.000000	-5.333333
4)	2	1.545455	0.000000	-1.454545
5)	0	3.710020	4.590590	2.130061
6)	2	8.333333	0.000000	5.333333
7)	2	1.545455	0.000000	1.454545
8)	0	3.710020	4.590590	-2.130061
9)	3	1.399331	4.808693	4.802006
10)	3	1.337811	5.608462	-4.986568
11)	2	8.333333	0.000000	-5.333333
12)	2	1.545455	0.000000	-1.454545
13)	0	3.432837	-3.447733	1.298510
14)	2	8.333333	0.000000	5.333333
15)	2	1.545455	0.000000	1.454545
16)	0	3.432837	-3.447733	-1.298510



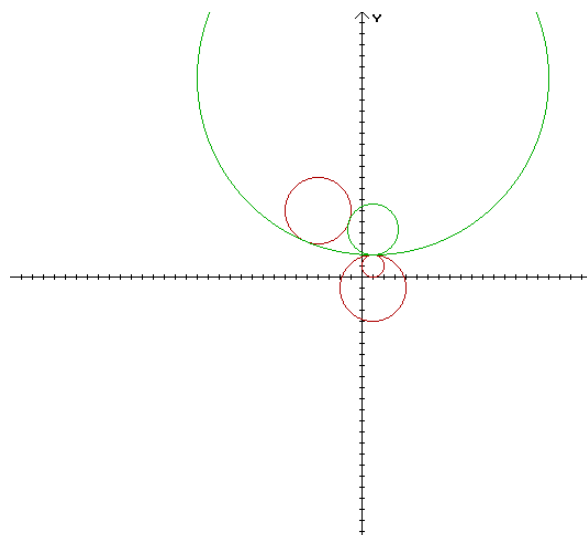
Wariant 8. Dwa okręgi styczne wewnętrznie, trzeci leży na zewnątrz.

Ilość rozwiązań 2

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	1.000000	y =	1.000000	r =	1.000000
2)	x =	1.000000	y =	-1.000000	r =	3.000000
3)	x =	-4.000000	y =	6.000000	r =	3.000000

	sts	x	y	r
1)	0	1.000001	4.285715	-2.285715
2)	0	1.000001	4.285715	2.285715
3)	3	5.550573	7.536124	2.768062
4)	3	0.993600	5.992000	-1.996000
5)	0	1.000001	18.000005	16.000005
6)	3	9.908320	9.934514	-3.967257
7)	3	-5.126929	-1.658661	-1.829330
8)	0	1.000001	18.000003	-16.000003
9)	0	0.999999	4.285714	-2.285714
10)	0	0.999999	4.285714	2.285714
11)	3	0.941520	4.243943	1.121971
12)	3	1.762613	6.953267	-2.476633
13)	0	0.999999	17.999995	15.999995
14)	3	-7.780789	-1.986278	1.993139
15)	3	4.192173	9.990216	3.995108
16)	0	0.999999	17.999996	-15.999996



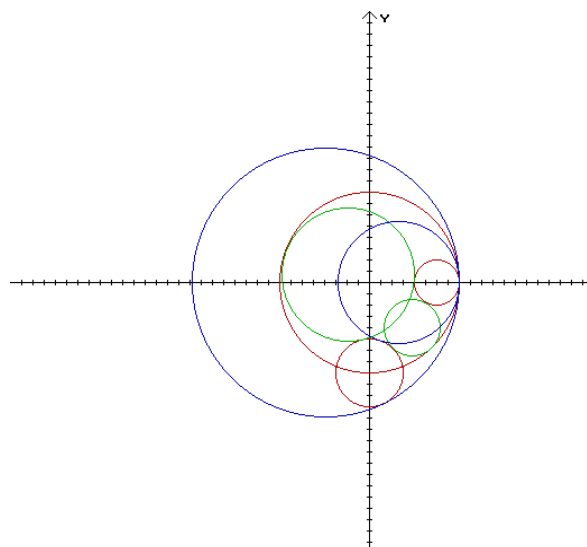
Wariant 9. Dwa okręgi styczne wewnętrznie, trzeci przecina się z zewnętrznym.

Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	8.000000
2)	x =	6.000000	y =	0.000000	r =	2.000000
3)	x =	0.000000	y =	-8.000000	r =	3.000000

	sts	x	y	r
1)	2	-3.900000	0.000000	11.900000
2)	2	-3.900000	-0.000000	-11.900000
3)	0	3.774772	-3.951687	2.535137
4)	3	12.063499	-8.961312	2.438099
5)	2	2.590909	-0.000000	-5.409091
6)	0	-1.913437	0.741086	-5.948062
7)	3	-2.404524	-3.535804	6.242714
8)	2	2.590909	0.000000	5.409091
9)	2	-3.900000	0.000000	11.900000
10)	2	-3.900000	-0.000000	-11.900000
11)	0	-1.913437	0.741086	5.948062
12)	3	1.492058	-4.997022	-3.904765
13)	2	2.590909	-0.000000	-5.409091
14)	0	3.774772	-3.951687	-2.535137
15)	3	2.366633	-5.324987	3.380020
16)	2	2.590909	0.000000	5.409091

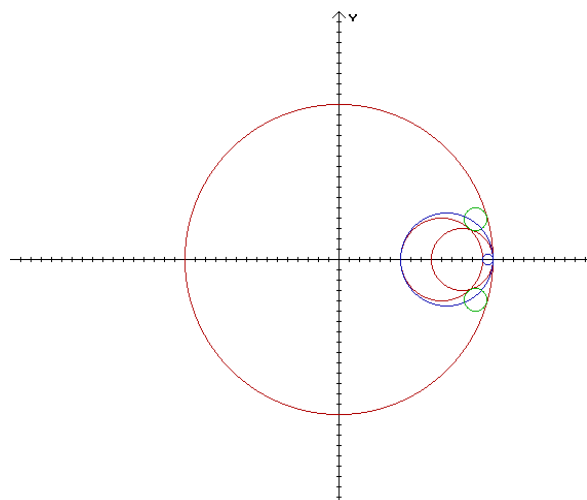


Wariant 10. Dwa okręgi styczne wewnętrznie, trzeci przecina się z wewnętrznym
Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1) $x = 0.000000$ $y = 0.000000$ $r = 15.000000$
2) $x = 12.000000$ $y = 0.000000$ $r = 3.000000$
3) $x = 10.000000$ $y = 0.000000$ $r = 4.000000$

	sts	x	y	r
1)	2	10.500000	0.000000	4.500000
2)	2	10.500000	0.000000	-4.500000
3)	0	13.312500	3.910623	1.125000
4)	3	16.687500	-1.931345	1.125000
5)	2	14.500000	0.000000	-0.500000
6)	0	13.312500	3.910623	-1.125000
7)	3	16.687500	-4.177300	-1.125000
8)	2	14.500000	0.000000	0.500000
9)	2	10.500000	0.000000	4.500000
10)	2	10.500000	0.000000	-4.500000
11)	0	13.312500	-3.910623	1.125000
12)	3	16.687500	-2.444718	1.125000
13)	2	14.500000	0.000000	-0.500000
14)	0	13.312500	3.910623	-1.125000
15)	3	16.687500	0.906720	-1.125000
16)	2	14.500000	0.000000	0.500000

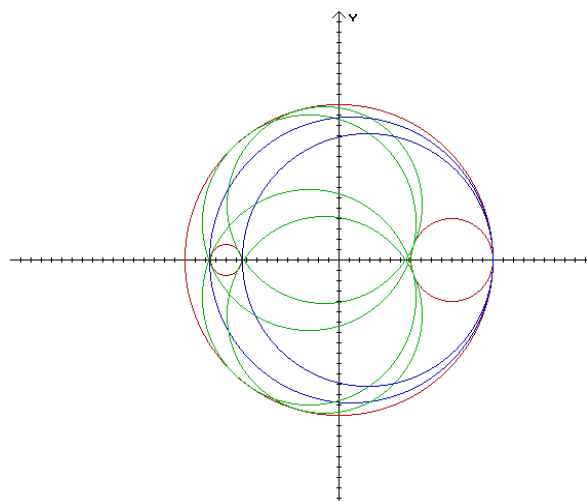


Wariant 11. Dwa okręgi styczne wewnętrznie, trzeci zawiera się w zewnętrznym.
Ilość rozwiązań 6

Tabela rozwiązań układu równań :

1) $x = 0.000000$ $y = 0.000000$ $r = 15.000000$
2) $x = 11.000000$ $y = 0.000000$ $r = 4.000000$
3) $x = -11.000000$ $y = 0.000000$ $r = 1.500000$

	sts	x	y	r
1)	2	1.250000	0.000000	13.750000
2)	2	1.250000	0.000000	-13.750000
3)	0	-1.390845	5.332153	9.489437
4)	0	-2.903846	3.612110	-10.365385
5)	2	2.750000	0.000000	-12.250000
6)	0	-1.390845	5.332153	-9.489437
7)	0	-2.903846	3.612110	10.365385
8)	3	2.750000	0.000000	12.250000
9)	2	1.250000	0.000000	13.750000
10)	2	1.250000	0.000000	-13.750000
11)	0	-1.390845	-5.332153	9.489437
12)	0	-2.903846	-3.612110	-10.365385
13)	2	2.750000	-0.000000	-12.250000
14)	0	-1.390845	-5.332153	-9.489437
15)	0	-2.903846	-3.612110	10.365385
16)	2	2.750000	0.000000	12.250000

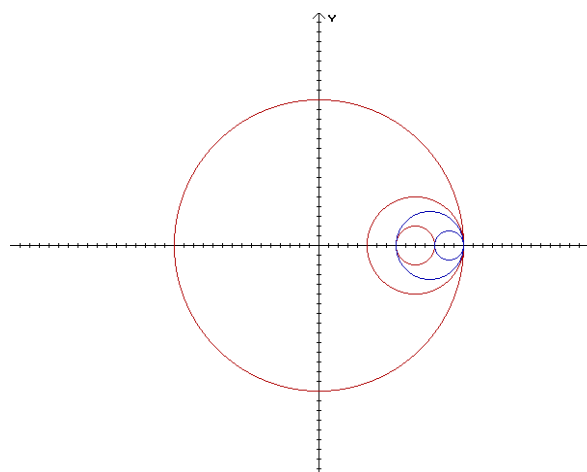


Wariant 12. Dwa okręgi styczne wewnętrznie, trzeci zawiera się w wewnętrznym.
Ilość rozwiązań 2

Tabela rozwiązań układu równań :

1) $x = 0.000000$ $y = 0.000000$ $r = 15.000000$
2) $x = 10.000000$ $y = 0.000000$ $r = 5.000000$
3) $x = 10.000000$ $y = 0.000000$ $r = 2.000000$

	sts	x	y	r
1)	2	11.500000	0.000000	3.500000
2)	3	11.500000	-0.000000	-3.500000
3)	3	22.000000	2.946877	-3.500000
4)	3	18.000000	2.252237	1.500000
5)	3	13.500000	-0.000000	-1.500000
6)	3	22.000000	-8.149318	3.500000
7)	3	18.000000	13.966602	-1.500000
8)	2	13.500000	0.000000	1.500000
9)	2	11.500000	0.000000	3.500000
10)	3	11.500000	-0.000000	-3.500000
11)	3	22.000000	72.844556	-3.500000
12)	3	18.000000	2.771841	1.500000
13)	2	13.500000	-0.000000	-1.500000
14)	3	22.000000	-14.332239	3.500000
15)	3	18.000000	26.638551	-1.500000
16)	2	13.500000	0.000000	1.500000

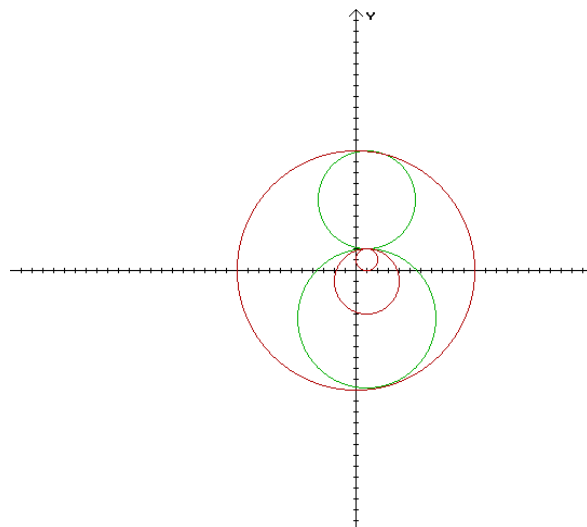


Wariant 13. Dwa okręgi styczne wewnętrznie zawierają się w trzecim okręgu.
Ilość rozwiązań 2

Tabela rozwiązań układu równań :

1) $x = 0.000000$ $y = 0.000000$ $r = 11.000000$
 2) $x = 1.000000$ $y = 1.000000$ $r = 1.000000$
 3) $x = 1.000000$ $y = -1.000000$ $r = 3.000000$

	sts	x	y	r
1)	0	1.000001	-4.444444	6.444444
2)	0	1.000001	-4.444444	-6.444444
3)	0	1.000001	6.461538	4.461538
4)	3	18.799080	-6.040184	-4.020092
5)	3	-7.396599	13.066100	-5.533050
6)	0	1.000001	6.461538	-4.461538
7)	3	6.271662	-8.545668	5.272834
8)	3	14.849258	9.358457	3.679229
9)	0	0.999999	-4.444445	6.444445
10)	0	0.999999	-4.444445	-6.444445
11)	0	0.999999	6.461539	4.461539
12)	3	20.158309	-5.768338	-3.884169
13)	3	14.462113	9.422981	-3.711491
14)	0	0.999999	6.461539	-4.461539
15)	3	101.947222	10.589444	-4.294722
16)	3	-3.091747	12.348624	5.174312



3.3. Położenie szczególne II-go stopnia:

- dwie styczności
- bez punktów potrójnych
- bez potrójnych styczności

a oto wszystkie warianty spełniające powyższy warunek

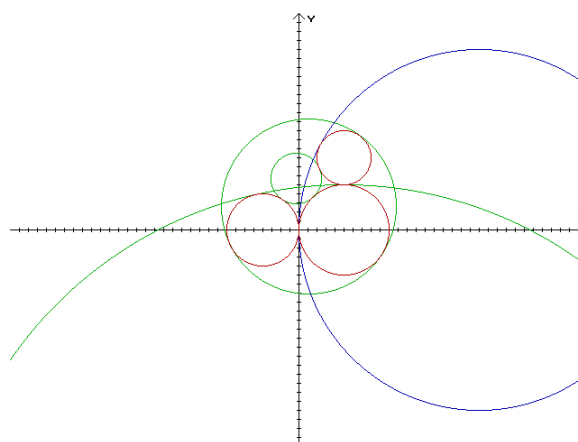
Wariant 1. Wszystkie trzy okręgi są styczne zewnętrznie

Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-4.000000	y =	0.000000	r =	4.000000
2)	x =	5.000000	y =	0.000000	r =	5.000000
3)	x =	5.000000	y =	8.000000	r =	3.000000

sts	x	y	r
1)	0	-0.309745	5.696926
2)	0	1.077051	2.576635
3)	2	20.000000	0.000000
4)	2	5.000000	0.000000
5)	0	5.000004	-40.000032
6)	2	20.000000	0.000000
7)	2	5.000000	-0.000000
8)	0	4.999996	-39.999963
9)	0	1.077051	2.576635
10)	0	-0.309745	5.696926
11)	3	20.000000	0.000000
12)	2	5.000000	0.000000
13)	0	4.999996	-39.999964
14)	2	20.000000	0.000000
15)	2	5.000000	0.000000
16)	0	5.000003	-40.000026



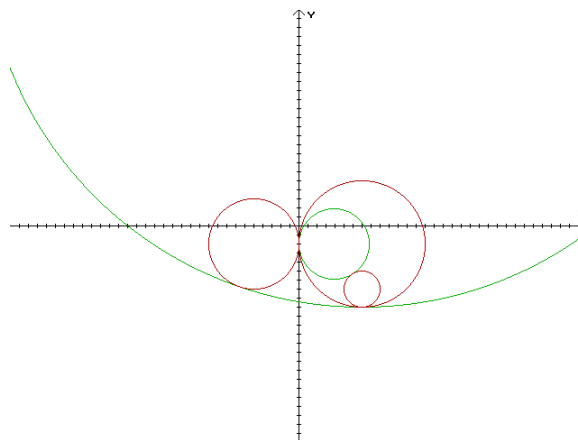
Wariant 2. Dwa okręgi styczne zewnętrznie, jeden z nich zawiera trzeci okrąg styczny wewnętrznie.

Ilość rozwiązań 2

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-5.000000	y =	-2.000000	r =	5.000000
2)	x =	7.000000	y =	-2.000000	r =	7.000000
3)	x =	7.000000	y =	-7.000000	r =	2.000000

sts	x	y	r
1)	0	7.000004	33.000021
2)	0	7.000004	33.000023
3)	0	7.000001	-1.999999
4)	0	3.888890	-1.999998
5)	3	-13.668960	-156.624770
6)	0	7.000002	-1.999998
7)	0	3.888890	-1.999998
8)	3	0.261687	-6.173775
9)	0	6.999996	32.999977
10)	0	6.999995	32.999968
11)	0	6.999999	-2.000001
12)	0	3.888888	-2.000002
13)	3	-0.767174	-17.285481
14)	0	6.999998	-2.000002
15)	0	3.888888	-2.000002
16)	3	0.104549	-7.870870



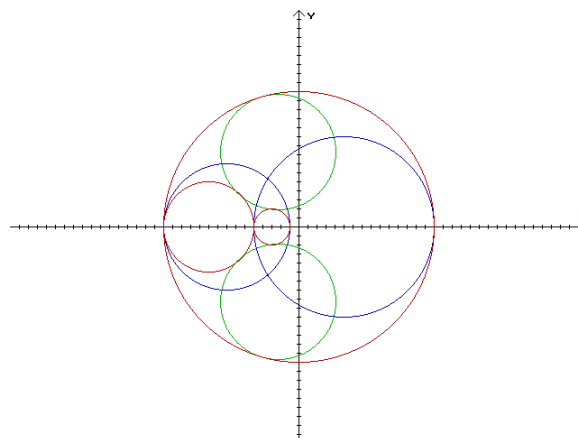
Wariant 3. Pierwszy okrąg zawiera dwa pozostałe styczne zewnętrznie okręgi, z których jeden jest styczny wewnętrznie do pierwszego.

Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	15.000000
2)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	5.000000
3)	x =	-3.000000	y =	0.000000	r =	2.000000

sts	x	y	r
1)	2	-8.000000	0.000000
2)	2	-8.000000	0.000000
3)	0	-2.272727	8.331956
4)	2	5.000000	0.000000
5)	0	-10.000000	0.000000
6)	0	-2.272727	8.331956
7)	2	5.000000	0.000000
8)	0	-10.000000	0.000000
9)	2	-8.000000	0.000000
10)	2	-8.000000	0.000000
11)	0	-2.272727	8.331956
12)	2	5.000000	0.000000
13)	0	-10.000000	0.000000
14)	0	-2.272727	8.331956
15)	2	5.000000	0.000000
16)	2	-10.000000	0.000000



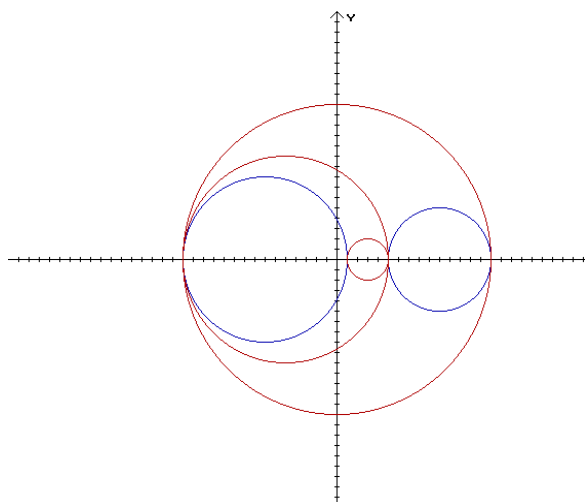
Wariant 4. Okrąg zawierający drugi okrąg styczny wewnętrznie, który zawiera trzeci okrąg styczny wewnętrznie.

Ilość rozwiązań 2

Tabela rozwiązań układu równań :

1) $x = 0.000000$ $y = 0.000000$ $r = 15.000000$
 2) $x = -5.000000$ $y = 0.000000$ $r = 10.000000$
 3) $x = 3.000000$ $y = 0.000000$ $r = 2.000000$

	sts	x	y	r
1)	0	-5.000000	0.000000	10.000000
2)	2	-5.000000	0.000000	-10.000000
3)	2	10.000000	0.000000	5.000000
4)	3	13.571429	-14.655203	-5.714286
5)	2	-7.000000	-0.000000	-8.000000
6)	2	10.000000	0.000000	-5.000000
7)	3	13.571429	7.144993	5.714286
8)	2	-7.000000	0.000000	8.000000
9)	0	-5.000000	-0.000000	10.000000
10)	0	-5.000000	-0.000000	-10.000000
11)	2	10.000000	-0.000000	5.000000
12)	3	13.571429	24.924017	-5.714286
13)	2	-7.000000	0.000000	-8.000000
14)	2	10.000000	-0.000000	-5.000000
15)	3	13.571429	3.940589	5.714286
16)	2	-7.000000	0.000000	8.000000



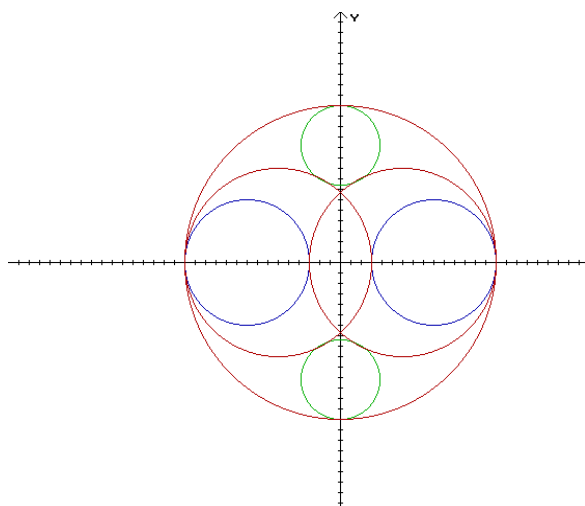
Wariant 5. Okrąg zawierający dwa okręgi przecinające się, styczne wewnętrznie do pierwszego.

Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1) $x = 0.000000$ $y = 0.000000$ $r = 15.000000$
 2) $x = 6.000000$ $y = 0.000000$ $r = 9.000000$
 3) $x = -6.000000$ $y = 0.000000$ $r = 9.000000$

	sts	x	y	r
1)	2	0.000000	0.000000	15.000000
2)	2	0.000000	0.000000	-15.000000
3)	0	0.000000	11.250000	3.750000
4)	2	-9.000000	0.000000	-6.000000
5)	2	9.000000	0.000000	-6.000000
6)	0	0.000000	11.250000	-3.750000
7)	2	-9.000000	0.000000	6.000000
8)	2	9.000000	0.000000	6.000000
9)	0	0.000000	0.000000	15.000000
10)	2	0.000000	0.000000	-15.000000
11)	0	0.000000	-11.250000	3.750000
12)	2	-9.000000	0.000000	-6.000000
13)	2	9.000000	0.000000	-6.000000
14)	0	0.000000	-11.250000	-3.750000
15)	2	-9.000000	0.000000	6.000000
16)	2	9.000000	0.000000	6.000000



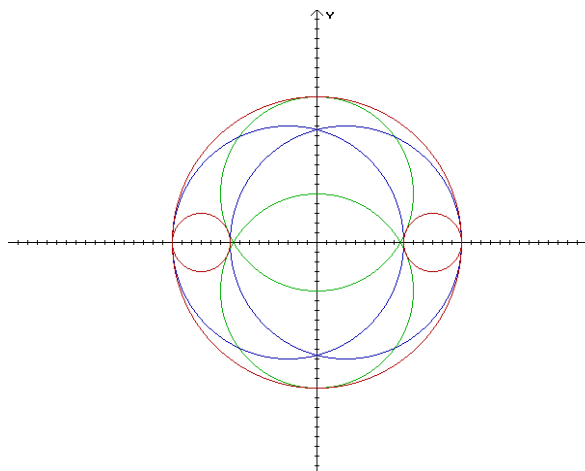
Wariant 6. Okrąg zawierający dwa styczne do niego wewnętrznie nie przecinające się okręgi.

Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1) $x = 0.000000$ $y = 0.000000$ $r = 15.000000$
 2) $x = 12.000000$ $y = 0.000000$ $r = 3.000000$
 3) $x = -12.000000$ $y = 0.000000$ $r = 3.000000$

	sts	x	y	r
1)	2	0.000000	0.000000	15.000000
2)	2	0.000000	0.000000	-15.000000
3)	0	0.000000	5.000000	10.000000
4)	2	-3.000000	0.000000	-12.000000
5)	3	3.000000	0.000000	-12.000000
6)	0	-0.000000	5.000000	-10.000000
7)	2	0.000000	0.000000	12.000000
8)	2	3.000000	0.000000	12.000000
9)	2	0.000000	0.000000	15.000000
10)	2	0.000000	0.000000	-15.000000
11)	0	-0.000000	-5.000000	10.000000
12)	2	-3.000000	-0.000000	-12.000000
13)	2	3.000000	-0.000000	-12.000000
14)	0	0.000000	-5.000000	-10.000000
15)	2	-3.000000	-0.000000	12.000000
16)	3	3.000000	-0.000000	12.000000

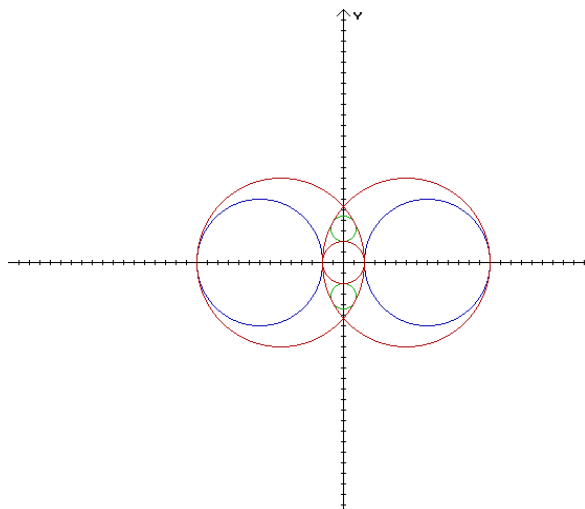


Wariant 7. Dwa przecinające się okręgi, zawierające w części wspólnej trzeci okrąg styczny do obydwu.
Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	2.000000
2)	x =	6.000000	y =	0.000000	r =	8.000000
3)	x =	-6.000000	y =	0.000000	r =	8.000000

	sts	x	y	r
1)	0	0.000000	0.000000	2.000000
2)	2	0.000000	0.000000	-2.000000
3)	0	-0.000000	3.200000	-1.200000
4)	2	8.000000	-0.000000	6.000000
5)	2	-8.000000	0.000000	6.000000
6)	0	-0.000000	3.200000	1.200000
7)	2	8.000000	-0.000000	-6.000000
8)	2	-8.000000	-0.000000	-6.000000
9)	2	0.000000	0.000000	2.000000
10)	0	0.000000	-0.000000	-2.000000
11)	0	-0.000000	-3.200000	-1.200000
12)	2	8.000000	0.000000	6.000000
13)	2	-8.000000	0.000000	6.000000
14)	0	-0.000000	-3.200000	1.200000
15)	3	8.000000	-0.000000	-6.000000
16)	2	-8.000000	-0.000000	-6.000000

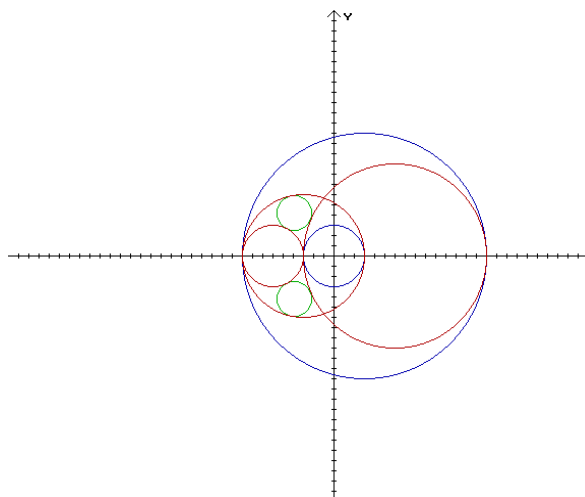


Wariant 8. Dwa przecinające się okręgi, jeden z nich zawiera trzeci styczny do obydwu pozostałych.
Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-6.000000	y =	0.000000	r =	3.000000
2)	x =	-3.000000	y =	0.000000	r =	6.000000
3)	x =	6.000000	y =	0.000000	r =	9.000000

	sts	x	y	r
1)	2	3.000000	0.000000	12.000000
2)	2	3.000000	0.000000	-12.000000
3)	2	0.000000	0.000000	-3.000000
4)	0	-3.857143	4.199125	1.714286
5)	2	-6.000000	0.000000	-3.000000
6)	2	0.000000	0.000000	3.000000
7)	0	-3.857143	4.199125	-1.714286
8)	2	-6.000000	0.000000	3.000000
9)	2	3.000000	0.000000	12.000000
10)	2	3.000000	0.000000	-12.000000
11)	2	-0.000000	-0.000000	-3.000000
12)	0	-3.857143	-4.199125	1.714286
13)	2	-6.000000	0.000000	-3.000000
14)	2	-0.000000	-0.000000	3.000000
15)	0	-3.857143	-4.199125	-1.714286
16)	2	-6.000000	0.000000	3.000000



3.4. Położenie szczególne III-go stopnia:

- trzy styczności
- bez punktów potrójnych
- bez potrójnych styczności

a oto wszystkie warianty spełniające powyższy warunek

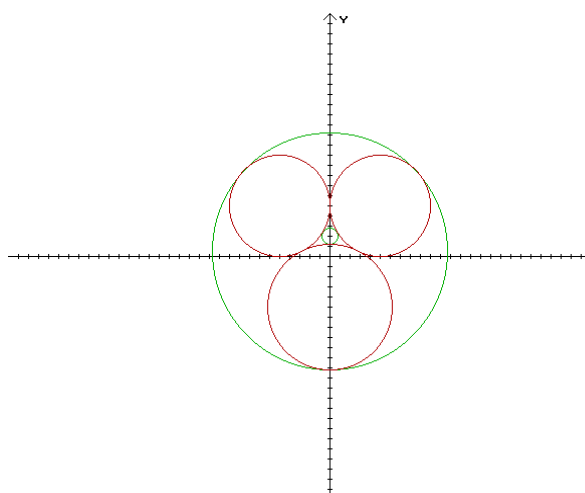
Wariant 1. Każdy z trzech okręgów jest styczny zewnętrznie do dwóch pozostałych

Ilość rozwiązań 2

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	5.000000	y =	5.000000	r =	5.000000
2)	x =	-5.000000	y =	5.000000	r =	5.000000
3)	x =	0.000000	y =	-5.000000	r =	6.180340

	sts	x	y	r
1)	0	-0.000000	2.007458	-0.827118
2)	0	0.000000	0.527864	-11.708204
3)	0	5.000004	5.000002	5.000004
4)	0	-4.999998	4.999998	4.999998
5)	0	0.000000	-5.000000	6.180340
6)	0	5.000003	5.000002	-5.000003
7)	0	-5.000004	5.000002	-5.000004
8)	0	0.000000	-4.999999	-6.180339
9)	0	0.000000	0.527864	11.708204
10)	3	-0.000000	2.007458	0.827118
11)	0	4.999998	4.999998	4.999998
12)	0	-5.000003	5.000002	5.000003
13)	0	0.000000	-5.000004	6.180343
14)	0	4.999998	4.999998	-4.999998
15)	0	-4.999998	4.999998	-4.999998
16)	0	0.000000	-5.000006	-6.180346



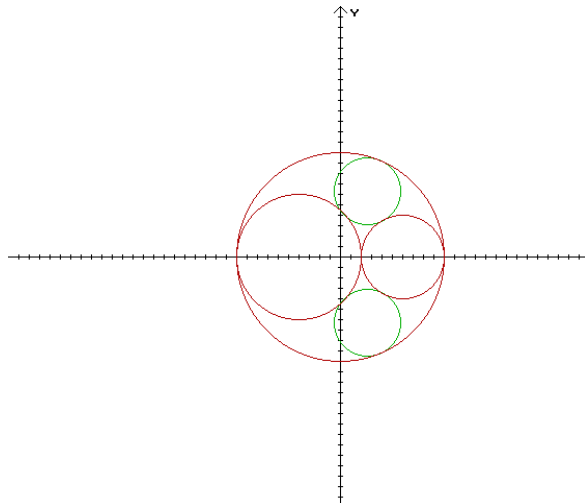
Wariant 2. Jeden z okręgów zawiera dwa pozostałe, które są styczne do niego wewnętrznie, a do siebie zewnętrznie.

Ilość rozwiązań 2

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
2)	x =	-4.000000	y =	0.000000	r =	6.000000
3)	x =	6.000000	y =	0.000000	r =	4.000000

	sts	x	y	r
1)	2	0.000000	0.000000	10.000000
2)	2	0.000000	0.000000	-10.000000
3)	0	2.631579	6.315789	3.157895
4)	2	6.000000	0.000000	-4.000000
5)	2	-4.000000	0.000000	-6.000000
6)	0	2.631579	6.315789	-3.157895
7)	2	6.000000	0.000000	4.000000
8)	2	-4.000000	0.000000	6.000000
9)	2	0.000000	0.000000	10.000000
10)	2	0.000000	0.000000	-10.000000
11)	0	2.631579	-6.315789	3.157895
12)	2	6.000000	-0.000000	-4.000000
13)	2	-4.000000	-0.000000	-6.000000
14)	0	2.631579	-6.315789	-3.157895
15)	2	6.000000	-0.000000	4.000000
16)	2	-4.000000	0.000000	6.000000



3.5. Położenie szczególne IV-go stopnia:

- potrójna styczność
- a oto wszystkie warianty spełniające powyższy warunek

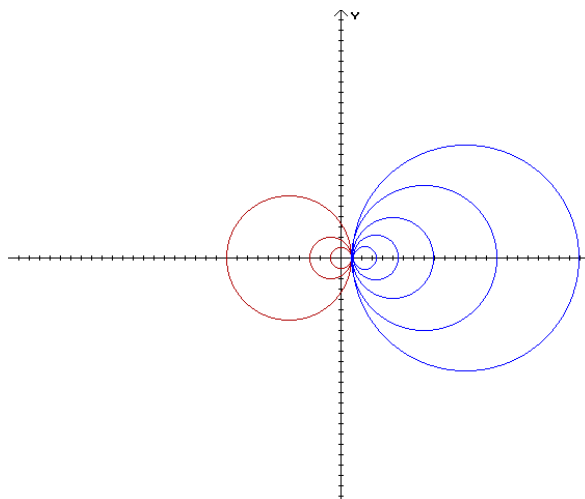
Wariant 1. Pierwszy okrąg zawiera drugi, a ten zawiera trzeci, wszystkie są styczne w jednym punkcie.

Ilość rozwiązań ∞

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	1.000000
2)	x =	-1.000000	y =	0.000000	r =	2.000000
3)	x =	-5.000000	y =	0.000000	r =	6.000000

	sts	x	y	r
1)	2	-165.583042	832.000000	166.583042
2)	2	8194.000000	62.255637	8193.000000
3)	2	1.000000	-0.000000	0.000000
4)	3	1.000000	0.000000	0.000000
5)	2	1.000000	-0.000000	-0.000000
6)	2	1.000000	0.000000	0.000000
7)	3	1.000000	0.000000	0.000000
8)	2	1.000000	0.000000	0.000000
9)	2	-633.183158	768.000000	634.183158
10)	2	-0.500000	-62.753063	-1.500000
11)	2	1.000000	-0.000000	0.000000
12)	3	1.000000	-0.000000	0.000000
13)	2	1.000000	0.000000	0.000000
14)	2	1.000000	-0.000000	0.000000
15)	3	1.000000	0.000000	0.000000
16)	2	1.000000	-0.000000	-0.000000



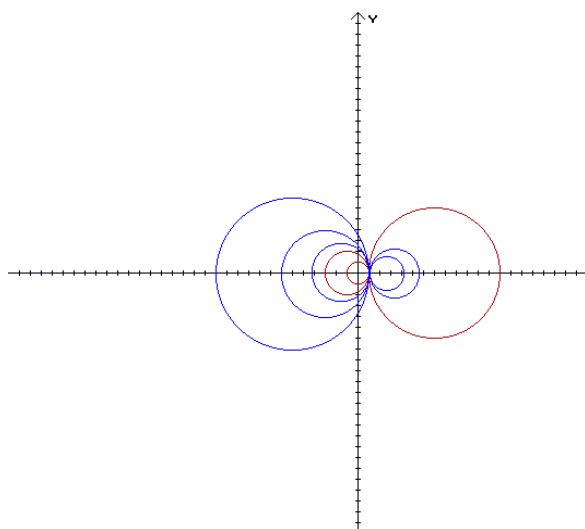
Wariant 1. Pierwszy okrąg zawiera drugi styczny do niego wewnątrz, trzeci jest styczny do nich zewnątrz w tym samym punkcie styczności.

Ilość rozwiązań ∞

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	1.000000
2)	x =	-1.000000	y =	0.000000	r =	2.000000
3)	x =	7.000000	y =	0.000000	r =	6.000000

	sts	x	y	r
1)	2	1.000000	0.000000	0.000000
2)	2	1.000000	-0.000000	-0.000000
3)	2	1.000000	0.000000	0.000000
4)	2	1.000000	0.000000	0.000000
5)	2	-302.009217	498.697491	-303.009217
6)	2	1.000000	-0.000000	0.000000
7)	2	1.000000	0.000000	-0.000000
8)	2	-85.543022	672.000000	86.543022
9)	2	1.000000	-0.000000	-0.000000
10)	2	1.000000	0.000000	-0.000000
11)	3	1.000000	0.000000	-0.000000
12)	2	1.000000	-0.000000	-0.000000
13)	2	-7039.000000	-249.988250	-7040.000000
14)	2	1.000000	0.000000	0.000000
15)	2	1.000000	-0.000000	0.000000
16)	2	-137.142857	85.333333	138.142857



3.6. Położenie szczególne V-go stopnia:

- punkt potrójny
- a oto wszystkie warianty spełniające powyższy warunek

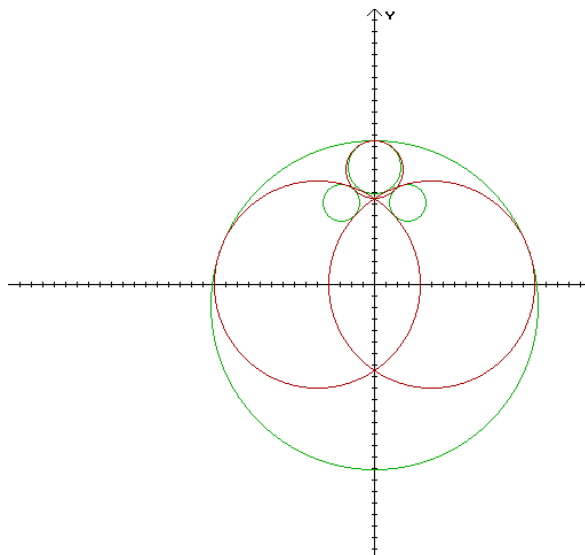
Wariant 1. Trzy okręgi przecinają się w tym samym punkcie.

Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	5.000000	y =	0.000000	r =	9.000000
2)	x =	-5.000000	y =	0.000000	r =	9.000000
3)	x =	0.000000	y =	10.000000	r =	2.516685

	sts	x	y	r
1)	3	-0.000000	7.483315	-0.000000
2)	0	0.000000	-1.796141	-14.312826
3)	0	2.943526	7.071763	1.635292
4)	0	-0.000000	7.483315	0.000000
5)	0	0.000000	10.177398	2.339287
6)	0	2.943526	7.071763	-1.635292
7)	0	-0.000000	7.483315	-0.000000
8)	0	0.000000	10.177398	-2.339287
9)	0	0.000000	-1.796141	14.312826
10)	3	0.000000	7.483315	0.000000
11)	0	0.000000	7.483315	0.000000
12)	0	-2.943526	7.071763	1.635292
13)	0	-0.000000	7.483315	0.000000
14)	0	0.000000	7.483315	-0.000000
15)	0	-2.943526	7.071763	-1.635292
16)	0	0.000000	7.483315	-0.000000



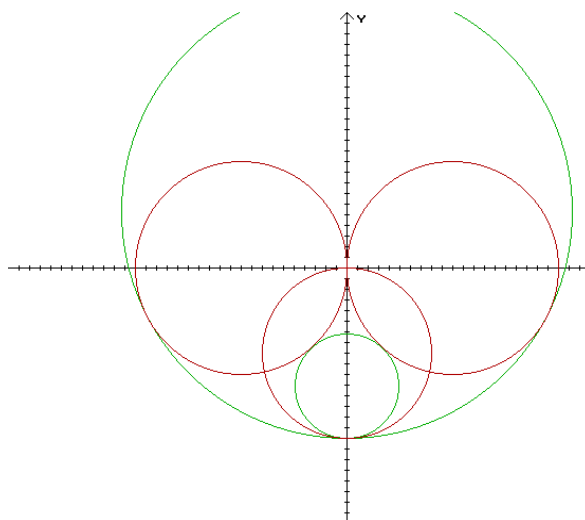
Wariant 2. Dwa okręgi są styczne, trzeci przecina je w punkcie styczności.

Ilość rozwiązań 2

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
2)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
3)	x =	0.000000	y =	-8.000000	r =	8.000000

	sts	x	y	r
1)	0	0.000000	-0.000000	0.000000
2)	0	0.000000	5.333333	-21.333333
3)	0	0.000000	-0.000000	-0.000000
4)	0	-0.000000	-0.000000	-0.000000
5)	0	-0.000000	-0.000000	0.000000
6)	0	-0.000000	0.000000	-0.000000
7)	0	0.000000	0.000000	-0.000000
8)	0	-0.000000	-0.000000	-0.000000
9)	0	0.000000	5.333333	21.333333
10)	0	0.000000	0.000000	0.000000
11)	0	-0.000000	0.000000	0.000000
12)	0	-0.000000	-0.000000	-0.000000
13)	0	-0.000000	-11.076923	4.923077
14)	0	0.000000	-0.000000	0.000000
15)	0	-0.000000	-0.000000	0.000000
16)	3	-0.000000	-11.076923	-4.923077



3.7. Położenie szczególne VI-go stopnia:

- dwa punkty potrójne
- a oto jedyny wariant spełniający powyższy warunek

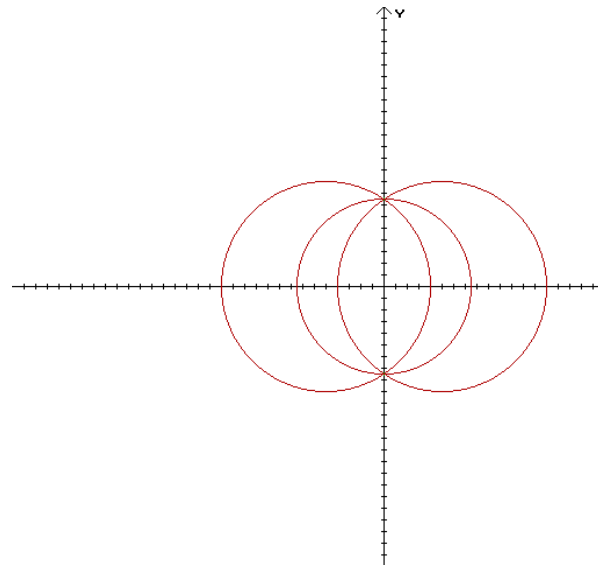
Wariant 1. Trzy okręgi przecinają się w dwóch tych samych punktach.

Ilość rozwiązań **0**

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	5.000000	y =	0.000000	r =	9.000000
2)	x =	-5.000000	y =	0.000000	r =	9.000000
3)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	7.483315

	sts	x	y	r
1)	0	0.000000	7.483315	-0.000000
2)	0	0.000000	7.483315	0.000000
3)	0	-0.000000	7.483315	-0.000000
4)	0	0.000000	7.483315	-0.000000
5)	3	-0.000000	7.483315	0.000000
6)	0	-0.000000	7.483315	0.000000
7)	0	0.000000	7.483315	0.000000
8)	3	-0.000000	7.483315	-0.000000
9)	0	0.000000	-7.483315	-0.000000
10)	0	0.000000	-7.483315	0.000000
11)	0	-0.000000	-7.483315	-0.000000
12)	0	0.000000	-7.483315	-0.000000
13)	3	0.000000	-7.483315	0.000000
14)	0	-0.000000	-7.483315	0.000000
15)	0	0.000000	-7.483315	0.000000
16)	3	-0.000000	-7.483315	-0.000000



3.8. Uogólnienie zagadnienia Apolloniusza.

Po przeanalizowaniu wszystkich przedstawionych wariantów możemy wysnuć hipotezę:

Hipoteza 3.8.1. *W zależności od sposobu położenia na płaszczyźnie Zagadnienie Apolloniusza może mieć od 0 do 8 rozwiązań.*

Hipoteza ta nie jest prawdziwa dla położenia szczególnego IV stopnia, jednak ponieważ fakt styczności do trzech okręgów zostaje sprowadzony tutaj do styczności do jednego okręgu w danym punkcie, przypadek ten możemy uznać za wyjątek i opuścić w dalszych rozważaniach.

Poniższa tabela (Tab. 1.) Przedstawia ilości rozwiązań we wszystkich wariantach poszczególnych położzeń.

Nr wariantu	PO	PS I	PS II	PS III	PS IV	PS V	PS VI
1	8	6	4	2	∞	4	0
2	8	2	2	2	∞	2	
3	8	4	4				
4	4	6	2				
5	4	6	4				
6	4	6	4				
7	4	4	4				
8	4	2	4				
9	8	4					
10	8	4					
11	0	2					
12	0	6					
13	8	2					
14	8						
Wszystkie występujące rozwiązania	0, 4, 8	2, 4, 6	2, 4	2	∞	2, 4	0

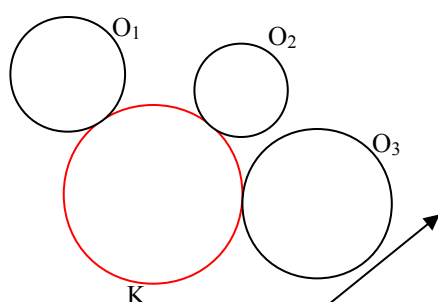
Tab. 1.

Jak widać w zbiorze rozwiązań brakuje nam rozwiązań nieparzystych: {1, 3, 5, 7}. Dlaczego tak się dzieje?

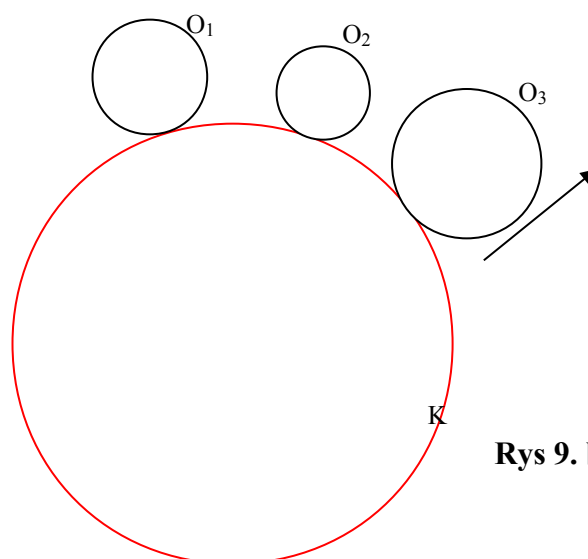
Zauważmy, że wszystkie analizowane do tej pory przypadki zostały tak dobrane, aby okręgi nie miały wspólnej stycznej. Czy istnienie stycznej ma związek z ilością rozwiązań zagadnienia Apolloniusza?

Przeanalizujmy następujący przypadek:

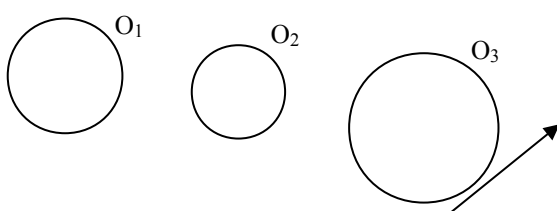
Położenie ogólne, wariant 1.



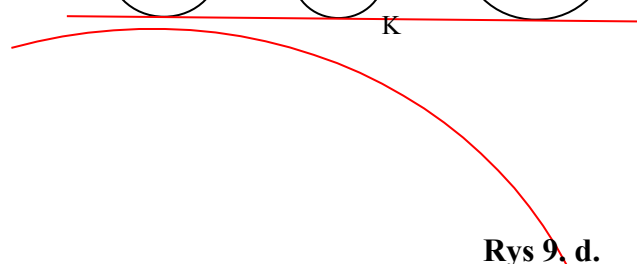
Rys 9. a.



Rys 9. b.



Rys 9. c.



Rys 9. d.

Trzy okręgi położone są w taki sposób jak na rysunku 9.a. Okrąg K jest jednym z okręgów stycznych do wszystkich trzech danych okręgów. Następnie okrąg O_3 przesunemy w kierunku wskazanym strzałką. Jak widać z rysunków 9.a. – 9.c. w miarę jak przesuwamy okrąg położenie punktu styczności zmienia się tak, że rośnie promień okręgu K . W pewnym momencie (rys 9.d.) punkty styczności układają się wzdłuż jednej prostej, a więc jeden z okręgów stycznych do danych trzech okręgów przekształca się w prostą i liczba rozwiązań spada o 1.

Uogólniając można więc zagadnienie Apolloniusza sprowadzić do szukania okręgów i prostych stycznych do danych trzech okręgów, wówczas ilość rozwiązań pozostaje bez zmian.

W tym opracowaniu chciałbym się jednak skupić tylko na okręgach dlatego postawmy kolejne hipotezy.

Hipoteza 3.8.2. *Gdy trzy dane okręgi mają wspólną styczną, ilość rozwiązań zagadnienia Apolloniusza zmniejsza się o jedno.*

I analogicznie:

Hipoteza 3.8.3. Gdy trzy dane okręgi mają dwie wspólne styczne, ilość rozwiązań zagadnienia Apolloniusza zmniejsza się o dwa.

3.9. Położenia – uzupełnienie.

A oto modyfikacje poszczególnych wariantów wszystkich przytoczonych wcześniej położów po wprowadzeniu wspólnych stycznych:

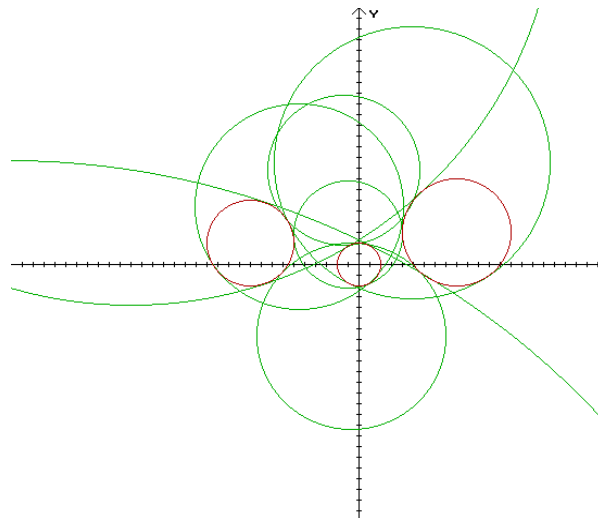
Położenie ogólne wariant 1.a.

Ilość rozwiązań 7

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	2.000000
2)	x =	-10.000000	y =	2.000000	r =	4.000000
3)	x =	9.000000	y =	3.000000	r =	5.000000

	sts	x	y	r
1)	0	-1.437500	8.848246	-6.964254
2)	0	-1.437500	8.848246	6.964254
3)	0	-1.019136	2.843229	5.020363
4)	0	4.896721	9.478279	-12.668442
5)	0	-5.458010	5.359174	-9.649224
6)	0	-1.019136	2.843229	-5.020363
7)	0	-21.021721	35.396721	-39.168442
8)	0	-5.458010	5.359174	9.649224
9)	0	-1.437500	8.848246	-6.964254
10)	0	-1.437500	8.848246	6.964254
11)	0	-0.712526	-6.661689	8.699686
12)	0	-21.021721	35.396721	39.168442
13)	0	-32.291990	-64.409174	-74.050776
14)	0	-0.712526	-6.661689	-8.699686
15)	0	4.896721	9.478279	12.668442
16)	0	-32.291990	-64.409174	74.050776



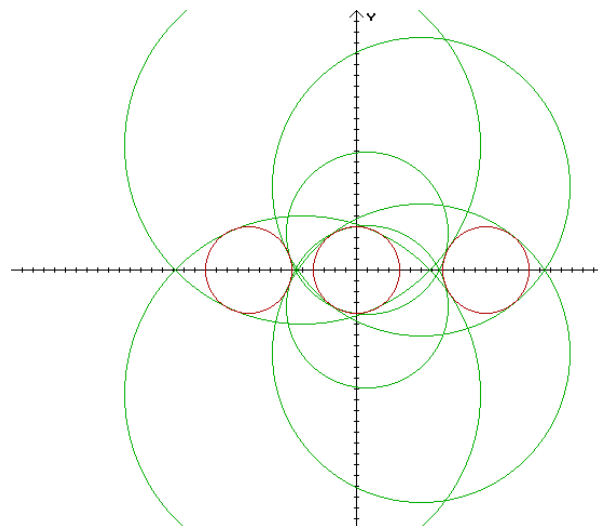
Położenie ogólne wariant 1.b.

Ilość rozwiązań 6

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	4.000000
2)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	4.000000
3)	x =	12.000000	y =	0.000000	r =	4.000000

	sts	x	y	r
1)	2	3.378906	236838900083861590002377900603251	2377900603251621890368426895668
2)	2	-0.101562	7.685213	-13.750000
3)	0	6.000000	3.354102	7.500000
4)	0	1.000000	11.456439	-16.500000
5)	0	-5.000000	7.685213	13.750000
6)	0	6.000000	3.354102	-7.500000
7)	0	1.000000	11.456439	16.500000
8)	0	-5.000000	10765404549266429101080863910568	-1981583836043019176897368907972
9)	2	1.000000	-7.685213	-13.750000
10)	0	6.000000	-3.354102	7.500000
11)	0	1.000000	-11.456439	-16.500000
12)	0	-5.000000	-7.685213	13.750000
13)	0	6.000000	-3.354102	-7.500000
14)	0	1.000000	-11.456439	16.500000
15)	0	-5.000000	11.456439	-16.500000
16)	0	-5.000000	11.456439	16.500000



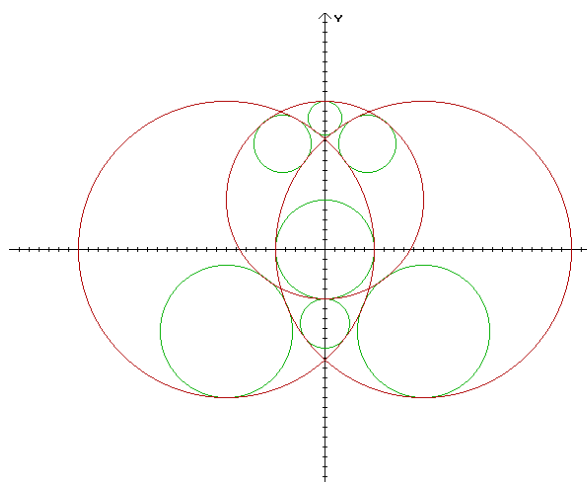
Położenie ogólne wariant 2.a.

Ilość rozwiązań 7

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	15.000000
2)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	15.000000
3)	x =	0.000000	y =	5.000000	r =	10.000000

	sts	x	y	r
1)	0	0.000000	-0.000000	5.000000
2)	0	0.000000	-0.000000	-5.000000
3)	0	4.285714	10.714286	-2.857143
4)	0	-4.285714	10.714286	-2.857143
5)	0	0.000000	13.333333	1.666667
6)	0	4.285714	10.714286	2.857143
7)	0	10.000000	-8.333333	-6.666667
8)	0	0.000000	13.333333	-1.666667
9)	0	0.000000	0.000000	5.000000
10)	0	0.000000	-0.000000	-5.000000
11)	0	-10.000000	-8.333333	6.666667
12)	0	10.000000	-8.333333	6.666667
13)	0	0.000000	-7.500000	-2.500000
14)	0	-10.000000	-8.333333	-6.666667
15)	0	-4.285714	10.714286	2.857143
16)	0	-0.000000	-7.500000	2.500000



Położenie ogólne wariant 2.b. – nie istnieje
 Położenie ogólne wariant 3.a. – nie istnieje
 Położenie ogólne wariant 3.b. – nie istnieje

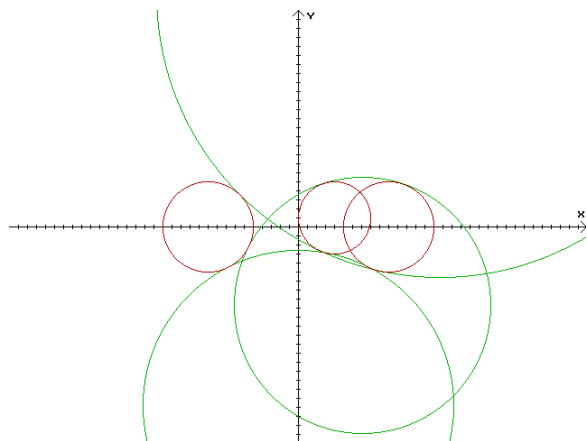
Położenie ogólne wariant 4.a.

Ilość rozwiązań 3

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	5.000000
3)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	5.000000

	sts	x	y	r
1)	0	0.000000	-19.809524	-17.190476
2)	0	0.000000	-19.809524	17.190476
3)	3	-2.015991	-12.808114	-4.031981
4)	3	0.000000	-24.390758	1.401027
5)	0	15.689560	25.758238	-31.379119
6)	3	-2.331622	-9.020533	4.663245
7)	3	0.000000	-370.276532	37.030726
8)	0	15.689560	25.758238	31.379119
9)	0	0.000000	-19.809524	-17.190476
10)	0	0.000000	-19.809524	17.190476
11)	3	-5.389731	27.676773	-10.779462
12)	3	-0.000000	23.270404	6.696712
13)	0	7.079671	-8.681315	-14.159342
14)	3	-2.662649	-5.048207	5.325299
15)	3	0.000000	-5.190576	-3.534380
16)	0	7.079671	-8.681315	14.159342



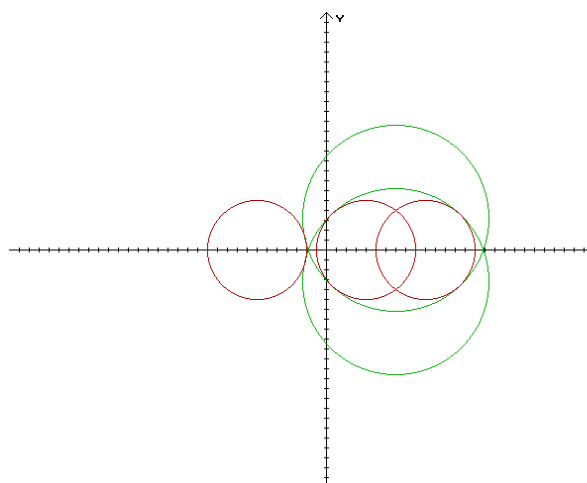
Położenie ogólne wariant 4.b.

Ilość rozwiązań 2

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	5.000000
2)	x =	4.000000	y =	0.000000	r =	5.000000
3)	x =	-7.000000	y =	0.000000	r =	5.000000

	sts	x	y	r
1)	2	-1.500000	-914140652363663972-9187343239	
2)	2	1000.000000	1000.000000	1000.000000
3)	3	-1.500000	2.986611	-5.100000
4)	3	1.500000	0.441752	3.300000
5)	0	7.000000	3.150000	-9.350000
6)	3	-1.500000	-13.703485	5.100000
7)	3	1.500000	-2.823044	-3.300000
8)	0	7.000000	3.150000	9.350000
9)	2	-0.304688	168434626063656448016759664284	
10)	2	2.891113	837962264666690581.04217313031	
11)	3	-1.500000	1.279304	-5.100000
12)	3	1.500000	0.398815	3.300000
13)	0	7.000000	-3.150000	-9.350000
14)	3	-1.500000	-1.394146	5.100000
15)	3	1.500000	-1.791238	-3.300000
16)	0	7.000000	-3.150000	9.350000



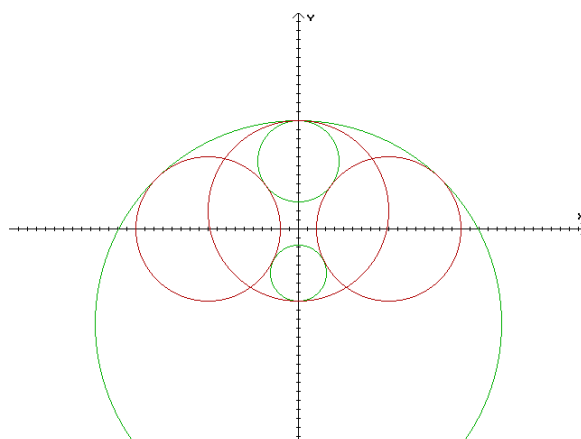
Położenie ogólne wariant 5.a.

Ilość rozwiązań 3

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	8.000000
2)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	8.000000
3)	x =	0.000000	y =	2.000000	r =	10.000000

sts	x	y	r
1)	0	0.000000	-22.500000
2)	0	0.000000	-22.500000
3)	3	-5.336322	-6.670402
4)	3	3.062614	-3.828267
5)	0	0.000000	4.500000
6)	3	-2.472434	-3.090542
7)	3	5.907858	7.384822
8)	0	0.000000	-4.500000
9)	0	0.000000	-22.500000
10)	3	0.000000	-22.500000
11)	3	-5.345149	-6.681436
12)	3	5.443901	-6.804876
13)	0	-0.000000	3.125000
14)	3	-5.663121	7.078902
15)	3	5.773090	7.216363
16)	0	-0.000000	-3.125000



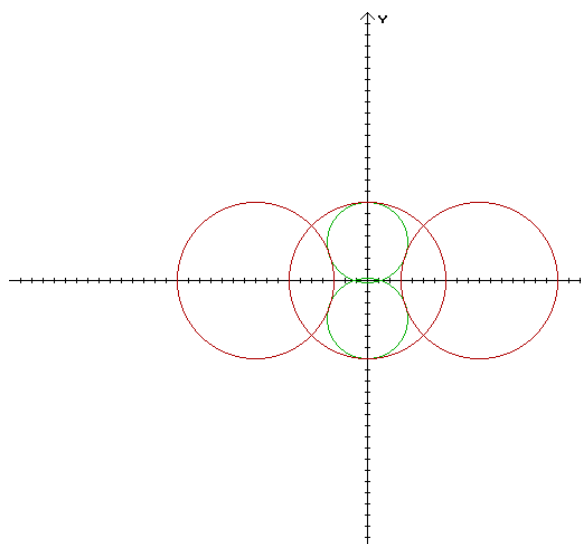
Polozenie ogólne wariant 5.b.

Ilość rozwiązań 2

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	7.000000
2)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	7.000000
3)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	7.000000

sts	x	y	r
1)	2	-18014398509481994.26444938475656358446490371073	-7.142857
2)	2	-18014398509481984.049037107316853454004452542931	-7.142857
3)	3	-5.000000	2.338831
4)	3	5.000000	-2.169705
5)	0	0.000000	3.428571
6)	3	-5.000000	8.579227
7)	3	5.000000	-1.577007
8)	0	0.000000	3.428571
9)	2	-1000.000000	-1000.000000
10)	2	-0.537109	-894414885995781005.9007199254
11)	3	-5.000000	-24.757693
12)	3	5.000000	-5.966037
13)	0	0.000000	-3.428571
14)	3	-5.000000	-3.440079
15)	3	5.000000	-5.385748
16)	0	-0.000000	-3.428571



Polozenie ogólne wariant 6.a. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 6.b. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 7.a. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 7.b. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 8.a. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 8.b. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 9.a. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 9.b. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 10.a. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 10.b. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 11.a. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 11.b. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 12.a. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 12.b. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 13.a. – nie istnieje

Polozenie ogólne wariant 13.b. – nie istnieje

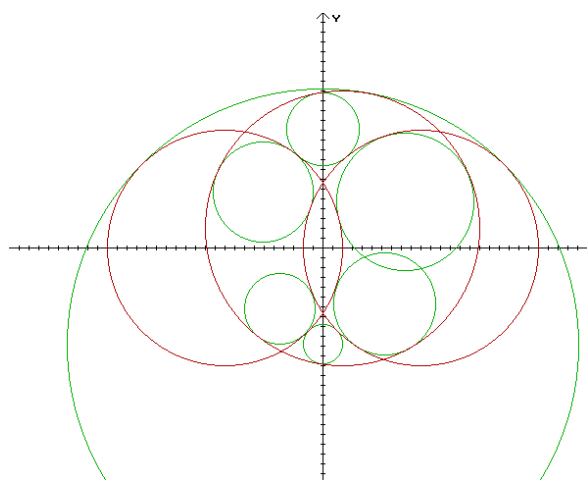
Polozenie ogólne wariant 14.a.

Ilość rozwiązań 7

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	12.000000
2)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	12.000000
3)	x =	2.000000	y =	2.000000	r =	14.000000

sts	x	y	r
1)	0	-9.916667	26.083333
2)	0	-9.916667	-26.083333
3)	0	4.723232	-7.021247
4)	0	5.710971	-5.086704
5)	0	12.103672	3.700282
6)	0	4.723232	7.021247
7)	0	5.710971	5.086704
8)	0	12.103672	-3.700282
9)	0	-9.916667	26.083333
10)	0	-9.916667	-26.083333
11)	0	6.278729	-5.232274
12)	0	-4.364040	-3.636700
13)	0	-9.817957	2.014003
14)	0	6.278729	5.232274
15)	0	-4.364040	3.636700
16)	0	-9.817957	-2.014003



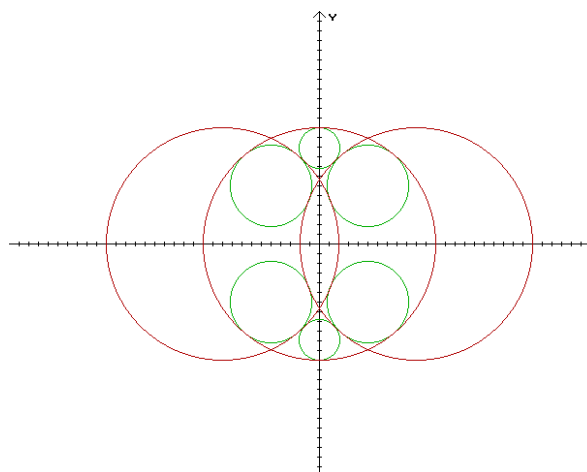
Położenie ogólne wariant 14.b.

Ilość rozwiązań 6

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	12.000000
2)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	12.000000
3)	x =	0.000000	y =	0.000000	r =	12.000000

	sts	x	y	r
1)	2	1000.000000	1000.000000	1000.000000
2)	2	-225179981368524.83169486400224828832.68106479329	-225179981368524.83169486400224828832.68106479329	-225179981368524.83169486400224828832.68106479329
3)	0	5.000000	6.030018	-4.166667
4)	0	-5.000000	6.030018	-4.166667
5)	0	0.000000	9.916667	2.083333
6)	0	5.000000	6.030018	4.166667
7)	0	-5.000000	6.030018	4.166667
8)	0	0.000000	9.916667	-2.083333
9)	2	-225179981368524.83169486400224828832.68106479329	-225179981368524.83169486400224828832.68106479329	-225179981368524.83169486400224828832.68106479329
10)	2	18014398509481984.0041248662029051210004903710731	18014398509481984.0041248662029051210004903710731	18014398509481984.0041248662029051210004903710731
11)	0	5.000000	-6.030018	-4.166667
12)	0	-5.000000	-6.030018	-4.166667
13)	0	-0.000000	-9.916667	2.083333
14)	0	5.000000	-6.030018	4.166667
15)	0	-5.000000	-6.030018	4.166667
16)	0	-0.000000	-9.916667	-2.083333



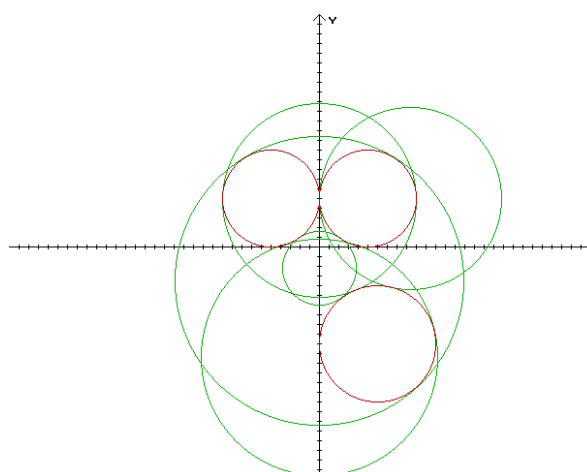
Położenie szczególne I stopnia wariant 1.a.

Ilość rozwiązań 5

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	5.000000	y =	5.000000	r =	5.000000
2)	x =	-5.000000	y =	5.000000	r =	5.000000
3)	x =	6.000000	y =	-10.000000	r =	6.000000

	sts	x	y	r
1)	0	0.000000	-2.246400	-3.803994
2)	0	0.000000	-3.490207	-14.853102
3)	0	9.375005	5.000004	9.375005
4)	2	-20733213967791589.3	-2.528677	20733213967791589.3
5)	0	0.000000	4.835322	-10.002711
6)	0	9.375005	5.000004	-9.375005
7)	2	1000.000000	1000.000000	1000.000000
8)	0	0.000000	-11.421860	-12.166173
9)	0	0.000000	-3.490207	14.853102
10)	0	0.000000	-2.246400	3.803994
11)	0	9.374995	4.999996	9.374995
12)	2	-26644795941615575.6	-2.502989	26644795941615575.6
13)	0	0.000000	-11.421860	12.166173
14)	0	9.374994	4.999996	-9.374994
15)	2	-1000.000000	-1000.000000	-1000.000000
16)	0	0.000000	4.835322	10.002711



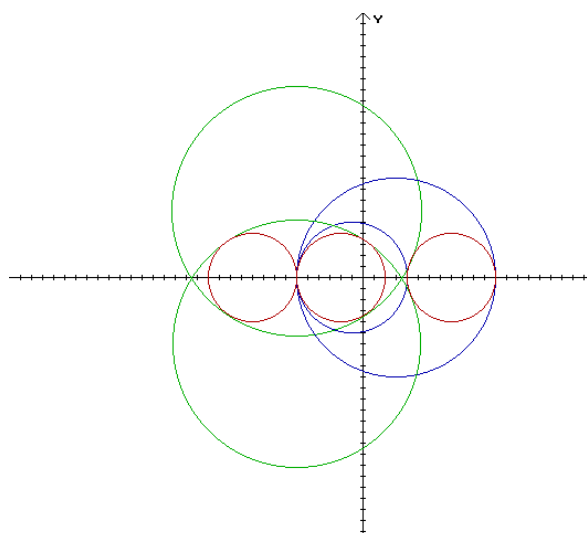
Położenie szczególne I stopnia wariant 1.b.

Ilość rozwiązań 4

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	4.000000
2)	x =	-2.000000	y =	0.000000	r =	4.000000
3)	x =	8.000000	y =	0.000000	r =	4.000000

	sts	x	y	r
1)	2	-0.000000	0.000000	-6.47221309
2)	2	-0.462891	-1621295865853378056161483651	-9.000000
3)	2	3.000000	0.000000	5.000000
4)	2	-1.000000	0.000000	-11.250000
5)	0	-6.000000	6.046693	9.000000
6)	2	3.000000	0.000000	-5.000000
7)	2	-1.000000	0.000000	11.250000
8)	0	-6.000000	6.046693	-810647932926689514-807418259
9)	2	-0.375000	1614810682389966220621295865	9.000000
10)	2	5.250000	0.000000	-9.000000
11)	2	3.000000	0.000000	5.000000
12)	2	-1.000000	0.000000	-11.250000
13)	0	-6.000000	6.046693	9.000000
14)	2	3.000000	0.000000	-5.000000
15)	2	-1.000000	0.000000	11.250000
16)	0	-6.000000	-6.046693	



Położenie szczególne I stopnia wariant 2.a. – nie istnieje

Położenie szczególne I stopnia wariant 2.b. – nie istnieje

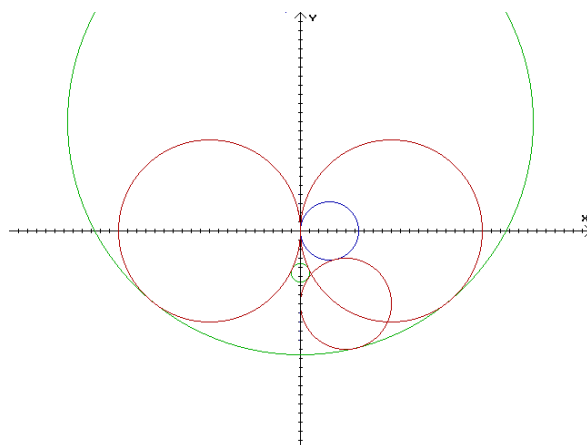
Położenie szczególne I stopnia wariant 3.a.

Ilość rozwiązań **3**

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
2)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
3)	x =	5.000000	y =	-8.000000	r =	5.000000

	sts	x	y	r
1)	0	-0.000000	-4.640039	-1.024063
2)	0	0.000000	12.024655	-25.639448
3)	2	252.000000	-4.000000	-252.000000
4)	2	3.200000	0.000000	3.200000
5)	3	-0.000000	-4.709292	0.378289
6)	2	7566047373982423800621.000000	0.000000	7566047373
7)	2	3.200000	0.000000	-3.200000
8)	3	-0.000000	1.286142	2.819276
9)	0	0.000000	12.024655	25.639448
10)	0	-0.000000	-4.640039	-1.024063
11)	2	-248.000000	-4.000000	248.000000
12)	2	3.200000	0.000000	3.200000
13)	3	0.000000	-23.604994	10.455997
14)	2	-1000.000000	-1000.000000	-1000.0000
15)	2	3.200000	0.000000	-3.200000
16)	3	-0.000000	15.458305	10.377762



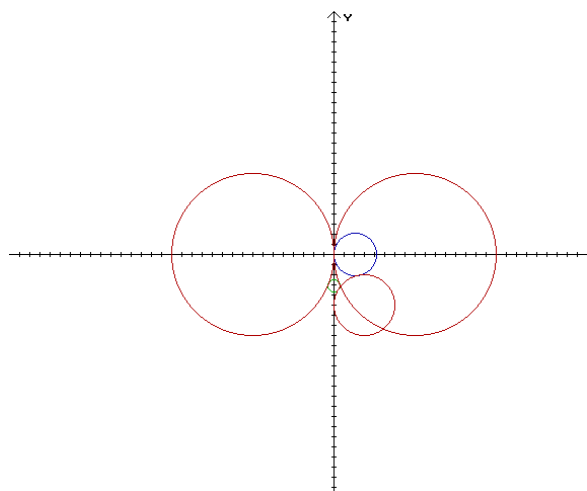
Położenie szczególne I stopnia wariant 3.b.

Ilość rozwiązań **2**

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-8.000000	y =	0.000000	r =	8.000000
2)	x =	8.000000	y =	0.000000	r =	8.000000
3)	x =	3.000000	y =	-5.000000	r =	3.000000

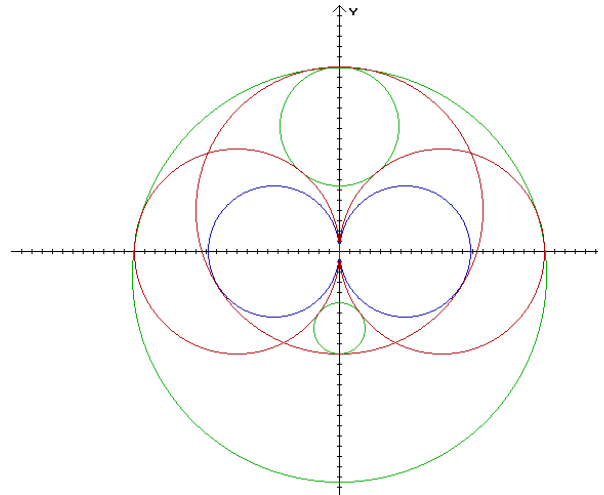
	sts	x	y	r
1)	0	-0.000000	-3.068182	-0.568182
2)	0	0.000000	-3.068182	0.568182
3)	2	-6885579936734565.54-2.488653	0.000000	6885579936
4)	2	2.083333	0.000000	2.083333
5)	3	-0.000000	-4.246658	0.793935
6)	2	1000.000000	1000.000000	1000.000000
7)	2	2.083333	0.000000	-2.083333
8)	3	-0.000000	-5.706995	-1.457725
9)	0	-0.000000	-3.068182	-0.568182
10)	0	0.000000	-3.068182	0.568182
11)	2	-7621109892959274.68-2.523136	0.000000	7621109892
12)	2	2.083333	0.000000	2.083333
13)	3	-0.000000	-4.039956	0.699935
14)	2	-1000.000000	-1000.000000	-1000.0000
15)	2	2.083333	-0.000000	-2.083333
16)	3	-0.000000	-4.491835	-0.905380



Ilość rozwiązań **5**

1)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
2)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
3)	x =	0.000000	y =	4.000000	r =	14.000000

	sts	x	y	r
1)	3	-0.000000	-2.250000	20.250000
2)	3	0.000000	-2.250000	-20.250000
3)	2	-6.428571	-0.000000	-6.428571
4)	2	6.428571	0.000000	-6.428571
5)	0	0.000000	12.214286	5.785714
6)	2	-6.428571	0.000000	6.428571
7)	2	6.428571	0.000000	6.428571
8)	0	-0.000000	12.214286	-5.785714
9)	0	0.000000	2.250000	20.250000
10)	3	0.000000	-2.250000	-20.250000
11)	2	-6.428571	0.000000	-6.428571
12)	2	6.428571	0.000000	-6.428571
13)	0	0.000000	-7.500000	2.500000
14)	2	-6.428571	0.000000	6.428571
15)	2	6.428571	0.000000	6.428571
16)	0	0.000000	-7.500000	-2.500000



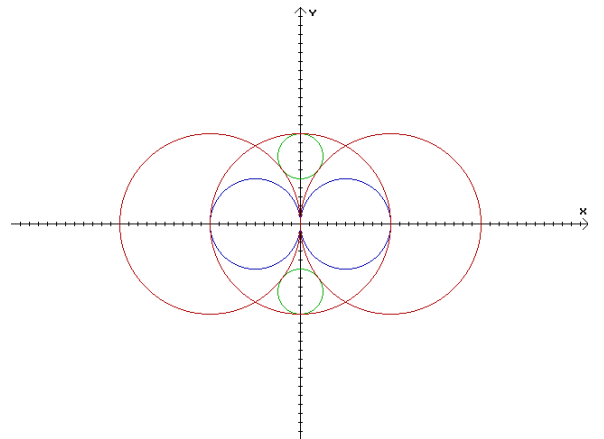
Ilość rozwiązań **4**

```

1)  x = 10.000000    y = 0.000000    r = 10.000000
2)  x = -10.000000   y = 0.000000    r = 10.000000
3)  x = 0.000000     y = 0.000000    r = 10.000000

```

	sts	x	y	r
1)	2	-2.500000	-891712726219358089-9007199254	
2)	2	-2.500000	900719925474099200.0000000000	-180190640
3)	2	-5.000000	0.000000	-5.000000
4)	2	5.000000	0.000000	-5.000000
5)	0	0.000000	7.500000	2.500000
6)	2	-5.000000	0.000000	5.000000
7)	2	5.000000	0.000000	5.000000
8)	0	0.000000	7.500000	-2.500000
9)	2	-1000.000000	-1000.000000	-1000.000000
10)	0	0.000000	9007199254740992.0000000000	2589640
11)	2	-5.000000	-0.000000	-5.000000
12)	3	5.000000	-0.000000	-5.000000
13)	0	0.000000	7.500000	2.500000
14)	2	-5.000000	0.000000	5.000000
15)	2	5.000000	0.000000	5.000000
16)	0	0.000000	-7.500000	-2.500000



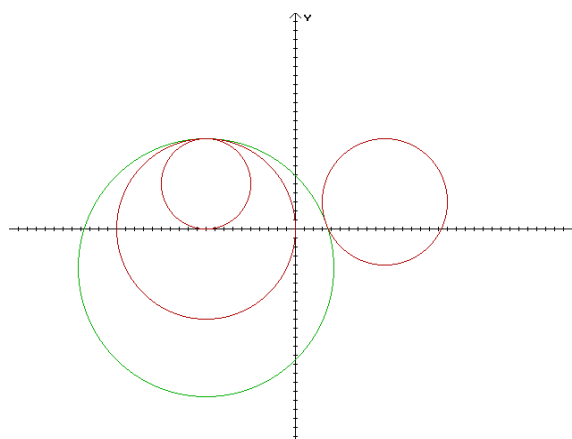
Położenie szczególne I stopnia wariant 7.b. – nie istnieje

Ilość rozwiązań **1**

Tabela rozwiązań układu równań :

1) $x = -10.000000$ $y = 0.000000$ $r = 10.000000$
 2) $x = -10.000000$ $y = 5.000000$ $r = 5.000000$
 3) $x = 10.000000$ $y = 3.000000$ $r = 7.000000$

sts	x	y	r
1)	2	-0.000000	18014398509533200.06180143985
2)	2	0.000000	-48990.000000 -49000.000
3)	3	-1.788106	-3.410796 4.470265
4)	3	-3.760205	47.602050 12.534017
5)	0	-9.999998	-4.285712 -14.285712
6)	3	-0.511392	6.164557 -1.278481
7)	3	0.406844	5.931558 1.356147
8)	0	-9.999998	-4.285711 14.285711
9)	2	-0.012979	36859511379914002.26868595113
10)	2	-0.000000	-50990.000000 -51000.000
11)	3	-5.447169	-30.853765 13.617922
12)	3	1.510865	-5.108650 -5.036217
13)	0	-10.000002	-4.285717 -14.285717
14)	3	-0.967895	2.740788 -2.419737
15)	3	1.344478	-3.444784 4.481595
16)	0	-10.000002	-4.285717 14.285717



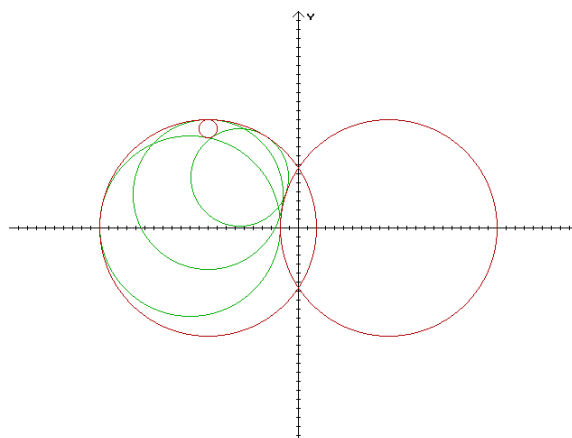
Położenie szczególne I stopnia wariant 8.b. – nie istnieje

Położenie szczególne I stopnia wariant 9.a.
 Ilość rozwiązań 3

Tabela rozwiązań układu równań :

1) $x = -10.000000$ $y = 0.000000$ $r = 12.000000$
 2) $x = 10.000000$ $y = 0.000000$ $r = 12.000000$
 3) $x = -10.000000$ $y = 11.000000$ $r = 1.000000$

sts	x	y	r
1)	2	-0.000000	-17102116198927013.8710211619
2)	2	-0.000000	-40668.500000 -40668.500
3)	0	-6.536061	5.562970 5.446717
4)	0	-9.999996	3.666670 -8.333330
5)	3	0.000000	-39.535865 -43.607271
6)	0	-6.536061	5.562970 -5.446717
7)	0	-9.999997	3.666669 8.333331
8)	3	0.000000	-11.685146 20.041277
9)	2	-0.000000	-81720157049888892.8172015704
10)	2	-0.000000	-42668.500000 -42668.500
11)	0	-11.995257	0.186490 9.996047
12)	0	-10.000004	3.666664 -8.333336
13)	3	-0.000000	9.006950 -2.532581
14)	0	-11.995257	0.186490 -9.996047
15)	0	-10.000003	3.666664 8.333336
16)	3	0.000000	2.452181 8.078924



Położenie szczególne I stopnia wariant 9.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne I stopnia wariant 10.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne I stopnia wariant 10.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne I stopnia wariant 11.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne I stopnia wariant 11.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne I stopnia wariant 12.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne I stopnia wariant 12.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne I stopnia wariant 13.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne I stopnia wariant 13.b. – nie istnieje

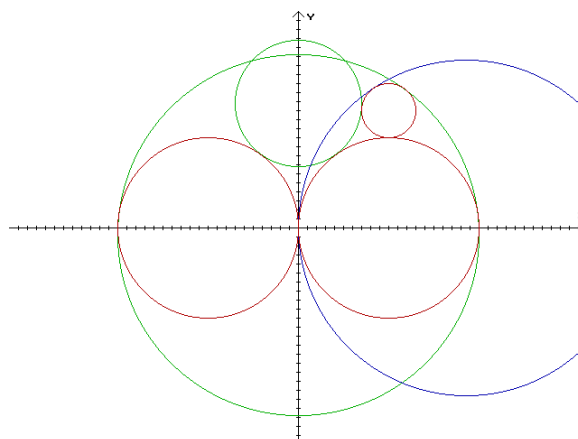
Położenie szczególne II stopnia wariant 1.a.

Ilość rozwiązań **3**

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
2)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
3)	x =	10.000000	y =	13.000000	r =	3.000000

sts	x	y	r
1)	0	0.000000	13.785831
2)	0	-0.000000	-0.785831
3)	2	18.571429	0.000000
4)	2	10.000000	0.000000
5)	2	0.000000	-48990.000000
6)	2	18.571429	0.000000
7)	2	10.000000	-0.000000
8)	2	0.000000	-91396840447204726.1396840447
9)	0	-0.000000	-0.785831
10)	0	0.000000	13.785831
11)	2	18.571429	-0.000000
12)	2	10.000000	0.000000
13)	2	-0.001275	-7176259326239.897407176259326
14)	2	18.571429	0.000000
15)	2	10.000000	-0.000000
16)	2	-0.000000	24021036591792210.162402103659



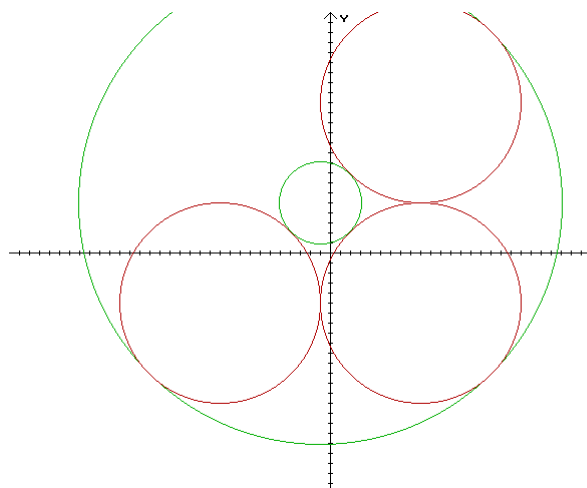
Położenie szczególne II stopnia wariant 1.b.

Ilość rozwiązań **2**

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	9.000000	y =	-5.000000	r =	10.000000
2)	x =	-11.000000	y =	-5.000000	r =	10.000000
3)	x =	9.000000	y =	15.000000	r =	10.000000

sts	x	y	r
1)	0	-1.000000	5.000000
2)	0	-1.000000	5.000000
3)	0	8.999996	-4.999996
4)	2	-76193761530421781.8	5.030216
5)	2	-1.000000	-99187.600000
6)	0	9.000004	-5.000004
7)	2	-70943886264.606836	5.000066
8)	2	-1.000000	-55728349588269981.5572834958
9)	0	-1.000000	5.000000
10)	0	-1.000000	5.000000
11)	0	9.000004	-5.000004
12)	2	576460752303425330.0851079888211148	806576460752
13)	2	-1.000000	-100787.600000
14)	0	8.999996	-4.999996
15)	2	503962.000000	5.000000
16)	2	0.006250	-5949353006406.85599949352982

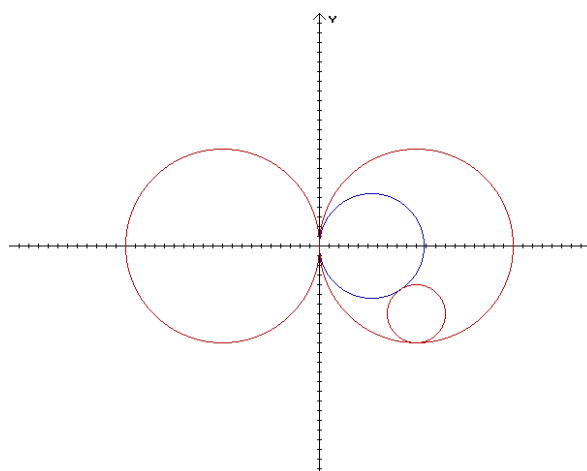


Położenie szczególne II stopnia wariant 2.a.
Ilość rozwiązań 1

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
2)	x =	10.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
3)	x =	10.000000	y =	-7.000000	r =	3.000000

	sts	x	y	r
1)	2	-0.000686	-3864139578128.00985386413957	
2)	2	0.000000	243.731343	-253.73134
3)	0	10.000000	-0.000000	-10.000000
4)	2	5.384615	0.000000	5.384615
5)	3	-0.000000	340.748905	-189.86474
6)	2	10.000000	0.000000	10.000000
7)	2	5.384615	-0.000000	-5.384615
8)	3	0.000000	-2.774411	3.890702
9)	2	-0.000000	48990.000000	49000.0000
10)	2	-0.000000	-256.231156	246.231156
11)	0	10.000000	-0.000000	-10.000000
12)	2	5.384615	0.000000	5.384615
13)	3	0.000000	10.150093	-10.850050
14)	2	10.000000	0.000000	10.000000
15)	2	5.384615	-0.000000	-5.384615
16)	3	0.000000	7.918068	9.648190



Położenie szczególne II stopnia wariant 2.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 3.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 3.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 4.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 4.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 5.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 5.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 6.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 6.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 7.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 7.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 8.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne II stopnia wariant 8.b. – nie istnieje

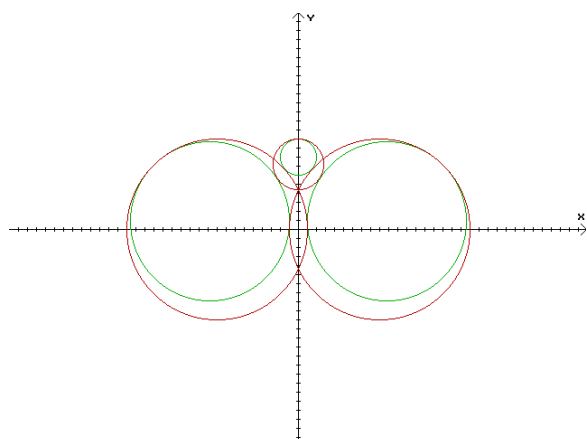
Położenie szczególne III stopnia wariant 1.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne III stopnia wariant 1.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne III stopnia wariant 2.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne III stopnia wariant 2.b. – nie istnieje

Położenie szczególne V stopnia wariant 1.a.
Ilość rozwiązań 3

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	9.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
2)	x =	-9.000000	y =	0.000000	r =	10.000000
3)	x =	0.000000	y =	7.179449	r =	2.820551

	sts	x	y	r
1)	0	0.000000	4.358899	-0.000000
2)	0	0.000000	4.358899	0.000000
3)	0	0.000000	4.358899	0.000000
4)	0	-0.000000	4.358899	0.000000
5)	0	0.000000	7.975000	2.025000
6)	0	9.784925	0.899165	-8.806432
7)	0	-0.000000	4.358899	-0.000000
8)	0	0.000000	7.975000	-2.025000
9)	0	-0.000000	4.358899	-0.000000
10)	0	0.000000	4.358899	0.000000
11)	0	9.784925	0.899165	8.806432
12)	0	-9.784925	0.899165	8.806432
13)	0	0.000000	4.358899	0.000000
14)	0	0.000000	4.358899	-0.000000
15)	0	-9.784925	0.899165	-8.806432
16)	0	0.000000	4.358899	-0.000000



Położenie szczególne V stopnia wariant 1.b. – nie istnieje
 Położenie szczególne VI stopnia wariant 1.a. – nie istnieje
 Położenie szczególne VI stopnia wariant 1.b. – nie istnieje

Nr wariantu	PO	PO a	PO b	PS I	PS I a	PS I b	PS II	PS II a	PS II a	PS III	PS III a	PS III b	PS IV	PS V	PS V a	PS V b	PS VI	PS IV a	PS IV b
1	8	7	6	6	5	4	4	3	2	2	-	-	∞	4	3	-	0	-	-
2	8	7	-	2	-	-	2	1	-	2	-	-	∞	2	-	-			
3	8	-	-	4	3	2	4	-	-										
4	4	3	2	6	5	4	2	-	-										
5	4	3	2	6	-	-	4	-	-										
6	4	-	-	6	-	-	4	-	-										
7	4	-	-	4		-	4	-	-										
8	4	-	-	2	1	-	4	-	-										
9	8	-	-	4	3	-													
10	8	-	-	4	-	-													
11	0	-	-	2	-	-													
12	0	-	-	6	-	-													
13	8	-	-	2	-	-													
14	8	7	6																
Wszystkie występujące rozwiązania	0, 4, 8	3, 7	2, 6	2, 4, 6	1, 3, 5	2, 4	2, 4	1, 3	2	2	-	-	∞	2, 4	3	-	0	-	-

Tab. 2.

3.10. Podsumowanie.

Tabela 2 przedstawia ilość rozwiązań zagadnienia Apolloniusza we wszystkich wariantach, razem z ich modyfikacjami polegającymi na takim dobraniu położenia i promieni okręgów, że:

- a) istnieje jedna prosta styczna do wszystkich trzech okręgów,
- b) istnieją dwie proste styczne do wszystkich trzech okręgów.

Jak widać w żadnym przypadku ilość rozwiązań nie przekroczyła ośmiu, tak więc doświadczalnie udało nam się potwierdzić hipotezę 3.8.1. – ilość rozwiązań należy do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, oraz hipotezę 3.8.2. i 3.8.3.

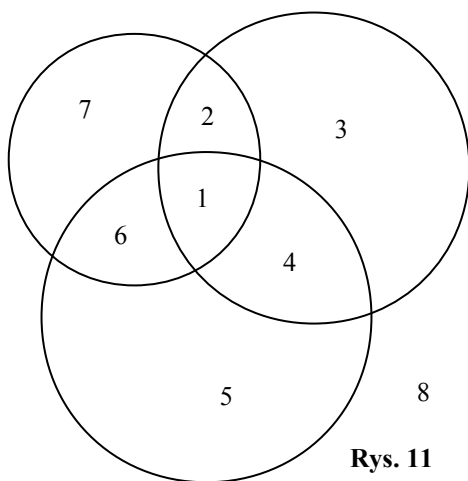
4. Rozpatrzenie wszystkich obszarów jakie powstają w wyniku podziału płaszczyzny przez trzy okręgi.

4.1. Wstęp.

Jak widać z tabeli Tab. 2 udało nam się znaleźć 64 różne układy trzech okręgów, różniące się ich wzajemnym położeniem. Jest to jednak, po pierwsze bardzo dużo (niektóre na pierwszy rzut oka trudno rozpoznać), po drugie nie mamy całkowitej pewności, że podana tabela wyczerpuje wszystkie możliwości. Warto wprowadzić jakąś inną klasyfikację, która pomoże nam we wskazaniu ilości rozwiązań dowolnego układu.

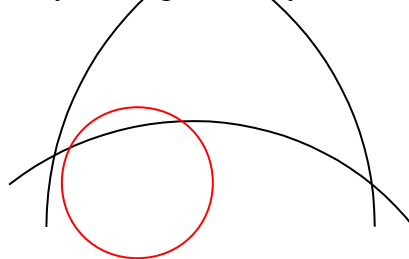
Podczas pracy nad poprzednim rozdziałem nasunął mi się pomysł aby zbadać zagadnienie Apolloniusza pod kątem obszarów jakie powstają w wyniku podziału płaszczyzny przez trzy okręgi oraz ilości możliwych rozwiązań w danym obszarze. Ponieważ granicą każdego obszaru są łuki będące fragmentami danych trzech okręgów, każdy okrąg Apolloniusza musi być zawarty w jednym z obszarów, na które te trzy okręgi dzielą płaszczyznę ponieważ nie przecina się on z żadnym z danych okręgów.

Oto przykład:



Rys. 11

Na rysunku 11 płaszczyzna została podzielona przez okręgi na 8 obszarów, 7 z nich to obszary zamknięte między przecinającymi się okręgami, obszar 8 to obszar otwarty zawierający cały układ. Ponieważ każdy z obszarów 1 – 8 jest ograniczony trzema łukami, z których każdy jest fragmentem innego okręgu nazwijmy go umownie trójkątem. Znalezienie rozwiązania w trójkącie sprowadza się do wykreślenia okręgu stycznego do każdej ze ścian. Jak widać (rys. 12) istnieje tylko jeden okrąg styczny w trójkącie, co daje w sumie osiem okręgów stycznych w figurze na rys. 11.



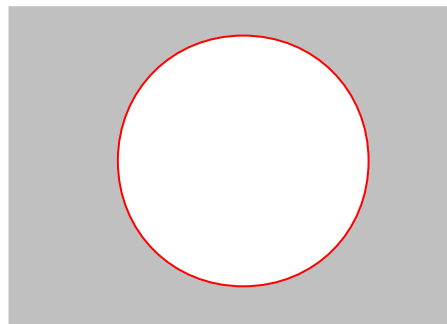
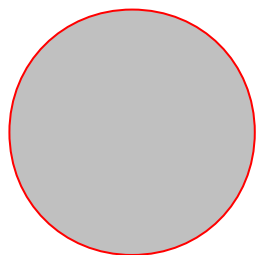
Rys. 12

Zatem jeżeli znajdziemy wszystkie obszary występujące we wszystkich możliwych położeniach trzech okręgów na płaszczyźnie, będzie to swego rodzaju katalog umożliwiający i ułatwiający określenie ilości rozwiązań zagadnienia Apolloniusza dla dowolnej konfiguracji okręgów.

Ponieważ jak pamiętamy z rozdziału 1 inwersja jest przekształceniem nie zmieniającym ilości rozwiązań zagadnienia Apolloniusza, obszary powstające z innych obszarów po przekształceniu przez inwersję będziemy traktować jako tą samą klasę obszarów.

4.2. O B S Z A R Y:

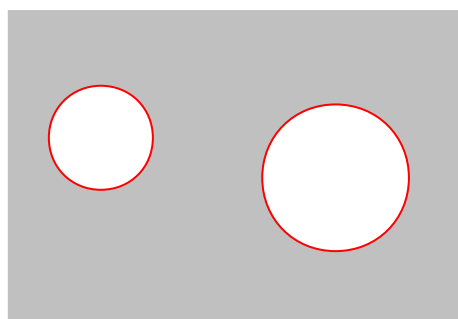
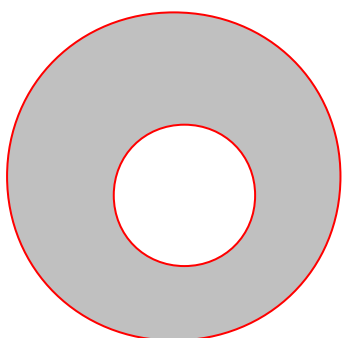
1. Obszar ograniczony okręgiem. Ilość rozwiązań 0



Dowód: wynika z poniższej obserwacji.

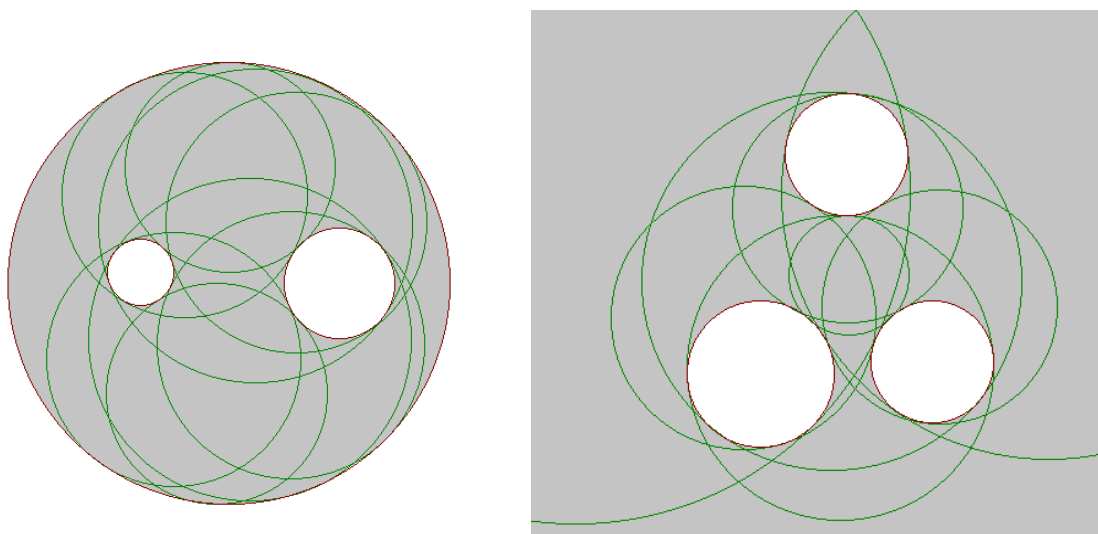
Obserwacja 1. *Aby w obszarze mógł istnieć okrąg styczny do trzech danych okręgów, musi on (obszar) zawierać przynajmniej po jednym punkcie należącym do każdego z tych okręgów.*

2. Obszar między dwoma okręgami. Ilość rozwiązań 0



Dowód: wynika z obserwacji 1.

3. Obszar między trzema okręgami. Ilość rozwiązań 8.



Dowód:

Przekształćmy obszar S przez inwersję $I(O, r)$ taką, że okrąg $K1$ pozostaje niezmienny, $K2$ przekształca się na okrąg $K2'$ współśrodkowy do $K1'$, a okrąg $K3$ na $K3'$ leżący w pierścieniu S' .

Następnie wprowadźmy układ współrzędnych, taki że środek okręgów $K1'$ i $K2'$ leży w środku układu współrzędnych a środek okręgu $K3'$ leży na osi OX .

Oznaczmy:

α - kąt pod jakim nachylona jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i środek okręgu K do osi OX ,

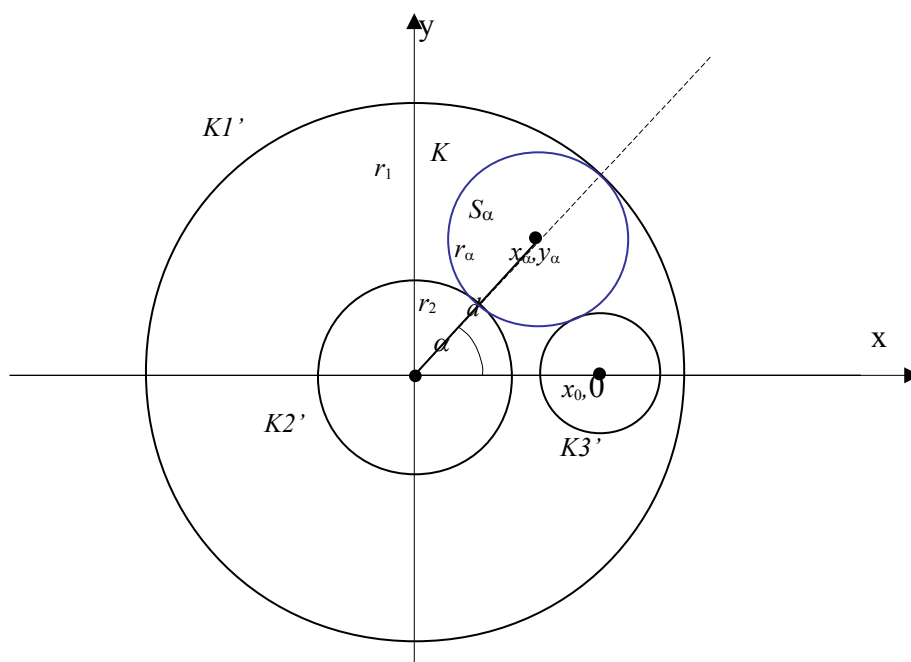
$(x_0, 0)$ – środek okręgu $K3'$,

r_0 – promień okręgu $K3'$,

r_1 – promień okręgu $K1'$,

r_2 – promień okręgu $K2'$,

d – odległość środka szukanego okręgu od początku układu współrzędnych,



Wówczas dane szukanego okręgu możemy zapisać w postaci uzależnionej od parametru α :

$$S_\alpha = \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \cos \alpha, \frac{r_1 + r_2}{2} \sin \alpha \right) \quad r_\alpha = \frac{r_1 - r_2}{2}$$

Są to współrzędne środka i promień okręgu stycznego zewnętrznie do $K1'$ i $K2'$,

$$S_\alpha = \left(\frac{r_1 - r_2}{2} \cos \alpha, \frac{r_1 - r_2}{2} \sin \alpha \right) \quad r_\alpha = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

To współrzędne środka i promień okręgu stycznego wewnętrznie do $K2'$ i zewnętrznie do $K1'$,

Zapiszmy teraz warunek na styczność zewnętrzną szukanego okręgu K oraz okręgu $K3'$:

$$|S_\alpha O| = r_\alpha + r_o$$

Podstawiając S_α i r_α :

$$\sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2} \cos \alpha - x_0 \right)^2 + \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \sin \alpha - 0 \right)^2} = \frac{r_1 - r_2}{2} + r_o$$

Wyliczamy

$$\left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right)^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2 \frac{r_1 + r_2}{2} x_0 \cos \alpha + x_0^2 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2} - r_o \right)^2 = 0$$

$$-(r_1 + r_2)x_0 \cos \alpha + r_1 r_2 + x_0^2 - r_o^2 - (r_1 - r_2)r_o = 0$$

$$\cos \alpha = \frac{-r_1 r_2 + r_1 r_o - r_2 r_o + r_o^2 - x_0^2}{-(r_1 + r_2)x_0}$$

jest to równanie trygonometryczne

$$\cos \alpha = c$$

gdzie

$$|c| < 1$$

Dowód:

$$1) \quad c < 1$$

$$\frac{-r_1 r_2 + r_1 r_o - r_2 r_o + r_o^2 - x_0^2}{r_1 r_2 - r_1 r_o + r_2 r_o - r_o^2 + x_0^2} < 1$$

$$r_1 r_2 - r_1 r_o + r_2 r_o - r_o^2 + x_0^2 - (r_1 + r_2)x_0 < 0$$

następnie wyciągamy odpowiednie czynniki przed nawias:

$$r_2(r_1 + r_0 - x_0) - (x_0 + r_0)(r_1 + r_0 - x_0) < 0$$

ostatecznie obliczamy:

$$(r_1 + r_0 - x_0)(r_2 - x_0 - r_0) < 0$$

Ponieważ $r_1 + r_0 - x_0 > 0$ i $r_2 - r_0 - x_0 < 0$ nierówność ta jest zawsze prawdziwa.

2) $c > -1$

$$\frac{-r_1 r_2 + r_1 r_0 - r_2 r_0 + r_0^2 - x_0^2}{-(r_1 + r_2)x_0} > -1$$

postępując analogicznie jak w punkcie 1 przekształcamy nierówność:

$$r_1 r_2 - r_1 r_0 + r_2 r_0 - r_0^2 + x_0^2 + (r_1 + r_2)x_0 > 0 \Leftrightarrow r_2(r_1 + r_0 + x_0) + (x_0 - r_0)(r_1 + r_0 + x_0) > 0$$

otrzymując postać

$$(r_1 + r_0 + x_0)(r_2 - x_0 - r_0) > 0$$

Ponieważ $r_1 + r_0 + x_0 > 0$ i $r_2 - x_0 - r_0 > 0$ zawsze prawdziwe nierówność ta jest zawsze prawdziwa.

Tak więc równanie

$$\cos \alpha = \frac{-r_1 r_2 + r_1 r_0 - r_2 r_0 + r_0^2 - x_0^2}{-(r_1 + r_2)x_0}$$

Posiada dokładnie dwa rozwiązania, a co za tym idzie istnieją dwa okręgi styczne zewnętrznie do $K1'$, $K2'$ i $K3'$.

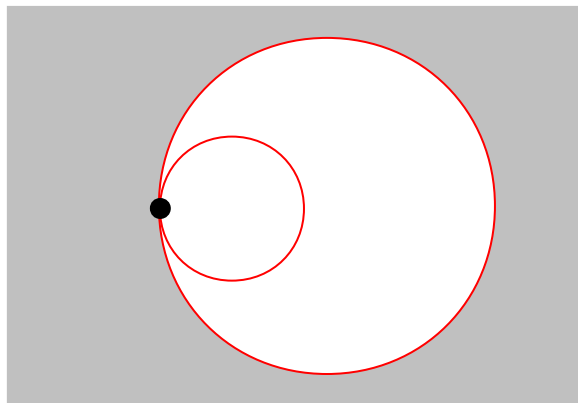
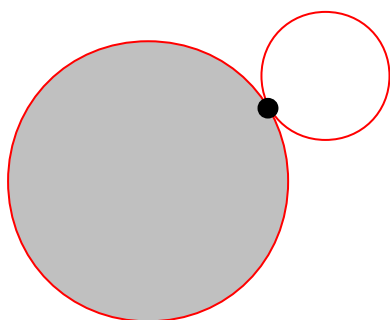
Analogicznie postępujemy w przypadku:

- styczności zewnętrznej do $K1'$ i $K2'$ i wewnętrznej do $K3'$,
- styczności wewnętrznej do $K2'$ i zewnętrznej do $K3'$ i $K2'$,
- styczności wewnętrznej do $K2'$ i $K3'$, zewnętrznej do $K1'$.

W pozostałych przypadkach również otrzymamy równania trygonometryczne, które mają po dwa rozwiązania.

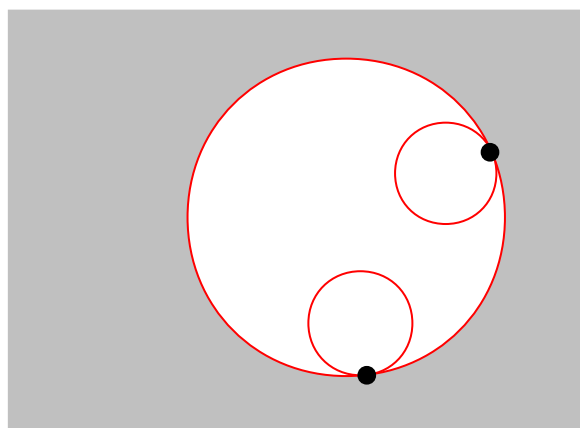
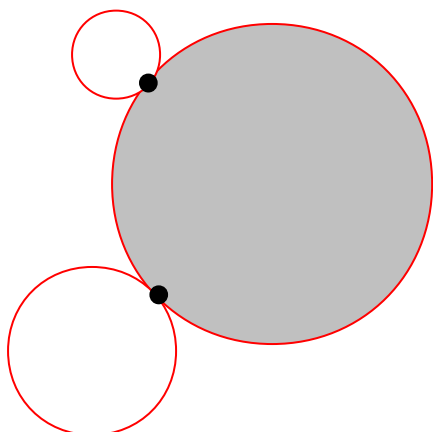
Ostatecznie w obszarze (3) istnieje osiem okręgów Apolloniusza.

4. Obszar ograniczony okręgiem z punktem styczności. Ilość rozwiązań **0**



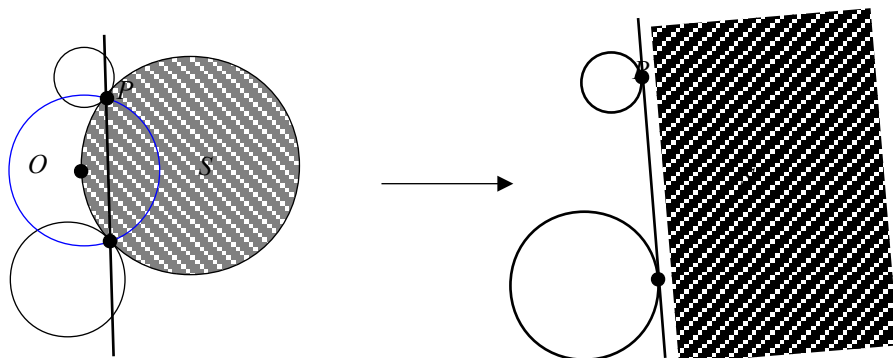
Dowód: wynika z obserwacji 1.

5. Obszar ograniczony okręgiem z dwoma punktami styczności.
Ilość rozwiązań **0**

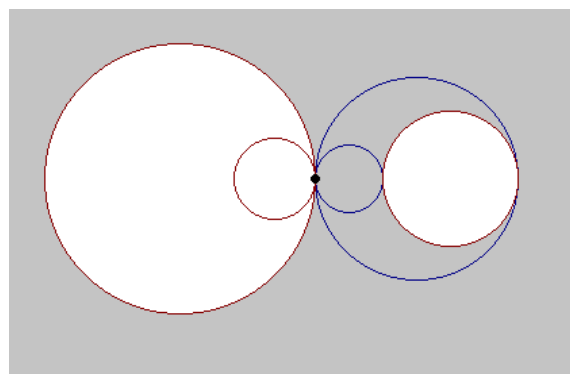
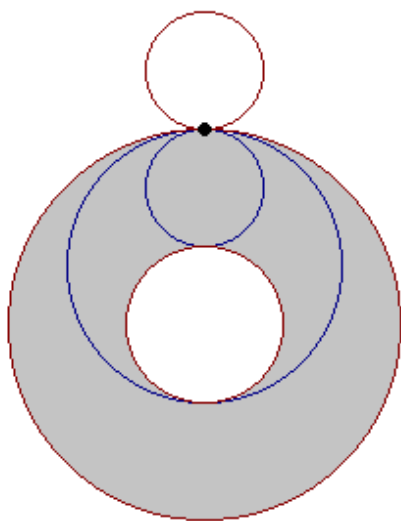


Dowód:

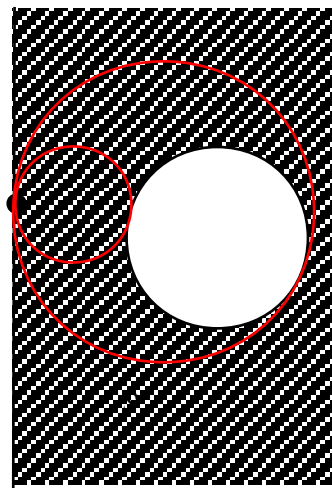
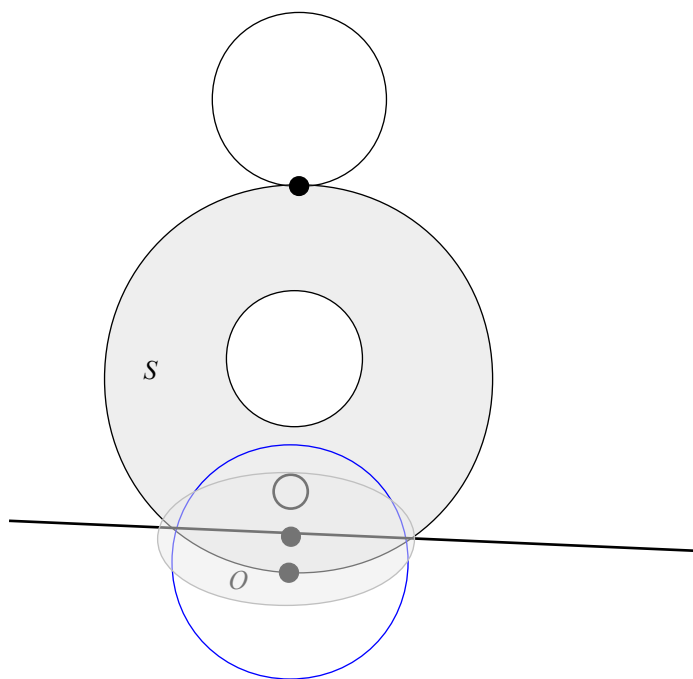
Przekształćmy obszar S przez inwersję $I(O, r)$ taką, że punkt O leży na okręgu $K3$, zaś $|OP| = |OR| = r$, gdzie P i R są punktami styczności okręgów $K1$ i $K2$ do okręgu $K3$. Wówczas okrąg $K3$ przekształci się na prostą $K3'$, natomiast punkty P i R pozostaną bez zmian. Jak wiadomo okrąg może być styczny do prostej tylko w jednym punkcie, a więc nie istnieje żaden okrąg styczny do prostej $K3'$ w punkcie P i w punkcie R .



6. Obszar między dwoma okręgami, z których jeden zawiera punkt styczności.
Ilość rozwiązań 2



Dowód:



Przekształćmy obszar S przez inwersję $I(O, r)$ taką, że punkt O leży na okręgu $K1$. Wówczas obszar S przekształci się w S' , okrąg $K1$ na prostą $K1'$, punkt P leżący na okręgu $K1$ w punkt P' na prostej $K1'$, a okrąg $K2$ na okrąg $K2'$ leżący w obszarze S i nie mający punktów wspólnych z prostą $K1'$.

Następnie wprowadźmy układ współrzędnych, taki że prosta KI' pokrywa się z osią OX , a punkt P leży w środku układu współrzędnych. Wówczas środki wszystkich okręgów stycznych do KI' i $K3'$ leżą na osi OY .

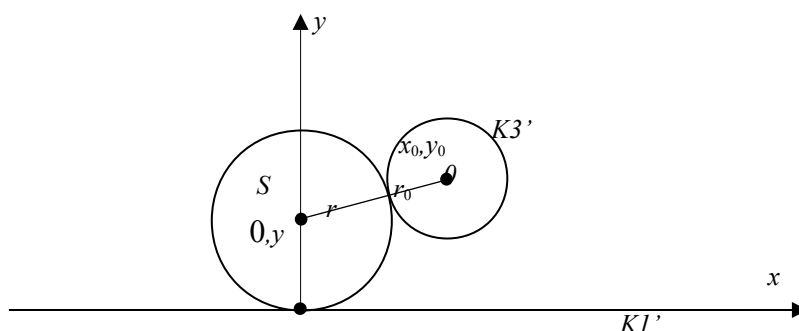
Oznaczmy:

$O(x_0, y_0)$ – środek okręgu $K3'$,

r_0 – promień okręgu $K3'$,

$S(0, y)$ – współrzędne środka okręgu stycznego do $K3'$ i KI' w punkcie P ,

r – promień okręgu stycznego do $K3'$ i KI' w punkcie P .



Jak widać:

$$r = y$$

Zapiszmy teraz warunek na styczność zewnętrzną szukanego okręgu K oraz okręgu $K3'$:

$$|SO| = y + r_0$$

Podstawiając $r = y$:

$$\sqrt{x_0^2 + (y_0 - y)^2} = y + r_0$$

wyliczamy:

$$y(-2y_0 - 2r_0) + x_0^2 + y_0^2 - r_0^2 = 0$$

jest to równanie liniowe postaci:

$$ay + b = 0$$

ma ono dokładnie jedno rozwiązanie ponieważ

$$a = -2(y_0 + r_0) \neq 0$$

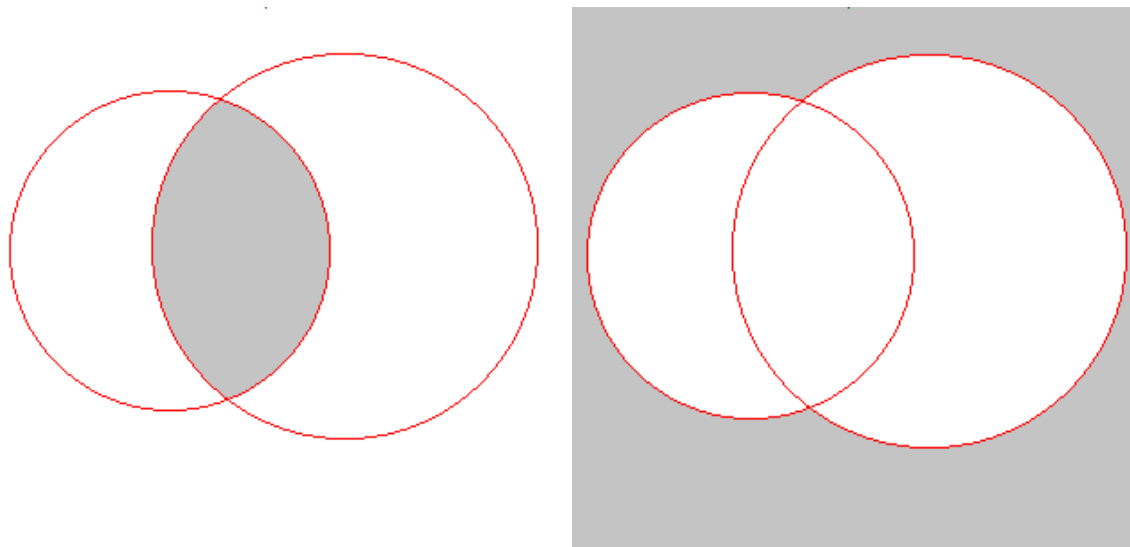
Analogicznie postępujemy w przypadku styczności wewnętrznej:

$$|SO| = r - r_0$$

W tym przypadku również otrzymamy równanie liniowe, które ma dokładnie jedno rozwiązanie.

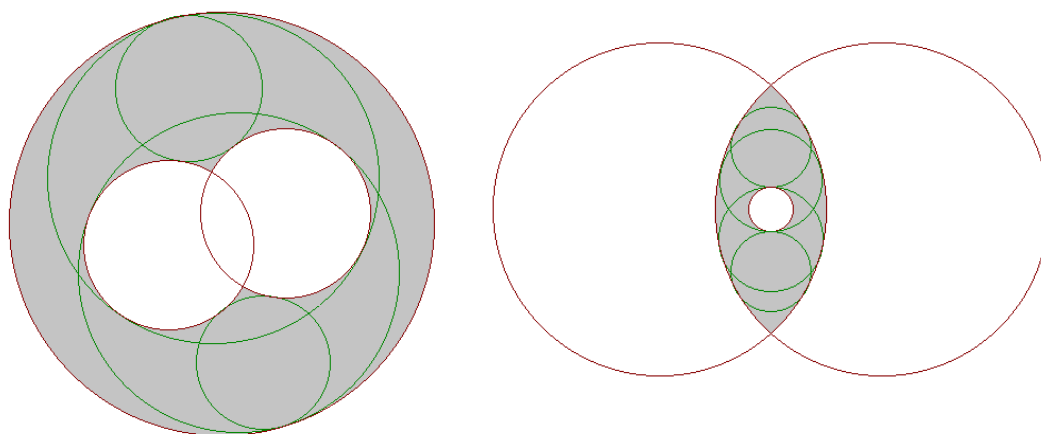
Ostatecznie w obszarze (7) istnieją dokładnie dwa okręgi Apolloniusza, jeden styczny zewnętrznie, oraz jeden styczny wewnętrznie do okręgu K_3' .

7. Dwókat z przecięcia. Ilość rozwiązań **0**

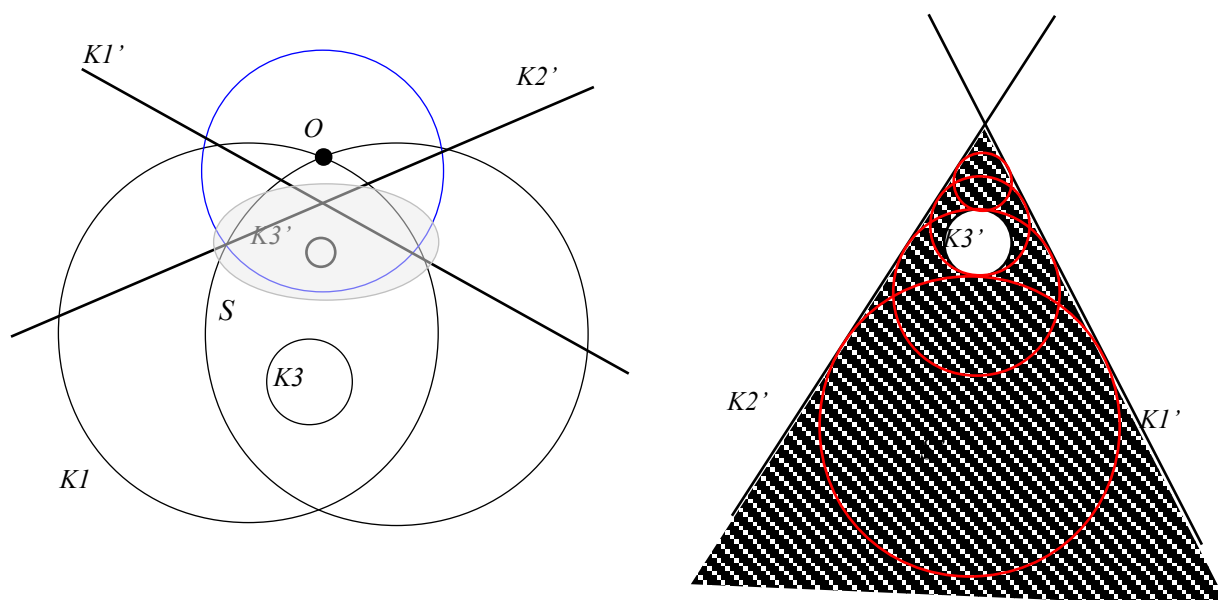


Dowód: wynika z obserwacji 1.

8. Obszar między okręgiem i dwókatem z przecięcia. Ilość rozwiązań 4



Dowód:



Przekształćmy obszar S przez inwersję $I(O, r)$ taką, że punkt O leży w punkcie przecięcia okręgów $K1$ i $K2$. Wówczas obszar S przekształci się na obszar S' , okrąg $K1$ na prostą $K1'$, okrąg $K2$ na prostą $K2'$ przecinającą prostą $K1'$ pod takim samym kątem pod jakim przecinają się okręgi $K1$ i $K2$, a okrąg $K3$ na okrąg $K3'$ nie mający punktów wspólnych z prostą $K1'$, ani $K2'$, leżący w obszarze S . Następnie wprowadźmy układ współrzędnych, taki że prosta $K2'$ pokrywa się z osią OX . Wówczas środki wszystkich okręgów stycznych do $K1'$ i $K2'$ leżą na dwusiecznej kąta $K1' O K2'$. Układ możemy tak dobrać aby punkt S_0 nie leżał powyżej dwusiecznej kąta $K1' O K2'$.

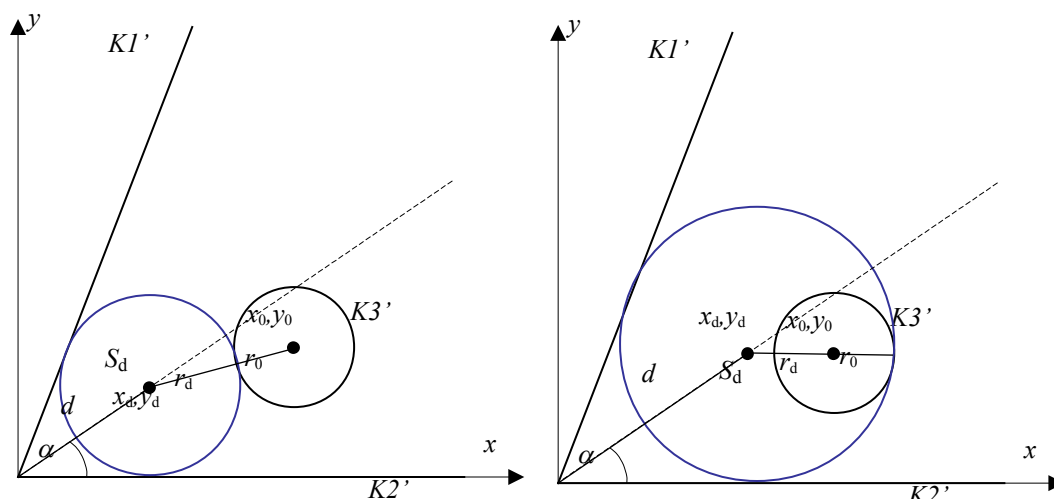
Oznaczmy:

α - kąt pod jakim nachylona jest dwusieczna do osi OX ,

(x_0, y_0) - środek okręgu $K3'$,

r_0 - promień okręgu $K3'$,

d - odległość środka szukanego okręgu od początku układu współrzędnych,



Wówczas dane szukanego okręgu możemy zapisać w postaci uzależnionej od parametru d :

$S_d = (x_\alpha, y_\alpha) = (d \cos \alpha, d \sin \alpha)$ – współrzędne środka szukanego okręgu,
 $r_d = d \sin \alpha$ - promień szukanego okręgu.

Zapiszmy teraz warunek na styczność zewnętrzną szukanego okręgu K oraz okręgu $K3'$:

$$|S_d O| = r_d + r_0$$

Podstawiając S_d i r_d :

$$\sqrt{(d \cos \alpha - x_0)^2 + (d \sin \alpha - y_0)^2} = r_d + r_0$$

wyliczamy

$$d^2 \cos^2 \alpha - d(2 \cos \alpha x_0 + 2 \sin \alpha y_0 + 2 \sin \alpha r_0) + x_0 + y_0 - r_0 = 0$$

jak widać jest to równanie kwadratowe postaci

$$ad^2 + bd + c = 0$$

w celu ustalenia ilości rozwiązań sprawdzmy deltę

$$\Delta = (2 \cos \alpha x_0 + 2 \sin \alpha y_0 + 2 \sin \alpha r_0)^2 - 4 \cos^2 \alpha (x_0 + y_0 - r_0) =$$

$$4 \cos^2 \alpha x_0^2 + 4 \sin^2 \alpha (y_0 + r_0)^2 - 4 \cos^2 \alpha x_0 + 4 \cos^2 \alpha y_0 - 4 \cos^2 \alpha r_0 =$$

$$4 \cos^2 \alpha (x_0^2 - x_0) + 4 \sin^2 \alpha (y_0 + r_0)^2 + 4 \cos^2 \alpha (y_0 - r_0) > 0$$

ponieważ $r_0 < y_0$, a więc równanie to ma dwa rozwiązania.

Analogicznie postępujemy w przypadku styczności wewnętrznej

$$|S_d O| = r_d - r_o$$

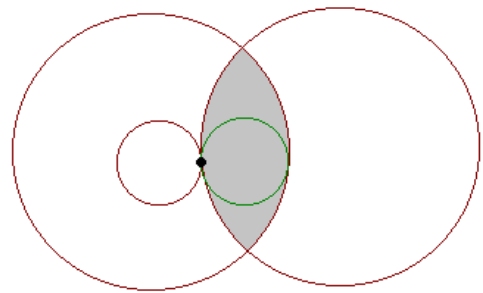
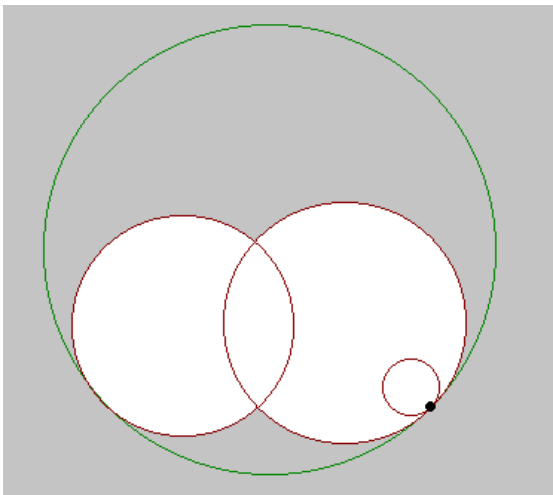
$$\sqrt{(d \cos \alpha - x_0)^2 + (d \sin \alpha - y_0)^2} = r_d - r_o$$

$$d^2 \cos^2 \alpha - d(2 \cos \alpha x_0 + 2 \sin \alpha y_0 - 2 \sin \alpha r_0) + x_0 + y_0 - r_0 = 0$$

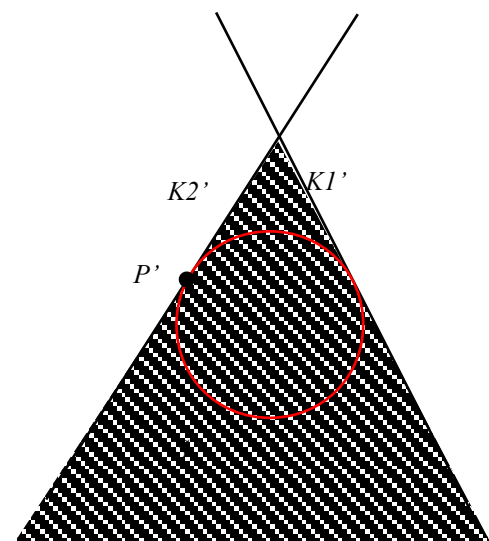
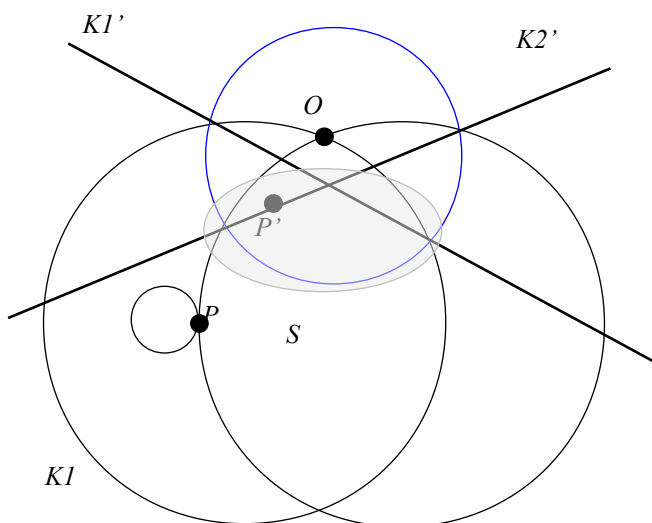
W tym przypadku również otrzymaliśmy równanie kwadratowe mające dwa rozwiązania.

Ostatecznie w obszarze (9) istnieją cztery okręgi Apolloniusza, dwa styczne zewnętrznie, oraz dwa styczne wewnętrznie do okręgu $K3'$.

9. Dwókat z przecięcia z punktem styczności. Ilość rozwiązań 1



Dowód:



Przekształćmy obszar S przez inwersję $I(O, r)$ taką, że punkt O leży w punkcie przecięcia okręgów $K1$ i $K2$. Wówczas obszar S przekształci się na obszar S' , okrąg $K1$ na prostą $K1'$, okrąg $K2$ na prostą $K2'$ przecinającą prostą $K1'$ pod takim samym kątem pod jakim przecinają się okręgi $K1$ i $K2$, a punkt P na punkt P' leżący na prostej $K2'$.

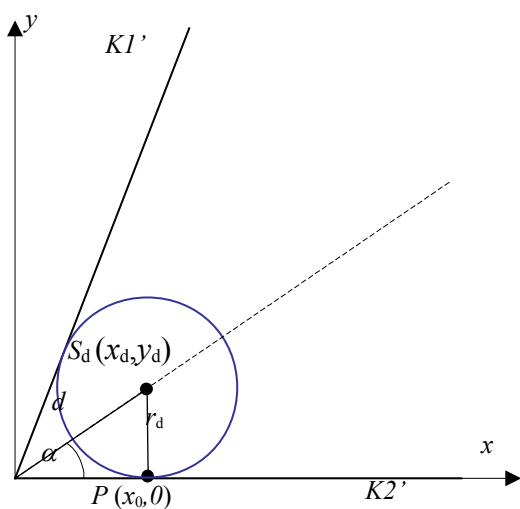
Następnie wprowadźmy układ współrzędnych, taki jak w obszarze (9)

Oznaczmy:

α - kąt pod jakim nachylona jest dwusieczna do osi OX ,

$(x_0, 0)$ - współrzędne punktu P ,

d - odległość środka szukanego okręgu od początku ukł. współrzędnych,



Wówczas dane szukanego okręgu możemy zapisać w postaci uzależnionej od parametru d :

$S_d = (x_\alpha, y_\alpha) = (d \cos \alpha, d \sin \alpha)$ - współrzędne środka szukanego okręgu,

$r_d = d \sin \alpha$ - promień szukanego okręgu.

Warunek na styczność zewnętrzną szukanego okręgu K do prostej $K2'$ w punkcie P możemy zapisać w następujący sposób:

$$d^2 = x_0^2 + r_d^2$$

Podstawiając x_0 i r_d otrzymujemy:

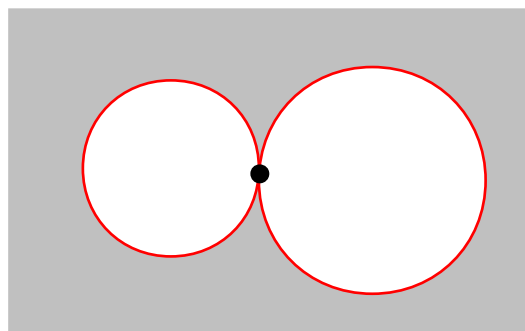
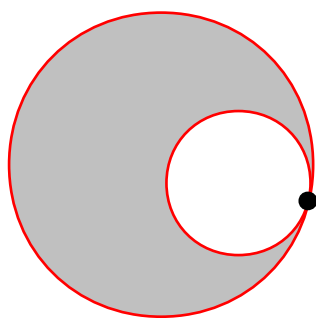
$$d^2(1 - \sin^2 \alpha) - x_0^2 = 0$$

jest to równanie kwadratowe postaci

$$ad^2 + c = 0$$

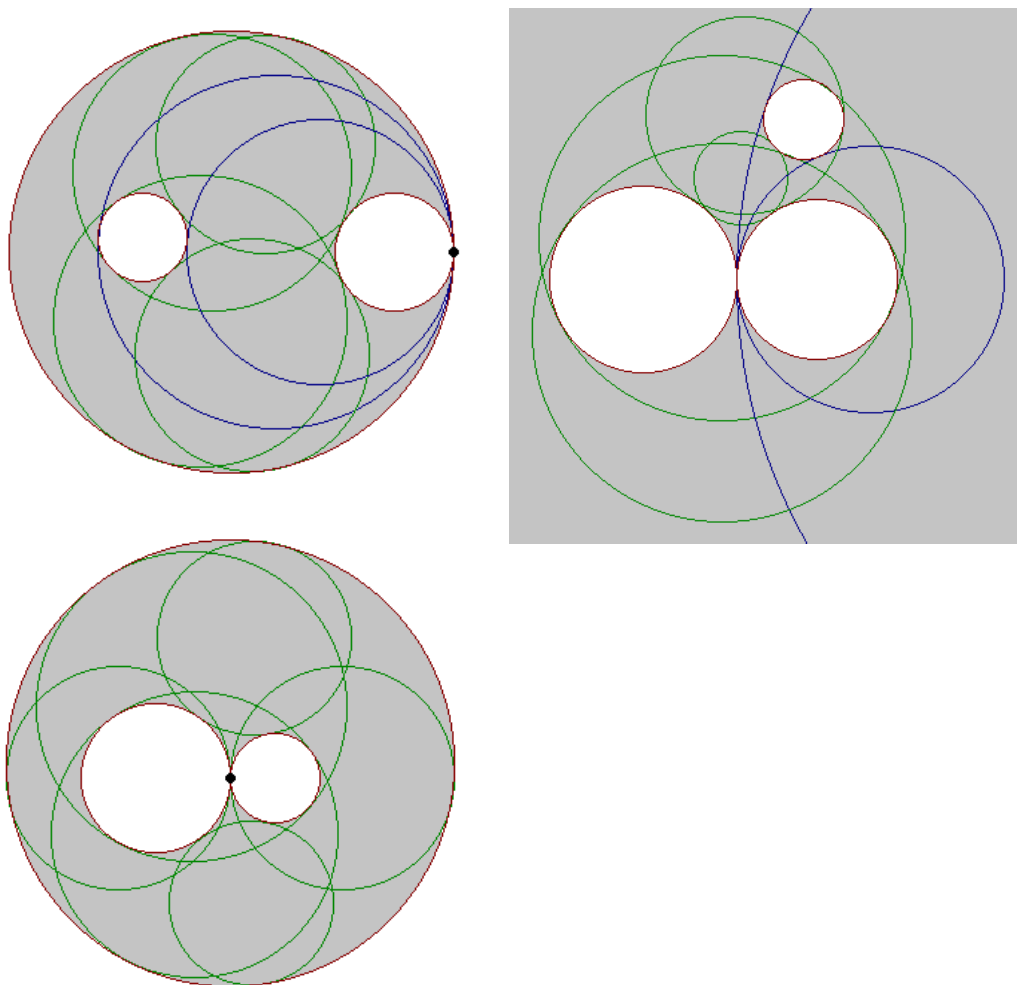
mogące mieć tylko jedno rozwiązanie większe od zera, wobec czego w obszarze (10) może istnieć tylko jeden okrąg Apolloniusza.

10. Dwókat ze styczności. Ilość rozwiązań **0**

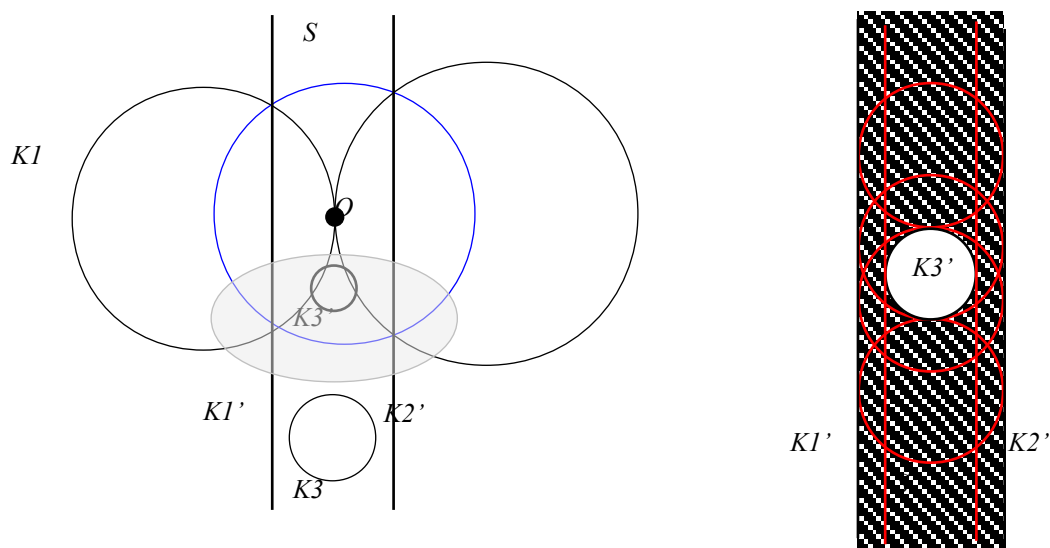


Dowód: wynika z obserwacji 1.

11. Obszar między okręgiem a dwókatem ze styczności. Ilość rozwiązań 6



Dowód:



Przekształćmy obszar S przez inwersję $I(O, r)$ taką, że punkt O leży w punkcie styczności okręgów $K1$ i $K2$. Wówczas obszar S przekształci się na obszar S' , okrąg $K1$ na prostą $K1'$, okrąg $K2$ na prostą $K2'$ prostopadłą do $K1'$, a okrąg $K3$ na okrąg $K3'$, leżący w obszarze S między prostymi $K1'$ i $K2'$.

Następnie wprowadźmy układ współrzędnych, taki że prosta $K2'$ pokrywa się z osią OX , a środek okręgu $K3'$ leży w na osi OY .

Oznaczmy:

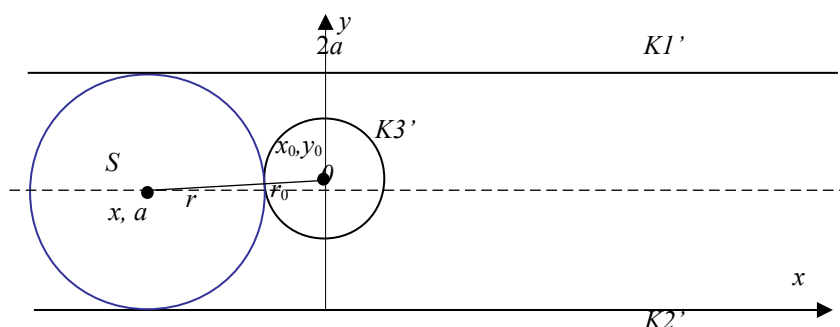
$O(0, y_0)$ – środek okręgu $K3'$,

r_0 – promień okręgu $K3'$,

$y = 2a$ – równanie prostej $K1'$

$S(x_0, a)$ – współrzędne środka okręgu stycznego do $K1'$, $K2'$ i $K3'$,

$r = a$ – promień okręgu stycznego do $K1'$, $K2'$ i $K3'$,



Zapiszmy teraz warunek na styczność zewnętrzną szukanego okręgu K oraz okręgu $K3'$:

$$|SO| = a + r_0$$

wyliczamy:

$$\sqrt{x_0^2 + (a - y_0)^2} = a + r_0$$

$$x^2 - (y_0 + r_0) \cdot (2a + y_0 - r_0) = 0$$

jak widać jest to równanie kwadratowe postaci:

$$x^2 + c = 0$$

które ponieważ $c < 0$ bo $r_0 < y_0$, ma dwa rozwiązania.

Analogicznie postępujemy w przypadku styczności wewnętrznej:

$$|SO| = a - r_0$$

wyliczamy:

$$\sqrt{x_0^2 + (a - y_0)^2} = a - r_0$$

$$x^2 - (y_0 - r_0) \cdot (2a + y_0 + r_0) = 0$$

jest to również równanie kwadratowe postaci:

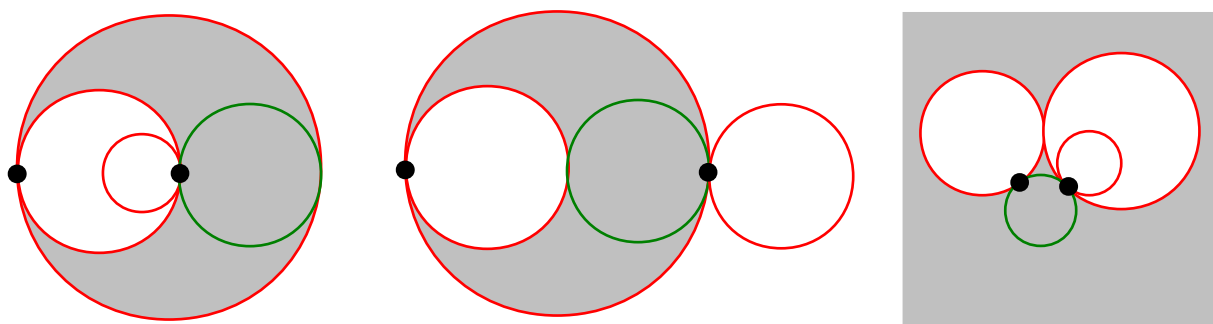
$$x^2 + c = 0$$

które ponieważ $c < 0$ bo $r_0 < y_0$ ma dwa rozwiązania.

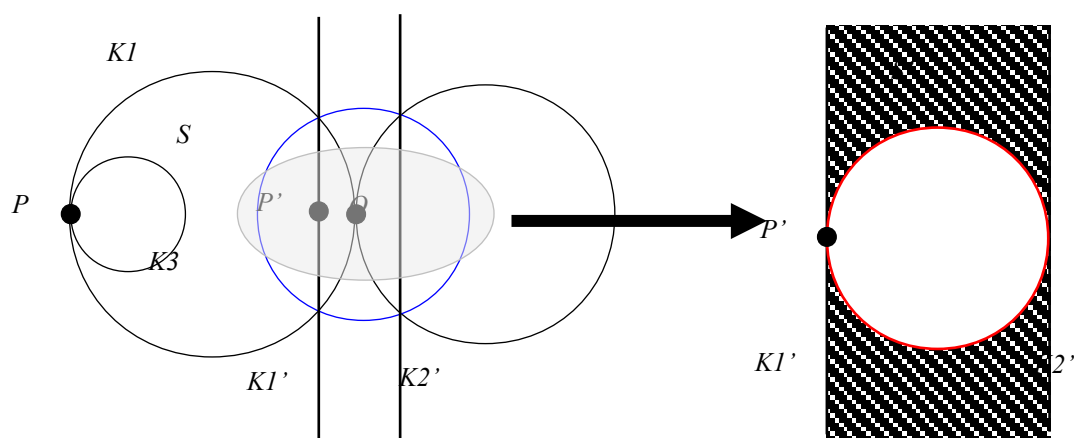
Uwaga: Okręgi styczne do $K1$ i $K2$ w punkcie O oraz do $K3$, mogą istnieć co najmniej dwa takie okręgi, przekształcają się na proste równoległe do $K1'$ i $K2'$ oraz styczne do $K3'$. Wynika to z III i V własności inwersji (str. 4).

Ostatecznie w obszarze 11 istnieje sześć okręgów Apolloniusza.

12. Dwókat ze styczności z punktem styczności. Ilość rozwiązań 1



Dowód:



Przekształćmy obszar S przez inwersję $I(O, r)$ taką, że punkt O leży w punkcie styczności okręgów $K1$ i $K2$. Wówczas obszar S przekształci się na obszar S' , okrąg $K1$ na prostą $K1'$, okrąg $K2$ na prostą $K2'$ prostopadłą do $K1'$, a punkt P na punkt P' , leżący w na prostej $K1'$.

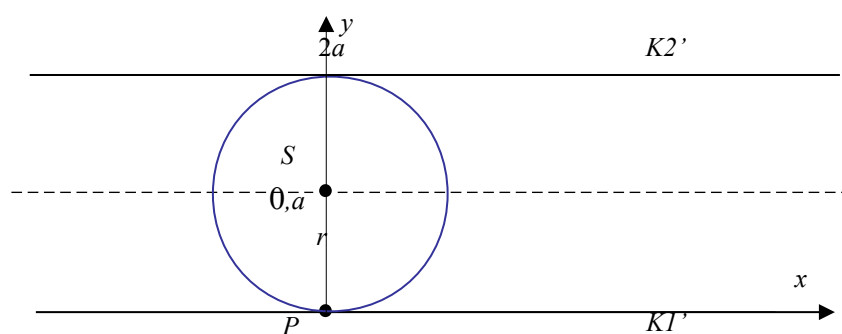
Następnie wprowadźmy układ współrzędnych, taki że prosta $K1'$ pokrywa się z osią OX , a punkt P' leży w środku układu współrzędnych.

Oznaczmy:

$y = 2a$ – równanie prostej $K2'$

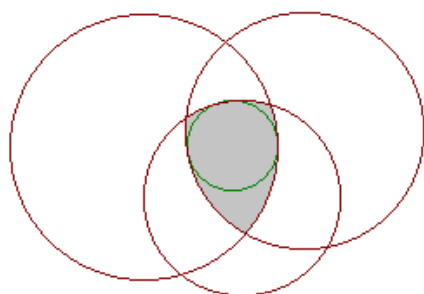
$S(0, a)$ – współrzędne środka okręgu stycznego do $K1'$, $K2'$ w punkcie P' ,

$r = a$ – promień okręgu stycznego do $K1'$, $K2'$ i $K3'$,

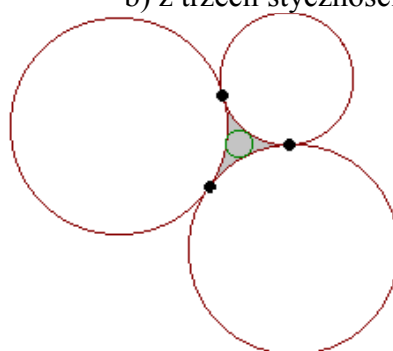


Jak widać w obszarze (12) istnieje tylko jeden okrąg Apolloniusza.

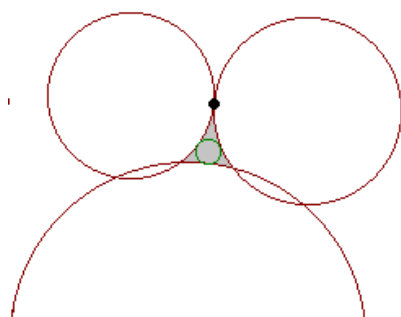
13. Trójkąt. Ilość rozwiązań 1
a) z trzech przecięć



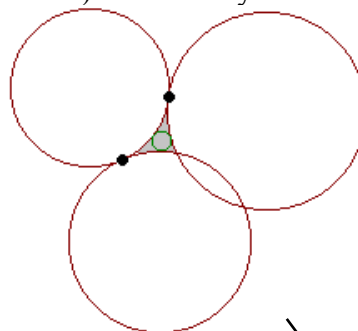
b) z trzech styczności



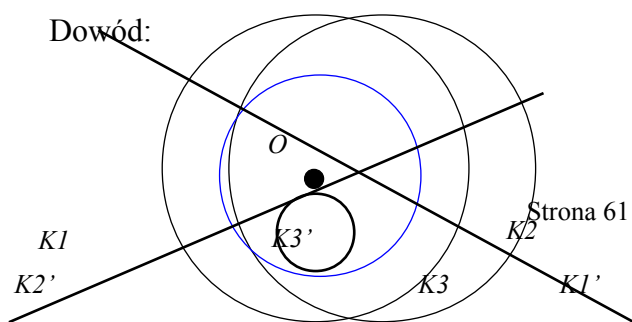
c) z dwóch przecięć i styczności



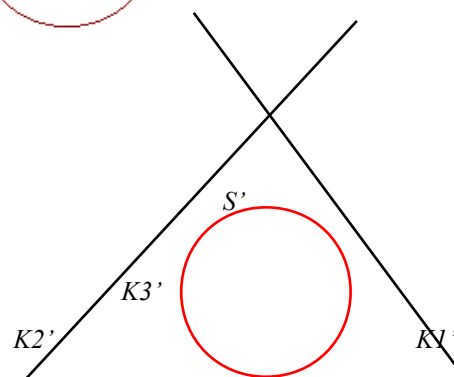
d) z dwóch styczności i przecięcia

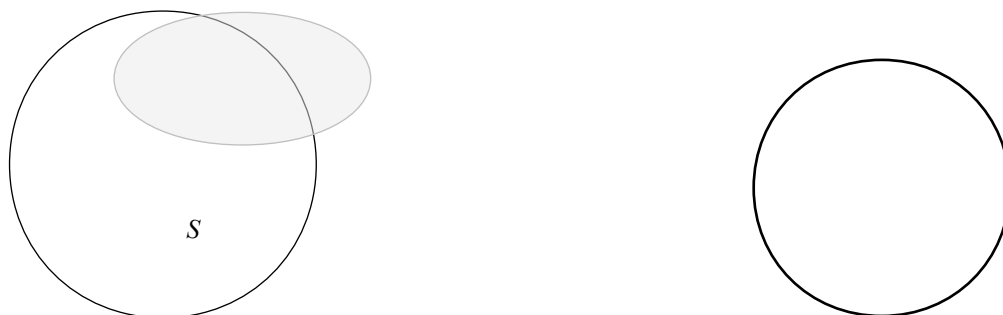


Dowód:



Strona 61



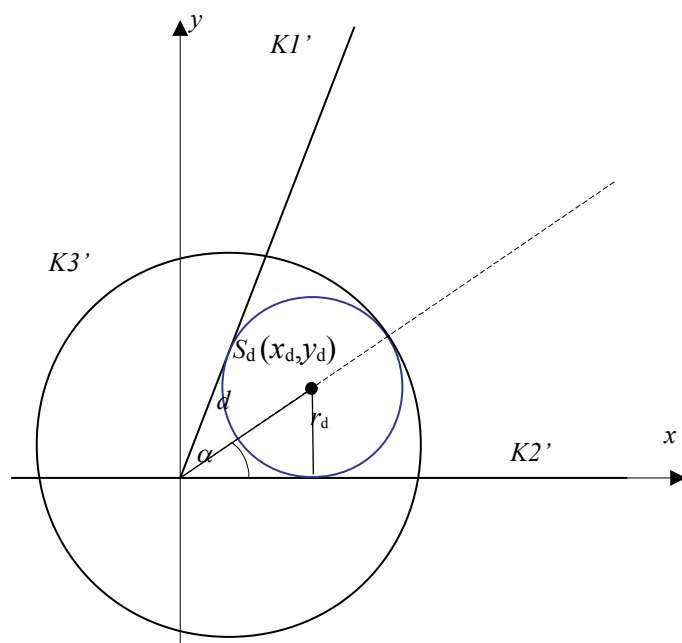


Przekształćmy obszar S przez inwersję $I(O, r)$ taką, że punkt O leży w punkcie przecięcia okręgów $K1$ i $K2$. Wówczas obszar S przekształci się na obszar S' , okrąg $K1$ na prostą $K1'$, okrąg $K2$ na prostą $K2'$, przecinającą prostą $K1'$ pod takim samym kątem pod jakim przecinają się okręgi $K1$ i $K2$, a okrąg $K3$ na okrąg $K3'$.

Następnie wprowadźmy układ współrzędnych, taki że prosta $K2'$ leży na osi OX a prosta $K1'$ nad osią OX .

Oznaczmy:

α - kąt pod jakim nachylona jest dwusieczna kąta $K1' O K2'$ do osi OX ,
 $d > 0$ – odległość środka szukanego okręgu od początku ukł. współrzędnych,
 (x_3, y_3) , r_3 – współrzędne środka i promień okręgu $K3'$.



Wówczas dane szukanego okręgu możemy zapisać w postaci uzależnionej od parametru d :

$S_d = (x_\alpha, y_\alpha) = (d \cos \alpha, d \sin \alpha)$ – współrzędne środka szukanego okręgu,
 $r_d = d \sin \alpha$ - promień szukanego okręgu.

Warunek na styczność zewnętrzną szukanego okręgu K do okręgu K_3 możemy zapisać w następujący sposób:

$$(x_3 - d \cos \alpha)^2 + (y_3 - d \sin \alpha)^2 = (r_3 - d \sin \alpha)^2$$

$$\cos^2 \alpha d^2 + (2r_3 \sin \alpha - 2x_3 \cos \alpha - 2y_3 \sin \alpha)d + x_3^2 + y_3^2 - r_3^2 = 0$$

otrzymaliśmy równanie kwadratowe postaci

$$ad^2 + bd + c = 0$$

równanie to może mieć dwa rozwiązania, jednak jedno z nich zawsze będzie mniejsze od zera, a więc sprzeczne z założeniem, co zaraz udowodnimy:

ze wzorów Viete'a wiemy, że

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

podstawiając otrzymamy

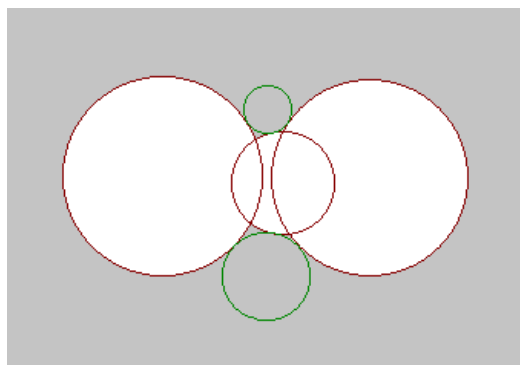
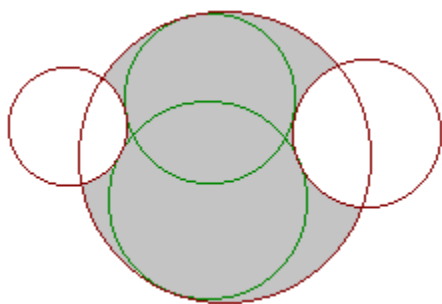
$$\frac{x_3^2 + y_3^2 - r_3^2}{\cos^2 \alpha} < 0$$

ponieważ

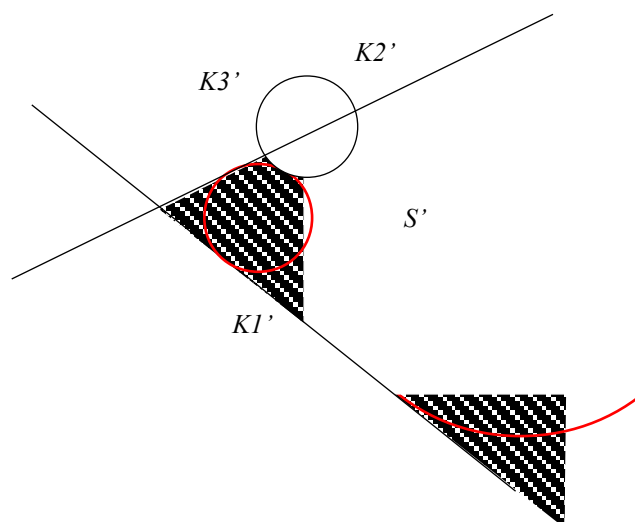
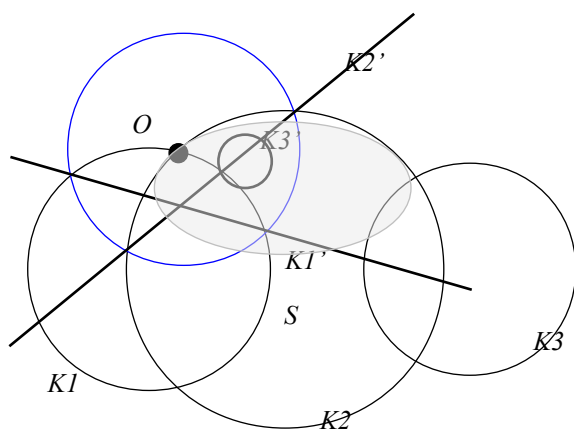
$$x_3^2 + y_3^2 < r_3^2$$

tak więc w obszarze (13) może istnieć tylko jeden okrąg Apolloniusza.

14. Czworokąt z dwóch przecięć. Ilość rozwiązań 2



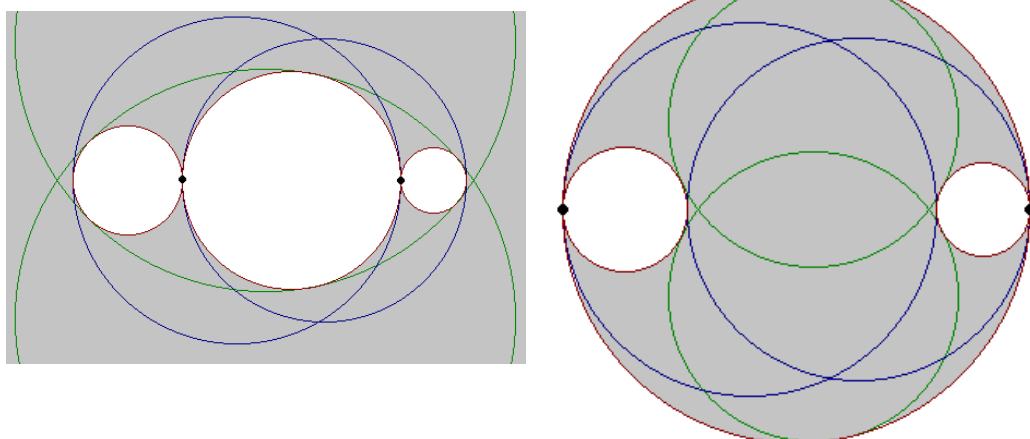
Dowód:



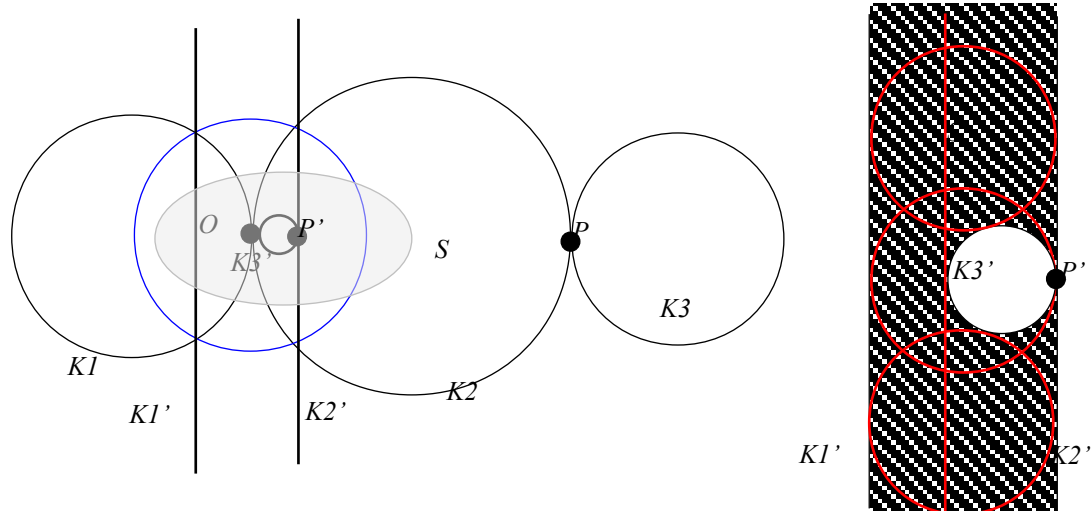
Przekształćmy obszar S przez inwersję $I(O, r)$ taką, że punkt O leży w punkcie przecięcia okręgów $K1$ i $K2$. Wówczas obszar S przekształci się na obszar S' , okrąg $K1$ na prostą $K1'$, okrąg $K2$ na prostą $K2'$ przecinającą prostą $K1'$ pod takim samym kątem pod jakim przecinają się okręgi $K1$ i $K2$, a okrąg $K3$ na okrąg $K3'$ przecinający prostą $K2'$.

Dalszą część dowodu przeprowadzamy w ten sam sposób co dowód na styczność zewnętrzną dla obszaru (9).

1. Czworokąt z dwóch styczności. Ilość rozwiązań 4



Dowód:



Przekształćmy obszar S przez inwersję $I(O, r)$ taką, że punkt O leży w punkcie styczności okręgów $K1$ i $K2$. Wówczas obszar S przekształci się na obszar S' , okrąg $K1$ na prostą $K1'$, okrąg $K2$ na prostą $K2'$ prostopadłą do $K1'$, a punkt P na punkt P' , leżący na prostej $K2'$.

Następnie wprowadźmy układ współrzędnych, taki że prosta $K2'$ pokrywa się z osią OX , a środek okręgu $K3'$ leży w na osi OY .

Oznaczmy:

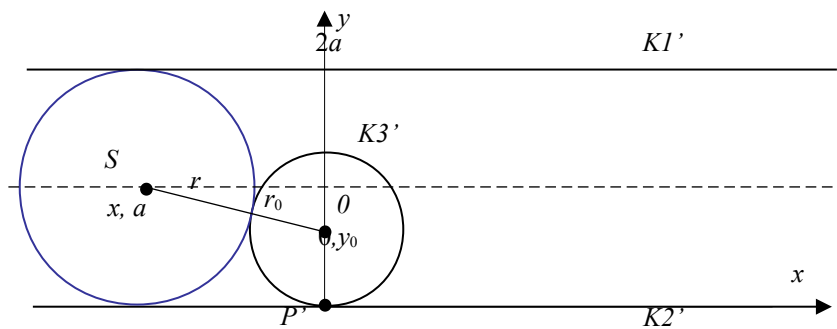
$O(0, y_0)$ – środek okręgu $K3'$,

$r_0 = y_0$ – promień okręgu $K3'$,

$y = 2a$ – równanie prostej $K1'$

$S(x, a)$ – współrzędne środka okręgu stycznego do $K1'$, $K2'$ i $K3'$,

$r = a$ – promień okręgu stycznego do $K1'$, $K2'$ i $K3'$,



Zapiszmy teraz warunek na styczność zewnętrzną szukanego okręgu K oraz okręgu $K3'$:

$$|SO| = a + r_0$$

wyliczamy:

$$\sqrt{x_0^2 + (a - y_0)^2} = a + r_0$$

$$x^2 - (y_0 + r_0) \cdot (2a + y_0 - r_0) = 0$$

jak widać jest to równanie kwadratowe postaci:

$$x^2 + a = 0$$

które ponieważ $r_0 = y_0$ ($a < 0$), ma dwa rozwiązania.

Analogicznie postępujemy w przypadku styczności wewnętrznej:

$$|SO| = a - r_0$$

wyliczamy:

$$\sqrt{x_0^2 + (a - y_0)^2} = a - r_0$$

$$x^2 - (y_0 - r_0) \cdot (2a + y_0 + r_0) = 0$$

jest to również równanie kwadratowe postaci:

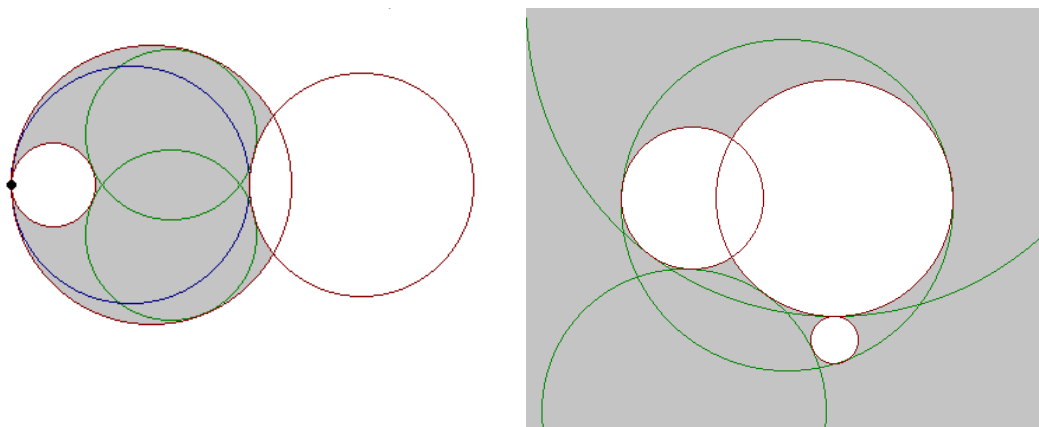
$$x^2 + a = 0$$

które ponieważ $r_0 = y_0$ ($a = 0$), ma tylko jedno rozwiązanie.

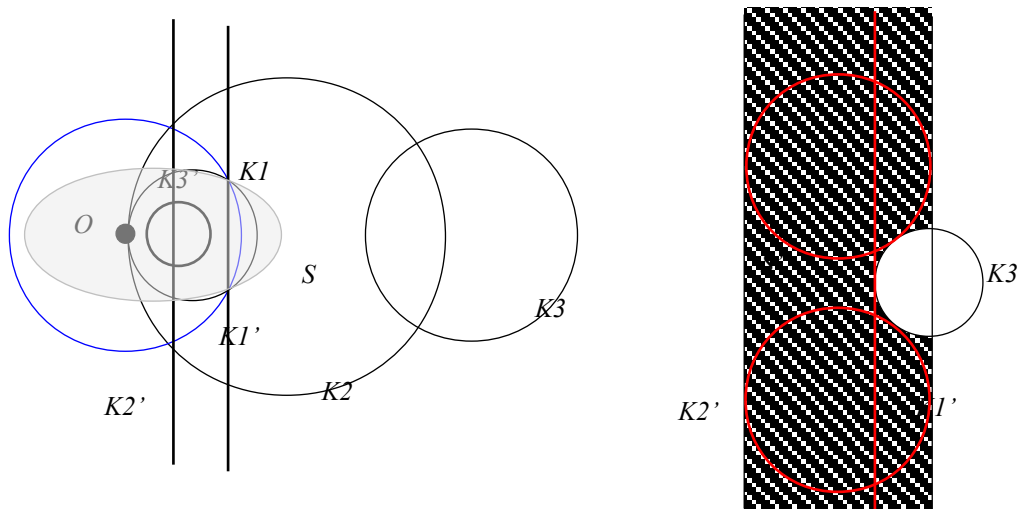
Istnieje jeszcze jedno rozwiązanie w postaci prostej stycznej do $K3'$ i równoległej do $K1'$ oraz $K2'$ o równaniu $y = y_0 + r_0$

Ostatecznie w obszarze (14) istnieją cztery okręgi Apolloniusza.

2. Czworokąt z przecięcia i styczności. Ilość rozwiązań 3



Dowód:



Przekształćmy obszar S przez inwersję $I(O, r)$ taką, że punkt O leży w punkcie styczności okręgów $K1$ i $K2$. Wówczas obszar S przekształci się na obszar S' , okrąg $K1$ na prostą $K1'$, okrąg $K2$ na prostą $K2'$ prostopadłą do $K1'$, a okrąg $K3$ na okrąg $K3'$, przecinający prostą $K1'$.

Następnie wprowadźmy układ współrzędnych, taki że prosta $K2'$ pokrywa się z osią OX , a środek okręgu $K3'$ leży w na osi OY .

Oznaczmy:

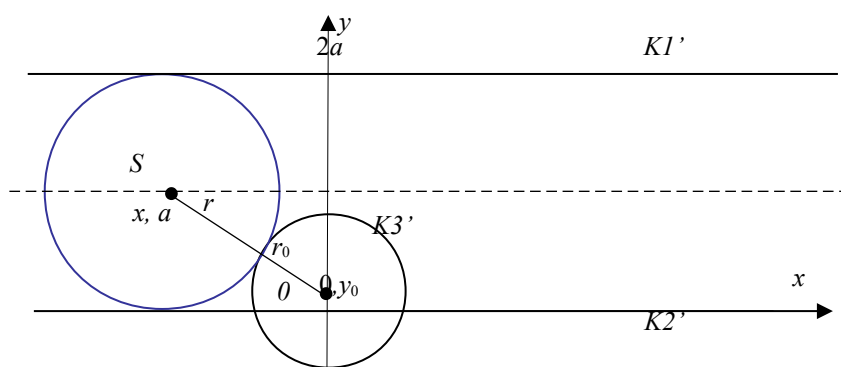
$O(0, y_0)$ – środek okręgu $K3'$,

r_0 – promień okręgu $K3'$,

$y = 2a$ – równanie prostej $K1'$

$S(x, a)$ – współrzędne środka okręgu stycznego do $K1'$, $K2'$ i $K3'$,

$r = a$ – promień okręgu stycznego do $K1'$, $K2'$ i $K3'$,



Zapiszmy teraz warunek na styczność zewnętrzną (w tym obszarze mamy do czynienia tylko ze stycznością zewnętrzną) szukanego okręgu K oraz okręgu $K3'$:

$$|SO| = a + r_0$$

wyliczamy:

$$\sqrt{x_0^2 + (a - y_0)^2} = a + r_0$$

$$x^2 - (y_0 + r_0) \cdot (2a + y_0 - r_0) = 0$$

jak widać jest to równanie kwadratowe postaci:

$$x^2 + a = 0$$

które ponieważ $y_0 - r_0 > 0$ ($a < 0$), ma dwa rozwiązania.

Otrzymane rozwiązania uzupełnia trzecie, prosta styczna do $K3'$ oraz równoległa do $K1'$ i $K2'$ o równaniu $y = y_0 + r_0$.

Ostatecznie w obszarze (15) mogą istnieć trzy okręgi Apolloniusza.

4.2. Podsumowanie

Mimo, że sama analiza wszystkich obszarów powstających w wyniku podziału płaszczyzny przez trzy okręgi nie daje ogólnej możliwości dowodu hipotezy o maksymalnej ilości rozwiązań zagadnienia Apolloniusza. Jest ona doskonałym „katalogiem” pozwalającym na szybkie policzenie ilości rozwiązań dla dowolnego układu okręgów.

5. Algebraiczny dowód istnienia co najwyżej ośmiu okręgów stycznych do trzech danych okręgów.

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - (r \pm r_1)^2 = 0 \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - (r \pm r_2)^2 = 0 \\ (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - (r \pm r_3)^2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Rozwiązania układów równań (7) dają nam współrzędne środków i promienie wszystkich okręgów stycznych do trzech danych okręgów. Jak widać układów tych jest osiem. Wypiszmy wszystkie możliwe kombinacje znaków $\pm$ występujących w tych równaniach:

$$\begin{array}{cccccccc} & - & + & - & + & + & + & - & - \\ \text{a)} & - & + & + & - & + & - & + & - \\ & - & + & + & + & - & - & - & + \end{array}$$

Teoretycznie każdy z nich może mieć aż osiem rozwiązań, okazuje się jednak, że po odjęciu stronami dowolnych dwóch równań powstaje równanie liniowe np. odejmijmy równanie drugie od równania pierwszego otrzymamy:

$$x_1(x_1 - x) + x_2(x - x_2) + y_1(y_1 - y) + y_2(y - y_2) + r_1(r \pm r_1) + r_2(r \pm r_2) = 0$$

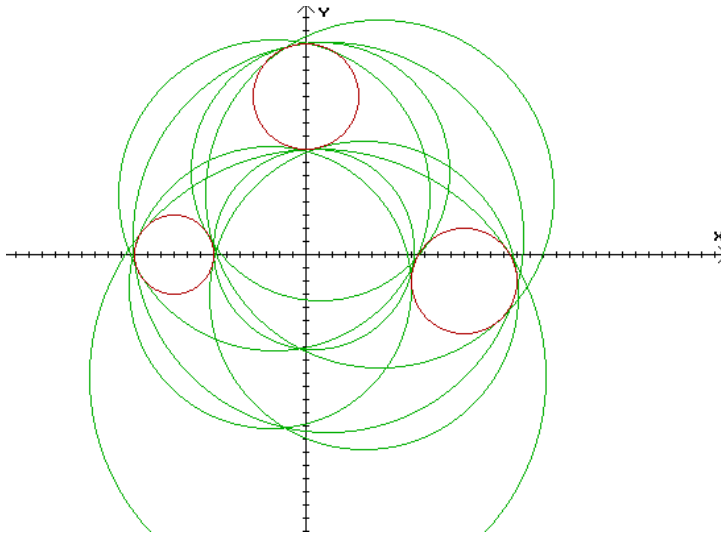
Równanie to ma najwyżej jedno rozwiązanie, a układ dwóch równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe ma maksymalnie dwa rozwiązania. Tak więc osiem takich układów równań daje nam maksymalnie szesnaście rozwiązań. Dlaczego więc okręgów Apolloniusza jest najwyżej osiem?

Przeanalizujmy następujący przypadek:

Tabela rozwiązań układu równań :

1)	x =	0.000000	y =	12.000000	r =	4.000000
2)	x =	12.000000	y =	-2.000000	r =	4.000000
3)	x =	-10.000000	y =	0.000000	r =	3.000000

	sts	x	y	r
1)	0	0.620471	0.388975	-7.627592
2)	0	1.726160	1.336709	-14.802102
3)	0	0.874700	-9.274564	-17.292538
4)	0	-2.421384	4.545944	-11.837478
5)	0	5.564309	4.626551	-13.237386
6)	0	1.065176	6.344436	-9.754998
7)	0	4.374950	-3.079212	-11.701045
8)	0	-2.697255	-2.454790	-10.704290
9)	0	1.726160	1.336709	14.802102
10)	0	0.620471	0.388975	7.627592
11)	0	1.065176	6.344436	9.754998
12)	0	4.374950	-3.079212	11.701045
13)	0	-2.697255	-2.454790	10.704290
14)	0	0.874700	-9.274564	17.292538
15)	0	-2.421384	4.545944	11.837478
16)	0	5.564309	4.626551	13.237386



Interesują nas tylko te rozwiązania, które mają sens geometryczny ($r > 0$). Łatwo zauważyć, że połowa z otrzymanych rozwiązań nie spełnia tego warunku ponieważ $r < 0$. Jak widać z tabeli rozwiązań istnieje pewna zależność między parami rozwiązań zaznaczonymi tym samym kolorem (współrzędne X i Y są sobie równe natomiast promienie różnią się między sobą tylko znakiem). wypiszmy te pary:

(a, b); (c, f); (d, g); (e, h);

Zamiast liter wstawmy odpowiednie znaki:

$$\begin{pmatrix} - & + \\ -, & + \\ - & + \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} - & + \\ +, & - \\ + & - \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} + & - \\ -, & + \\ + & - \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} + & - \\ +, & - \\ - & + \end{pmatrix};$$

Są to pary składające się z układów równań o przeciwnym ustawieniu znaków w ostatnim nawiasie np:

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (r_1 - r)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (r_2 - r)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (r_3 - r)^2 \end{cases} \quad (8.a)$$

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (r_1 + r)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = (r_2 + r)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (r_3 + r)^2 \end{cases} \quad (8.b)$$

Załóżmy, że trójka x_0, y_0, r_0 będzie rozwiązaniem układu (8.a). Twierdzę, że wówczas trójka $x_0, y_0, -r_0$ jest rozwiązaniem układu (8.b).

Dowód:

Wstawmy x_0, y_0, r_0 do układu (8.a):

$$\begin{cases} (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 = (r_1 - r_0)^2 \\ (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 = (r_2 - r_0)^2 \\ (x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2 = (r_3 - r_0)^2 \end{cases} \quad (9.a)$$

włączając tylko minus przed nawias otrzymujemy:

$$\begin{cases} (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 = (r_1 + (-r_0))^2 \\ (x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 = (r_2 + (-r_0))^2 \\ (x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2 = (r_3 + (-r_0))^2 \end{cases} \quad (9.b)$$

jest to układ (8.b), którego rozwiązania są odpowiednio równe $x_0, y_0, -r_0$, z tej pary rozwiązań tylko jedno ma sens geometryczny, a więc dwa układy równań o przeciwnych znakach w ostatnim nawiasie odpowiedniego równania dają maksymalnie dwa rozwiązania, w których $r > 0$. Wszystkich par jest cztery, czyli ostatecznie wszystkich rozwiązań dających okręgi styczne do danych trzech okręgów może być maksymalnie 8.

Literatura

1. C. Rauser, „Rozmaitości Matematyczne”, Warszawa 1998.
2. A. Marciniak, D. Gregulec, J. Kaczmarek, „Podstawowe procedury numeryczne w języku Turbo Pascal”, Poznań 1997.
3. Z. Krygowska, „Konstrukcje na płaszczyźnie”, Warszawa 1955.
4. W. Kostin, „Podstawy geometrii”, Warszawa 1961.