

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyki
specjalność nauczycielska

Marcelina Chodorowska

LICZBA PRZECIEŃ PRZEKĄTNYCH
W WIELOKĄCIE FOREMNYM

Praca licencjacka napisana pod kierunkiem:
prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2016

.....
(imiona i nazwisko)

.....
(aktualny adres do korespondencji)

.....
(numer PESEL)

.....
(adres e-mail)

.....
(wydział)

.....
(kierunek studiów)

.....
(poziom i forma studiów)

.....
(numer albumu)

OŚWIADCZENIE O PRAWACH AUTORSKICH I DANYCH OSOBOWYCH

Ja niżej podpisany/a student/ka Wydziału
..... kierunku
oświadczam, że przedkładana praca dyplomowa na temat:

.....
.....
.....

- jest mojego autorstwa i nie narusza autorskich praw w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tekst jednolity: Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631, z późn. zm.) oraz dóbr osobistych chronionych prawem;
- nie zawiera danych i informacji uzyskanych w sposób niedozwolony;
- nie była wcześniej przedmiotem innej urzędowej procedury związanej z nadaniem dyplomu uczelni wyższej lub tytułu zawodowego;
- treść pracy dyplomowej przedstawionej do obrony, zawarta na przekazanym nośniku elektronicznym, jest identyczna z jej wersją drukowaną.

Oświadczam, iż zostałem/am poinformowany/a o prawie dostępu do treści moich danych osobowych oraz ich poprawiania.

Udostępnienie przez mnie danych osobowych ma charakter dobrowolny.

Wyrażam zgodę, na:

- udostępnienie mojej pracy dla celów naukowych i dydaktycznych;
- przetwarzanie moich danych osobowych w myśl ustawy z dnia 29 sierpnia 1997 r. o ochronie danych osobowych (tekst jednolity: Dz. U. z 2014 r., poz. 1182, z późn. zm.);
- umieszczenie mojej pracy w bazie danych Uczelni i jej przechowywanie przez okres stosowny do potrzeb Uczelni;
- wykorzystanie mojej pracy jako elementu komparatywnej bazy danych Uczelni;
- udostępnienie mojej pracy innym podmiotom celem prowadzenia kontroli antyplagiatowej prac dyplomowych i innych tekstów, które zostaną opracowane w przyszłości;
- porównywanie tekstu mojej pracy z tekstami innych prac znajdujących się w bazie porównawczej systemu antyplagiatowego i zasobach Internetu.

Wrocław,

(rrrr – mm – dd)

.....

(czytelny podpis autora pracy)

Spis treści

Wstęp	3
1 Najprostsze wyliczenia i oszacowania	4
1.1 Ogólne oszacowanie z góry przez $\binom{n}{4}$	4
1.2 Punkty wielokrotne	4
1.3 Liczba przecięć przekątnych dla nieparzystokątów foremnych	5
2 Niepraktyczny wzór	8
2.1 Środek S wielokąta foremnego	9
3 Ogólne oszacowanie dla parzystokątów	10
3.1 Punkty wielokrotne na przekątnych będących osiami symetrii - różne od środka S	10
3.2 Wyprowadzenie nierówności	13
3.3 Ilustracja na przykładach ośmiokąta foremnego i dziesięciokąta foremnego	14
3.4 Inne konfiguracje punktów wielokrotnych	15
4 Wzór Bjorna Poonena i Michaela Rubinsteina	18

Wstęp

W mojej pracy licencjackiej chcę poruszyć problem liczby przecięć przekątnych w wielokącie foremnym. Praca będzie miała charakter elementarnego zilustrowania i częściowego uzasadnienia trudnych twierdzeń znanych z literatury.

W rozdziale pierwszym znajduje się wprowadzenie do poruszanego problemu liczby przecięć przekątnych w wielokącie foremnym. We wprowadzeniu znajdują się wyjaśnienia terminów, które będą używane przez całą pracę takie jak liczba przecięć przekątnych w wielokącie foremnym, punkty przecięcia przekątnych wielokąta foremnego, punkty wielokrotne. W rozdziale tym znajduje się również górne oszacowanie liczby przecięć przekątnych przez $\binom{n}{4}$ oraz wzór na liczbę przecięć przekątnych w nieparzystokątach foremnych wraz z ilustracjami na przykładach pięciokąta foremnego i siedmiokąta foremnego.

W drugim rozdziale wyprowadzimy ogólny wzór na liczbę przecięć przekątnych w wielokątach foremnych, gdy znana jest liczba punktów wielokrotnych i ich krotność.

Trzeci rozdział został poświęcony tematowi oszacowania liczby przecięć przekątnych w parzystokątach foremnych. Rozważymy w nim trzy najbardziej podstawowe konfiguracje przecinania się więcej niż dwóch przekątnych. Zilustrujemy też na przykładach ośmiokąta i dziesięciokąta foremnego uzyskane w tym rozdziale oszacowanie (które w tych przypadkach daje dokładne wyliczenie).

W czwartym rozdziale skonfrontujemy twierdzenie wyprowadzone w trzecim rozdziale ze wzorem Bjorna Poonena i Michaela Rubinsteina.

Dzięki elementarnemu charakterowi tej pracy jest ona przystępna już dla uczniów liceum.

Chciałabym serdecznie podziękować promotorowi Panu Jackowi Świątkowskiemu za poświęcony czas, cenne uwagi i życzliwość.

Marcelina Chodorowska

1 Najprostsze wyliczenia i oszacowania

Punktami przecięcia przekątnych wielokąta foremnego będziemy nazywać punkty należące do więcej niż jednej przekątnej, różne od wierzchołków wielokąta. Równoważnie, są to punkty wspólne przekątnych wielokąta znajdujące się w jego wnętrzu. Zgodnie z tym, *przecinającymi się przekątnymi* będziemy nazywać takie przekątne, które mają punkt wspólny wewnątrz wielokąta.

Na liczbę punktów przecięcia przekątnych w n -kącie foremnym będziemy stosować oznaczenie m_n . Celem pracy jest uzyskanie jak najwięcej informacji o liczbach m_n .

1.1 Ogólne oszacowanie z góry przez $\binom{n}{4}$

Twierdzenie 1.1.1. *Liczba przecięć przekątnych w n -kącie foremnym jest nie większa niż $\binom{n}{4}$. Zapisując wzorem dostajemy:*

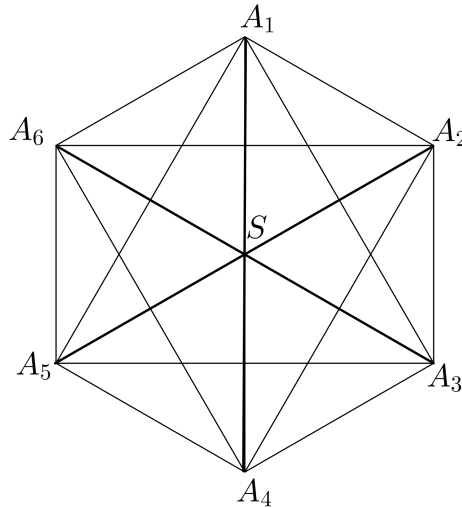
$$m_n \leq \binom{n}{4}$$

Dowód. W wielokącie każde cztery różne wierzchołki określają dwie przecinające się przekątne. Liczba par przecinających się przekątnych to $\binom{n}{4}$. Jednak punkty przecięcia dla niektórych par przekątnych mogą się pokrywać, stąd nierówność. $\square$

1.2 Punkty wielokrotne

Dlaczego w **Twierdzeniu 1.1.1** potrafimy tylko oszacować z góry interesującą nas liczbę m_n ? W jakich przypadkach liczba $\binom{n}{4}$ dająca górne oszacowanie będzie za duża? Kiedy $m_n < \binom{n}{4}$, a kiedy $m_n = \binom{n}{4}$?

Popatrzmy na poniższy sześciokąt foremny i jego wyróżnione przekątne.



W powyższym sześciokącie foremnym trzy przekątne: A_1A_4 , A_2A_5 , A_3A_6 przecinają się w środku wielokąta w punkcie S - punkt S jest tzw. trzykrotnym punktem przecięcia. Przekątne te tworzą trzy pary przecinających się przekątnych, ale wszystkim tym parom odpowiada ten sam punkt przecięcia (S), stąd: $m_6 < \binom{6}{4}$.

Punkty, w których przecinają się więcej niż dwie przekątne nazywamy **punktami wielokrotnymi**. Punkt, w którym przecina się dokładnie k przekątnych nazywamy k -krotnym **punktem przecięcia przekątnych** wielokąta. Z dowodu **Twierdzenia 1.1.1** wynika następujący wniosek.

Wniosek 1.2.1. (a) *Jeśli w n -kącie foremnym występują tylko punkty dwukrotne (tzn. w jednym punkcie przecinają się tylko dwie przekątne) to $m_n = \binom{n}{4}$.*

(b) *Jeśli w n -kącie foremnym występują punkty wielokrotne to $m_n < \binom{n}{4}$.*

Uwaga 1.2.1. W dowolnym parzystokącie foremnym (z wyjątkiem kwadratu) zawsze będą przecięcia wielokrotne, między innymi jego środek, w którym przecinają się wszystkie przekątne będące średnicami okręgu opisanego na tym wielokącie. Zatem dla $2n$ -kątów (gdzie $n \geq 3$) nierówność jest ostra:

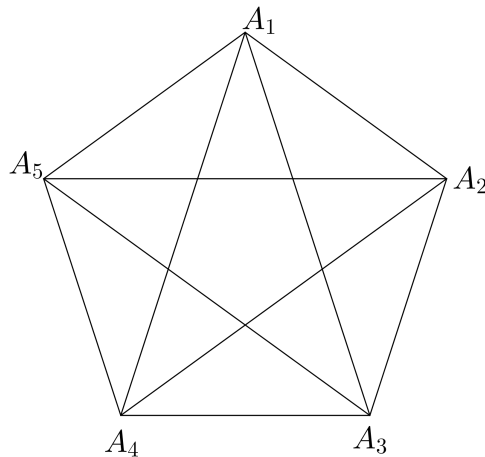
$$m_{2n} < \binom{2n}{4}.$$

1.3 Liczba przecięć przekątnych dla nieparzystokątów foremnych

Twierdzenie 1.3.1. *W nieparzystokątach foremnym liczba przecięć przekątnych wynosi zawsze $\binom{2n+1}{4}$.*

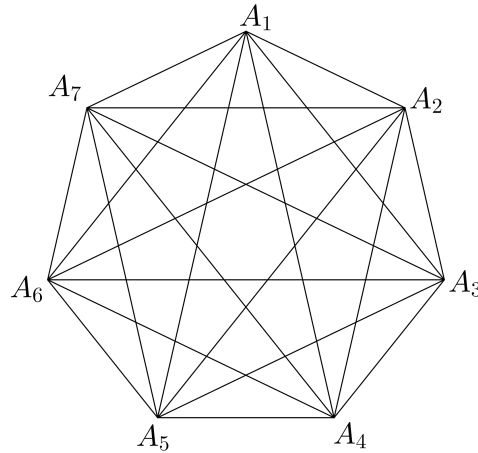
Oznacza to, że dla dowolnych dwóch, różnych par przecinających się przekątnych punkty przecięcia z tych par są różne. Czyli nie istnieje punkt trzykrotny. Dowód tego twierdzenia przekracza materiał tej pracy, dlatego sprawdzimy je tylko na dwóch poniższych przykładach. Natomiast dokładny dowód można znaleźć w pracy dr.hab. Wojciecha Guzickiego "O przekątnych wielokątów foremnym"[2].

Przykład 1.3.1. Pięciokąt foremny.



Widzimy, że pięciokąt foremny ma pięć punktów przecięcia przekątnych. W tym wielokącie nie będzie punktów wielokrotnych ponieważ, aby był co najmniej punkt trzykrotny musiałby być określony przez sześć różnych wierzchołków, a jest ich pięć. Zatem wzór $m_n = \binom{n}{4}$ dla $n=5$ zachodzi, to znaczy $m_5 = \binom{5}{4}=5$.

Przykład 1.3.2. Siedmiokąt foremny.

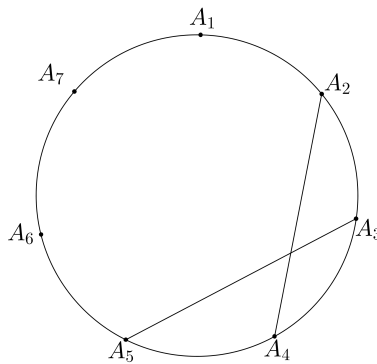


W tym wielokącie sytuacja jest trochę bardziej skomplikowana. Należy wykluczyć istnienie punktów trzykrotnych. Punkty czterokrotne (i większe) nie istnieją ponieważ musiałby określać osiem różnych wierzchołków, a jest ich siedem.

Należy zatem wykluczyć przypadek, że w jednym punkcie przecinają się trzy przekątne. Co prawda jest to widoczne na rysunku powyżej, chcemy jednak przeprowadzić ściśle uzasadnienie, niezależne od rysunku, który może być niedokładny albo tendencyjny.

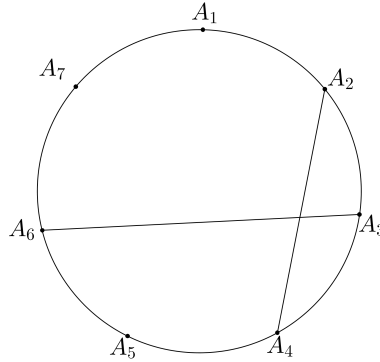
W tym celu rozważymy trzy przypadki par przecinających się przekątnych i sprawdzimy, że przez ich punkt przecięcia nie może przechodzić trzecia przekątna siedmiokąta foremnego.

- Dwie dowolne przecinające się przekątne, których końce dzielą okrąg opisany na siedmiokącie foremnym w stosunku 2 do 5.



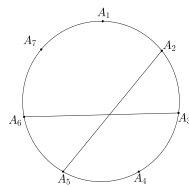
Każda przecinająca się para takich przekątnych musi wyglądać tak jak na rysunku powyżej. Koniec trzeciej przekątnej przechodzącej przez punkt przecięcia się wyjściowej pary przekątnych, musiałby wyznaczać nowy wierzchołek (tzn. różny od widomych na rysunku) siedmiokąta foremnego, sytuacja jest niemożliwa - nie ma więc w tym przypadku punktu trzykrotnego.

- Dwie dowolne przecinające się przekątne takie, że końce jednej z nich dzielą okrąg opisany na siedmiokącie foremnym w stosunku 2 do 5, a końce drugiej przekątnej w stosunku 3 do 4.

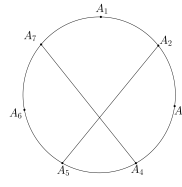


Każda przecinająca się para takich przekątnych musi wyglądać tak jak na rysunku powyżej. W tym przypadku argumentacja jest taka sama jak w poprzednim podpunkcie. Zatem punkt przecięcia takich przekątnych nie może być punktem trzykrotnym.

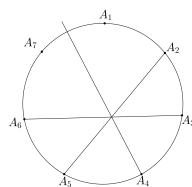
- Dwie dowolne przecinające się przekątne takie, że ich końce dzielą okrąg opisany na siedmiokącie foremnym w stosunku 3 do 4.



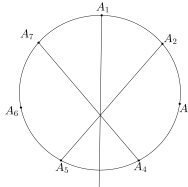
(a)



(b)



(a) c



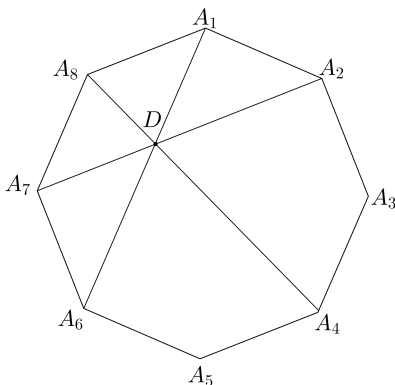
(b) d

Każda przecinająca się para takich przekątnych musi wyglądać tak jak na rysunku (a) lub (b). W obydwóch przypadkach widzimy, że istnieje wierzchołek, z którego mogłaby wychodzić przekątna przechodząca przez punkt przecięcia wyjściowej pary przekątnych, ale wtedy byłaby ich symetralną (rysunki (a) c i (b) d), zatem zawierałaby się w średnicy okręgu opisanego na siedmiokącie foremnym, a w nieparzystokątach takie przekątne nie występują. Zatem punkt przecięcia takich przekątnych nie może być punktem trzykrotnym.

Wyklucziliśmy istnienie punktów wielokrotnych w siedmiokącie foremnym, zatem $m_7 = \binom{7}{4} = 35$.

2 Niepraktyczny wzór

Spróbujmy dokładniej opisać liczbę przecięć przekątnych w wielokątach foremnych w sytuacji, gdy występują wielokrotne punkty przecięcia. Wiemy z **Twierdzenia 1.1.1**, że $m_n \leq \binom{n}{4}$. Wiemy też, że każdy punkt wielokrotny oznacza istnienie różnych przecinających się par przekątnych, dla których punkt przecięcia jest ten sam. Popatrzmy na poniższy rysunek.



Punkt D jest punktem trzykrotnym, w tym samym punkcie przecinają się pary przekątnych: A_1A_6 z A_2A_7 , A_1A_6 z A_4A_8 , A_4A_8 z A_2A_7 . Wyrażenie $\binom{8}{4}$ zlicza punkt D trzy razy. Należy więc odjąć od liczby $\binom{8}{4}$ zbędny nadmiar liczby par przecinających się przekątnych, który dla punktu D wynosi 2.

Ogólnie *nadmiar* liczby par przekątnych przecinających się w jednym punkcie to liczba o jeden mniejsza niż liczba wszystkich możliwych par przekątnych przecinających się w tym punkcie.

Uwaga 2.1. W punkcie d -krotnym (dla $d \geq 3$) przecina się $\binom{d}{2}$ różnych par przekątnych.

Uwaga 2.2. Niech p oznacza punkt wielokrotny, a $\clubsuit(p)$ oznacza nadmiar liczby par przekątnych przecinających się w punkcie p .

Jeśli p jest punktem d -krotnym ($d \geq 3$) to $\clubsuit(p) = \binom{d}{2} - 1$.

Z **Uwagi 2.1** oraz **Uwagi 2.2** wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.1. Liczba punktów przecięcia w n -kącie foremnym wynosi

$$m_n = \binom{n}{4} - \sum_p \clubsuit(p)$$

gdzie sumowanie odbywa się po punktach wielokrotnych p , zaś $\clubsuit(p)$ to nadmiar liczby par przecinających się przekątnych w punkcie p .

Z **Uwagi 2.1**, **Uwagi 2.2** i **Twierdzenia 2.1** wynika następująca zależność.

Twierdzenie 2.2. Liczba punktów przecięcia w n -kącie foremny wynosi

$$m_n = \binom{n}{4} - \sum_p \left[\binom{d_p}{2} - 1 \right]$$

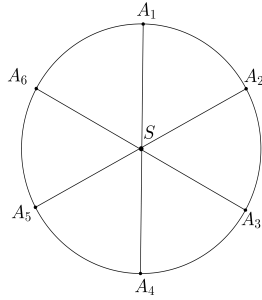
gdzie d_p to krotność punktu wielokrotnego p , zaś $\sum_p$ oznacza sumowanie po zbiorze wszystkich punktów wielokrotnych p .

Powyższy wzór, choć dokładny, w praktyce nie pomaga w wyznaczeniu liczby m_n z tego względu, że nie znamy wszystkich rodzajów punktów wielokrotnych oraz ich ilości.

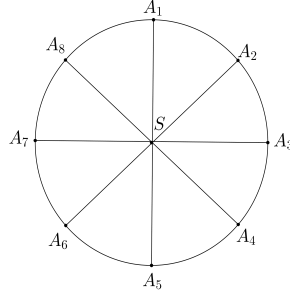
2.1 Środek S wielokąta foremnego

W środku parzystokąta foremnego przecinają się przekątne, które są średnicami okręgu na nim opisanego. Takich przekątnych w $2n$ -kącie foremnym jest n .

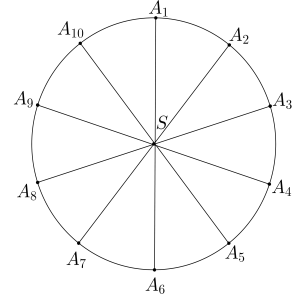
Niech S będzie środkiem $2n$ -kąta foremnego. Wówczas w S spotyka się n przekątnych, S jest więc punktem n -krotnym.



(a) W 6-kącie foremnym punkt S jest punktem trzykrotnym.



(b) W 8-kącie foremnym punkt S jest punktem czterokrotnym.

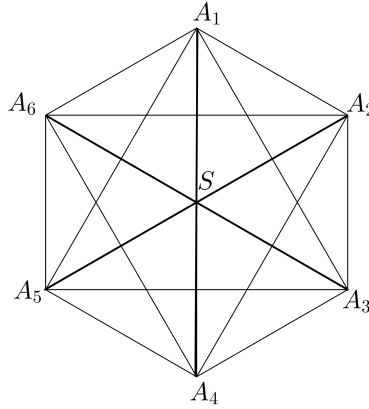


(c) W 10-kącie foremnym punkt S jest punktem pięciokrotnym.

Na podstawie **Uwagi 2.2** dla środka S w $2n$ -kącie foremnym mamy $\clubsuit(S) = \binom{n}{2} - 1$.

Wniosek 2.1.1. Ze wzoru z **Twierdzenia 2.2** otrzymujemy oszacowanie $m_{2n} \leq \binom{2n}{4} - \binom{n}{2} + 1$, przy czym równość zachodzi jedynie wtedy, gdy w $2n$ -kącie nie ma innych wielokrotnych punktów przecięcia niż jego środek S .

Przykład 2.1.1. Sześciokąt foremny.



Sześciokąt jest parzystokątem, w którym jedynym wielokrotnym punktem przecięcia przekątnych jest jego środek, który jest punktem trzykrotnym. Stąd na podstawie **Wniosku 2.1.1** mamy równość $m_6 = \binom{6}{4} - \binom{3}{2} + 1 = 15 - 3 + 1 = 13$.

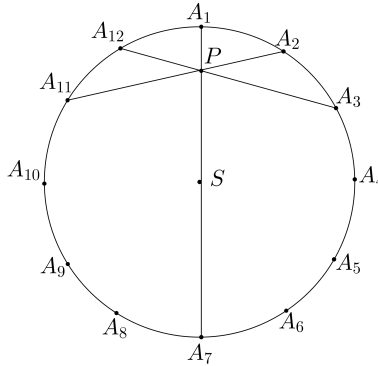
3 Ogólne oszacowanie dla parzystokątów

Na potrzeby tego rozdziału liczbę wierzchołków w parzystokącie foremnym będziemy oznaczać przez $2n$.

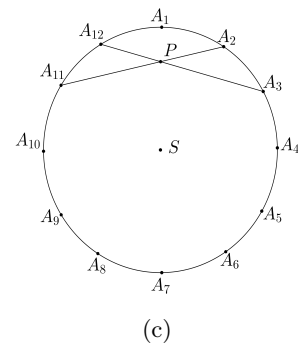
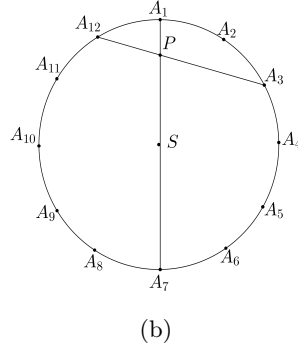
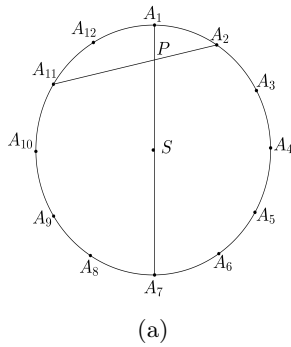
W tym rozdziale dokonamy kolejnych obserwacji, które pozwolą wyprowadzić oszacowanie liczby m_{2n} znacznie lepsze niż to z **Wniosku 2.1.1**.

3.1 Punkty wielokrotne na przekątnych będących osiami symetrii - różne od środka S

Zastanówmy się w jakich innych sytuacjach trzy przekątne w parzystokącie foremnym przecinają się w jednym punkcie. Mamy taką sytuację, jeśli dwie przekątne nie będące średnicami są symetryczne względem osi symetrii, którą jest przekątna będąca średnicą. Popatrzmy na rysunek poniżej.



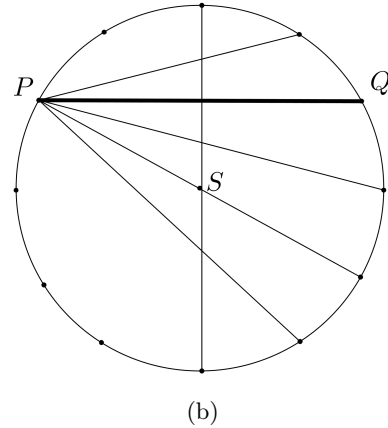
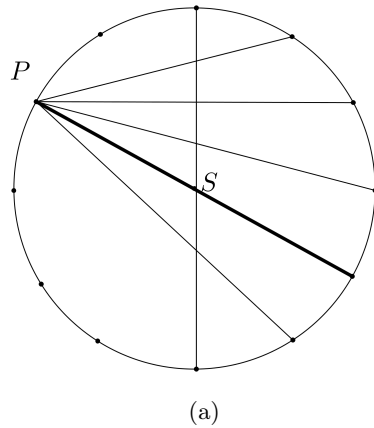
Przekątna A_2A_{11} w dwunastokącie foremnym jest symetryczna względem przekątnej A_1A_7 do przekątnej A_3A_{12} . Punkt P jest punktem wielokrotnym różnym od środka S dwunastokąta. Przyjrzyjmy się poniższym rysunkom.



Punkt P jest ten sam dla każdej przecinającej się pary przekątnych z rysunków (a), (b), (c). Każda taka para jest policzona jeden raz w wyrażeniu $\binom{2n}{4}$. Przy zliczaniu punktów przecięcia przekątnych można pominąć pary przekątnych takich jak na rysunkach: (a) i (b), ponieważ punkt przecięcia tych par jest taki sam jak punkt przecięcia pary na rysunku (c).

Wyznamy liczbę wszystkich par przekątnych takich jak na rysunkach (a) i (b). Są to takie pary przekątnych, w których jedna przekątna jest średnicą, zaś druga nie jest średnicą i nie przecina pierwszej prostopadle (bo wtedy jest symetryczna sama do siebie względem ustalonej przekątnej średnicy).

Przyjrzyjmy się poniższym rysunkom.



Ustalmy jedną przekątną będącą średnicą - na rysunkach jest to przekątna pionowa. Następnie ustalmy dowolny wierzchołek P leżący po wybranej stronie tej przekątnej (w tym przypadku po lewej jej stronie), punkt S będący środkiem okręgu opisanego na wielokącie foremnym oraz punkt Q leżący na okręgu na przeciwko punktowi P po prawej stronie ustalonej przekątnej - średnicy.

Ustalona przekątna - średnica dzieli wszystkie wierzchołki parzystokąta foremnego, których jest $2n$ na $n - 1$ wierzchołków po jej lewej stronie i $n - 1$ wierzchołków po jej prawej stronie.

Liczba przekątnych wychodzących z punktu P przecinających ustaloną przekątną - średnicę wynosi zatem $n - 1$.

Na rysunku (a) jedna z przekątnych wychodzących z punktu P (wyróżniona) przecina ustaloną przekątną - średnicę przechodzącą przez punkt S zatem jest średnicą okręgu. Liczba przekątnych wychodzących z punktu P z pominięciem przekątnej - średnicy wynosi $n - 2$.

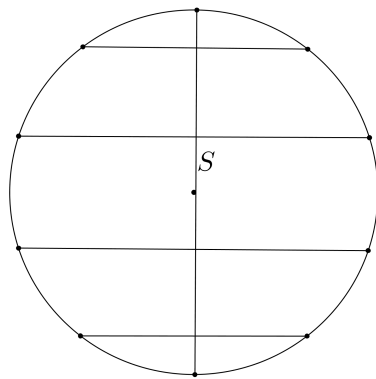
Na rysunku (b) wyróżniona przekątna PQ jest prostopadła (symetryczna sama do siebie) względem ustalonej przekątnej - średnicy. Nie ma więc przekątnej symetrycznej do PQ innej od niej samej, co oznacza, że punkt przecięcia tych przekątnych nie będzie punktem wielokrotnym o rozstrzyganym charakterze.

Dlatego liczba przekątnych wychodzących z punktu P z pominięciem przekątnej - średnicy oraz przekątnej prostopadłej względem ustalonej przekątnej - średnicy wynosi $n - 3$.

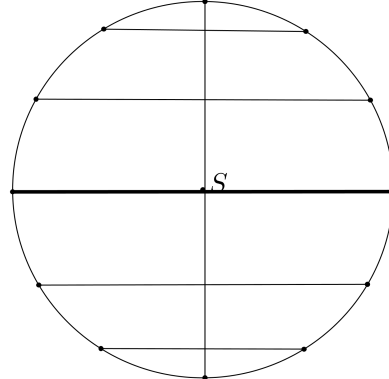
Z każdego z $n - 1$ wierzchołków po jednej stronie ustalonej przekątnej - średnicy, po wykluczeniu szczególnych przekątnych wyróżnionych na rysunkach (a) i (b), wychodzi $n - 3$ przekątnych.

A zatem liczba rozważanych par przekątnych, w których jedna jest ustaloną średnicą to $(n - 1)(n - 3)$. To spostrzeżenie jednak nie jest całkiem dokładne, i wymaga niewielkiej korekty.

Przypatrzmy się przekątnym prostopadłym (symetrycznym samemu do siebie względem ustalonej przekątnej-średnicy) w $2n$ -kątach foremnych. Rozpatrzmy przy tym dwa przypadki, w zależności od parzystości liczby n .



(a) n nieparzyste



(b) n parzyste

Zauważmy, że gdy n jest parzyste, wówczas jedna przekątna prostopadła do ustalonej przekątnej-średnicy sama też jest przekątną-średnicą, więc nie należy jej dwukrotnie wykluczać. Prowadzi to do poniższego wniosku.

Wniosek 3.1.1. 1. Jeśli n jest nieparzyste wówczas liczba par przekątnych, w których jedna jest ustaloną średnicą, zaś druga nie jest średnicą i nie jest prostopadła do pierwszej wynosi $(n - 1)(n - 3)$.

2. Jeśli n jest parzyste wówczas liczba par przekątnych, w których jedna jest ustaloną średnicą, zaś druga nie jest średnicą i nie jest prostopadła do pierwszej wynosi $(n - 1)(n - 3) + 1$ (bo dla jednego z wierzchołków przekątna prostopadła z niego wychodząca sama też jest przekątną-średnicą).

Biorąc pod uwagę wszystkie przekątne - średnice w $2n$ -kącie foremnym, których jest n , dostajemy poniższy wniosek.

Wniosek 3.1.2. *Liczba wszystkich przecinających się par przekątnych, z których jedna jest średnicą, zaś druga nie jest średnicą i nie przecina pierwszej prostopadle wynosi :*

1. $(n-1)(n-3)n$ dla n nieparzystych,
2. $((n-1)(n-3)+1)n$ dla n parzystych.

3.2 Wyprowadzenie nierówności

Aby uzyskać dokładniejsze oszacowanie liczby przecięć przekątnych niż we **Wniosku 2.1.1** w parzystokątach foremnych, należy od liczby $\binom{2n}{4}$

- odjąć nadmiar par przekątnych przecinających się w środku S parzystokąta foremnego

$$\binom{n}{2} - 1$$

- oraz odjąć pary przecinających się przekątnych nie wymagających zliczania opisanych w poprzednim podrozdziale

– dla n nieparzystych

$$((n-1)(n-3))n$$

– dla n parzystych

$$((n-1)(n-3)+1)n$$

Przez co otrzymujemy twierdzenie:

Twierdzenie 3.2.1. *W $2n$ -kątach foremnych*

1. *dla n nieparzystych*

$$m_{2n} \leq \binom{2n}{4} - \left(\binom{n}{2} - 1\right) - ((n-1)(n-3))n,$$

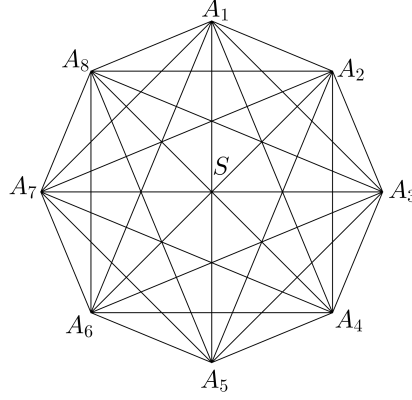
2. *dla n parzystych*

$$m_{2n} \leq \binom{2n}{4} - \left(\binom{n}{2} - 1\right) - ((n-1)(n-3)+1)n.$$

Uwaga 3.2.1. *W wyprowadzonej nierówności zachodzi równość gdy jedynymi punktami wielokrotnymi różnymi od środka są wyżej opisane punkty na średnicach i każdy taki punkt jest dokładnie trzykrotnym punktem przecięcia.*

3.3 Ilustracja na przykładach ośmiokąta foremnego i dziesięciokąta foremnego

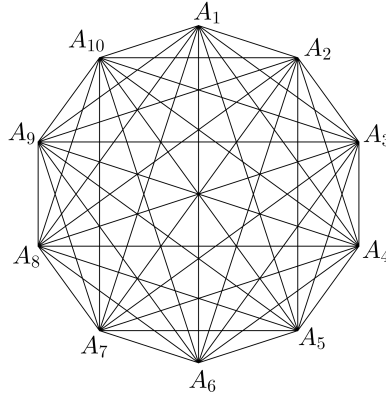
Przykład 3.3.1. Ośmiokąt foremny.



W ośmiokącie foremnym mamy punkty dwukrotne, punkty trzykrotne, i jeden punkt czterokrotny. Punkty trzykrotne występują tylko na średnicach, a punkt czterokrotny to środek S w którym przecinają się średnice. Ponieważ $n=4$ z **Twierdzenia 3.2.1 (2)** oraz z **Uwagi 3.2.1** otrzymujemy dokładną liczbę przecięć przekątnych:

$$m_8 = \binom{8}{4} - \left(\binom{4}{2} - 1\right) - ((4-1)(4-3) + 1)4 = 70 - 5 - 16 = 49$$

Przykład 3.3.2. Dziesięciokąt foremny.



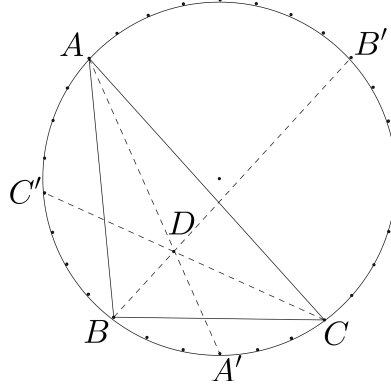
W dziesięciokącie foremnym mamy punkty dwukrotne, punkty trzykrotne, i jeden punkt pięciokrotny. Punkty trzykrotne występują tylko na średnicach, a punkt pięciokrotny to środek S w którym przecinają się średnice. Ponieważ $n=5$ z **Twierdzenia 3.2.1 (1)** oraz z **Uwagi 3.2.1** otrzymujemy dokładną liczbę przecięć przekątnych:

$$m_{10} = \binom{10}{4} - \left(\binom{5}{2} - 1\right) - (5-1)(5-3)5 = 210 - 9 - 40 = 161$$

3.4 Inne konfiguracje punktów wielokrotnych

Zastanówmy się w jakiej jeszcze innej sytuacji trzy przekątne parzystokąta foremnego przecinają się w jednym punkcie. Skorzystamy tutaj z tego, że dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

Na potrzeby tego rozdziału wprowadzimy termin **łuk jednostkowy**, którym jest dowolny fragment okręgu opisanego na wielokącie zawarty pomiędzy dwoma sąsiednimi wierzchołkami wielokąta.

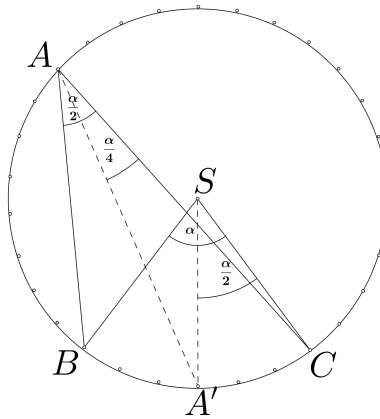


Rysunek 7: Dwusieczne kątów trójkąta ABC przecinają się w punkcie D .

Rozważmy trzy wierzchołki A, B, C $2n$ -kąta foremnego takie, że pomiędzy każdymi dwoma spośród nich na okręgu opisanym na wielokącie foremnym jest łuk złożony z parzystej liczby łuków jednostkowych. Sytuacja taka przedstawiona jest na **Rysunku 6** i dotyczy trzydziestokąta foremnego ($n=15$).

Przedstawimy ogólny opis dotyczący każdego $2n$ -kąta tylko ilustrowany na przykładzie trzydziestokąta.

Oznaczmy przez A', B', C' wierzchołki wielokąta foremnego które dzielą odpowiednie łuki BC, CA, AB na połowy (patrz Rysunek 6).



Skąd wiemy, że cięciwy AA', BB', CC' są dwusiecznymi trójkąta ABC wpisanego w okrąg? Rozważmy cięciwę AA' oraz kąt wpisany $\angle BAC$.

Oznaczmy przez α miarę kąta środkowego $\angle BSC$. Kąt wpisany $\angle BAC$ to połowa kąta środkowego $\angle BSC = \alpha$, $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$.

Kąt środkowy $\angle A'SC$ to połowa kąta środkowego $\angle BSC = \alpha$, $\angle A'SC = \frac{\alpha}{2}$ (bo kąt $\angle BSC$ oparty jest na trzech łukach jednostkowych, a kąt $\angle A'SC$ na sześciu łukach jednostkowych).

Kąt wpisany $\angle A'AC$ to połowa kąta środkowego $\angle A'SC = \frac{\alpha}{2}$, $\angle A'AC = \frac{\alpha}{4}$. Analogicznie postępujemy dla kąta wpisanego $\angle BAA'$ i otrzymujemy, że $\angle BAA' = \frac{\alpha}{4}$. Zatem $\angle A'AC = \angle BAA'$. Pokazaliśmy, że cięciwa AA' jest dwusieczną kąta $\angle BAC$. Podobnie postępujemy dla cięciw BB' i CC' .

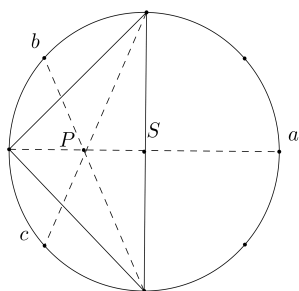
Taka sama argumentacja dotyczy dowolnego $2n$ -kąta foremego i przekątnych AA' , BB' , CC' postaci opisanej powyżej. Powyższe rozważanie prowadzi nas do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.4.1. *Miary kątów wpisanych opartych na łukach tej samej długości są równe.*

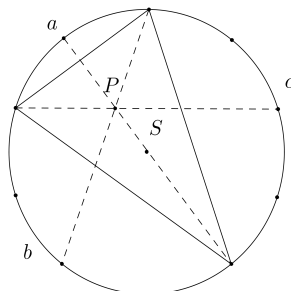
Na mocy tego, że dwusieczne kątów trójkąta przecinają się w jednym punkcie i **Twierdzenia 3.4.1** otrzymujemy, że cięciwy AA' , BB' , CC' są dwusiecznymi trójkąta ABC wpisanego w okrąg.

Zauważmy, że odpowiednie przekątne wielokąta foremnego to dwusieczne pewnego trójkąta, którego wierzchołkami są trzy wierzchołki wielokąta foremnego. A zatem punkt przecięcia się dwusiecznych takiego trójkąta to potencjalnie nowy typ punktu wielokrotnego.

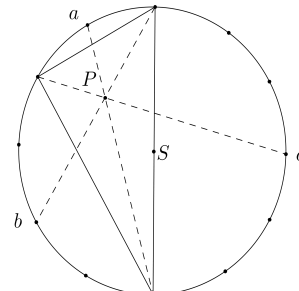
Zastanówmy się w jakich parzystokątach foremnych, będą występować takie trójkąty. Spójrzmy na rysunek 6. Zauważmy, że punkty A, B, C dzielą okrąg opisany na wielokącie foremnym na trzy łuki, gdzie w każdym zawartych jest parzyste wiele łuków jednostkowych. A zatem podział liczby $2n$ na trzy liczby parzyste a, b, c generuje trójkąt, którego dwusieczne są przekątnymi.



(a) W ośmiokącie foremnym wpisanym w okrąg $a=4$, $b=2$, $c=2$.



(b) W dziesięciokącie foremnym wpisanym w okrąg $a=2$, $b=4$, $c=4$.



(c) W dwunastokącie foremnym wpisanym w okrąg $a=2$, $b=4$, $c=6$.

Zauważmy, że jeśli dwie liczby spośród a, b, c są równe (np. $a = b$) to trójkąt jest równoramienny, a zatem jedna z dwusiecznych tego trójkąta jest średnicą (sytuacja taka występuje na rysunku (a) oraz (b) powyżej). Wtedy mamy do czynienia z punktem wielokrotnym na średnicy - co rozważaliśmy w poprzednim rozdziale.

Żeby uzyskać nowy rodzaj punktu wielokrotnego potrzebujemy parami różnych parzystych a, b, c - tak jak na rysunku (c). Wówczas ponownie będziemy mieli do czynienia z niepotrzebnie zliczanymi różnymi parami przekątnych mających punkty przecięcia w tym samym punkcie - innymi niż te uwzględnione w poprzednich rozdziałach.

Stąd, gdy w parzystokącie foremnym pojawia się tego rodzaju konfiguracja przekątnych, to w nierównościach z **Twierdzenia 3.2.1** będą ostre nierówności.

A zatem punktów wielokrotnych powstałych z przecięć przekątnych dwusiecznych jest tyle ile różnych trójkątów, których wierzchołki dzielą okrąg opisany na trzy łuki, gdzie każdy zawiera parzystą i różną liczbę łuków jednostkowych.

Rodzajów takich trójkątów będzie tyle ile rozkładów liczby $2n$ na trzy, parami różne, parzyste liczby, których suma wynosi $2n$.

Najmniejsza suma trzech liczb parzystych parami różnych wynosi 12, bo $2+4+6=12$. Stąd punkty wielokrotne powstałe z przecięcia się przekątnych - dwusiecznych inne od wcześniej poznanych występują w parzystokątach foremnych, gdzie liczba wierzchołków wynosi co najmniej 12. Dowolne liczby a, b, c muszą być co najmniej równe 2, 4, 6.

Dla poszczególnych parzystokątów otrzymujemy:

$2n$ -kąt foremny	liczba rodzajów trójkątów	wartości a, b, c
12	1	2, 4, 6
14	1	2, 4, 8
16	2	2, 4, 10 2, 6, 8
18	3	2, 4, 12 2, 6, 10 4, 6, 8
20	4	2, 4, 14 2, 6, 12 2, 8, 10 4, 6, 10
...	...	...

Nie wiemy jednak czy punkt wielokrotny z danego rodzaju trójkąta nie nakłada się na punkt wielokrotny innego typu, jeśli inny typ istnieje.

Powyższe obserwacje pokazują, że nie jesteśmy w stanie łatwo ocenić ile dokładnie jest punktów wielokrotnych w parzystokątach foremnych, z tego powodu jesteśmy w stanie stwierdzić jedynie, że w nierówności z **Twierdzenia 3.2.1** zachodzi ostra nierówność, dla $2n$ -kątów foremnych, gdzie $2n \geq 12$.

Otrzymujemy twierdzenie.

Twierdzenie 3.4.2. *W $2n$ -kątach foremnych, gdzie $2n \geq 12$*

1. *dla n nieparzystych*

$$m_{2n} < \binom{2n}{4} - \left(\binom{n}{2} - 1\right) - ((n-1)(n-3))n,$$

2. *dla n parzystych*

$$m_{2n} < \binom{2n}{4} - \left(\binom{n}{2} - 1\right) - ((n-1)(n-3) + 1)n.$$

4 Wzór Bjorna Poonena i Michaela Rubinsteina

Matematycy Bjorn Poonen i Michael Rubinstein w swojej pracy "The number of intersection points made by the diagonals of a regular polygon" [1] umieścili wzór na liczbę przecięć przekątnych w wielokątach foremnych.

Zdefiniowali oni poniższą funkcję:

$$\delta_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \pmod{m} = 0 \\ 0 & \text{gdy } n \pmod{m} \neq 0 \end{cases}$$

Liczbę przecięć przekątnych w n -kącie foremnym oznaczyli przez $I(n)$, i dla $n \geq 3$ otrzymali wzór:

$$\begin{aligned} I(n) = & \binom{n}{4} + (-5n^3 + 45n^2 - 70n + 24)/24 \cdot \delta_2(n) - 3n/2 \cdot \delta_4(n) \\ & + (-45n^2 + 262n)/6 \cdot \delta_6(n) + 42n \cdot \delta_{12}(n) + 60n \cdot \delta_{18}(n) \\ & + 35n \cdot \delta_{24}(n) - 38n \cdot \delta_{30}(n) - 82n \cdot \delta_{42}(n) - 330n \cdot \delta_{60}(n) \\ & - 144n \cdot \delta_{84}(n) - 96n \cdot \delta_{90}(n) - 144n \cdot \delta_{120}(n) - 96n \cdot \delta_{210}(n). \end{aligned}$$

Sprawdźmy czy zachodzi równość dla ośmiokąta foremnego i dziesięciokąta foremnego pomiędzy liczbą uzyskaną w **Rozdziale 3** liczbą m_8 i m_{10} , a liczbami $I(8)$ i $I(10)$ ze wzoru Poonena i Rubinsteina. Ponadto przy pomocy wzoru na $I(2n)$ sprawdzimy jak dokładne jest oszacowanie górne liczby m_{2n} **Twierdzenia 3.4.2** dla $2n \geq 12$.

Dla ośmiokąta foremnego:

$$I(8) = \binom{8}{4} + (-5 \cdot 8^3 + 45 \cdot 8^2 - 70 \cdot 8 + 24)/24 \cdot \delta_2(8) - 3 \cdot 8/2 \cdot \delta_4(8) = 70 - 9 - 12 = 49 = m_8.$$

Dla dziesięciokąta foremnego:

$$I(10) = \binom{10}{4} + (-5 \cdot 10^3 + 45 \cdot 10^2 - 70 \cdot 10 + 24)/24 \cdot \delta_2(10) = 210 - 49 = 161 = m_{10}.$$

Pokazaliśmy, że $I(8) = m_8$ i $I(10) = m_{10}$ zatem wzór na liczbę przecięć przekątnych w ośmiokącie i dziesięciokącie foremnym wyprowadzony w **Podrozdziale 3.2** oraz zilustrowany w **Podrozdziale 3.3** jest prawdziwy.

Sprawdźmy zatem przy pomocy wzoru Bjorna Poonena i Michaela Rubinsteina jak dokładne jest oszacowanie liczby m_{2n} uzyskane w **Twierdzeniu 3.4.2**.

2n-kąt foremny	Liczba $I(2n)$	Oszacowanie liczby m_{2n}
12	301	401
14	757	813
16	1377	1505
18	1837	2593
20	3841	4170
...	...	...

Powyższe wyniki są dowodem na to, że obecność konfiguracji opisanych w **Podrozdziale 3.4** ma istotny wpływ na różnicę pomiędzy wielkościami $\binom{2n}{4}$ i m_{2n} , a być może wpływ taki ma także obecność innych jeszcze konfiguracji rozmieszczenia punktów wielokrotnych od opisanych w tej pracy. Po powyższej analizie możemy też stwierdzić, że w istocie zachodzi **Twierdzenie 3.4.2**.

References

- [1] Michael Rubinstein Bjorn Poonen. *The number of intersection points made by the diagonals of a regular polygon*. URL: <http://www-math.mit.edu/~poonen/papers/ngon.pdf>.
- [2] Wojciech Guzicki. *O przekątnych wielokątów foremnych*. URL: http://www.konwersatorium.pw.edu.pl/wyklady/popularne/2010_wpopularne_guzicki.pdf.