

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: Matematyka teoretyczna

Jagna Olszewska, Bartosz Szachniewicz, Krzysztof Szymański

Klasyfikacja zwartych 2-rozmaitości teorią Morse'a

Praca na zespołowy projekt specjalnościowy
napisana pod kierunkiem
prof. Jacka Świątkowskiego

Wrocław, rok 2025

Streszczenie

Niniejsza praca dzieli się na trzy części. W części pierwszej (rozdziały 1 i 2) sformuowaliśmy i udowodniliśmy przydatne fakty, z których będziemy korzystać oraz przywołaliśmy pewne definicje. Druga część (rozdział 3) to wprowadzenie do teorii Morse’a ze szczególnym uwzględnieniem interesującego nas przypadku 2-rozmaitości. Część trzecia (rozdział 4) natomiast to główny cel naszej pracy, czyli klasyfikacja zwartych 2-rozmaitości za pomocą teorii Morse’a.

Spis treści

1	Wprowadzenie	2
1.1	Przykłady na początek	2
1.2	Wycinanie dysku i suma spójna	5
2	Kilka przydatnych homeomorfizmów	6
3	Wprowadzenie do teorii Morse’a	8
3.1	Przypadek 2-rozmaitości	9
4	Klasyfikacja zwartych 2-rozmaitości	9
4.1	Sformułowanie Twierdzenia	9
4.2	Dowód Twierdzenia 4.1	10
4.2.1	Baza indukcji	10
4.2.2	Doklejanie 0-rączek	10
4.2.3	Doklejanie 1-rączek	10
4.2.4	Doklejanie 2-rączek	13
4.2.5	Podsumowanie	13
4.3	Różność powierzchni	14
4.4	Klasyfikacja zwartych 2-rozmaitości z brzegiem	14

Wstęp

Praca została napisana w ramach przedmiotu Zespołowy projekt specjalnościowy prowadzonym przez prof. Jacka Świątkowskiego w semestrze zimowym roku akademickiego 2024/2025. Naszym celem było zapoznanie się z teorią Morse’a. Pozwala ona badać topologię rozmaitości poprzez analizę funkcji różniczkowalnych na tejże rozmaitości. Zdobytą wiedzę wykorzystaliśmy do sklasyfikowania zwartych 2-rozmaitości. Inspisacją do napisania pracy oraz dużą pomocą merytoryczną okazała się książka *Morse Theory* autorstwa Johna Willarda Milnora [2].

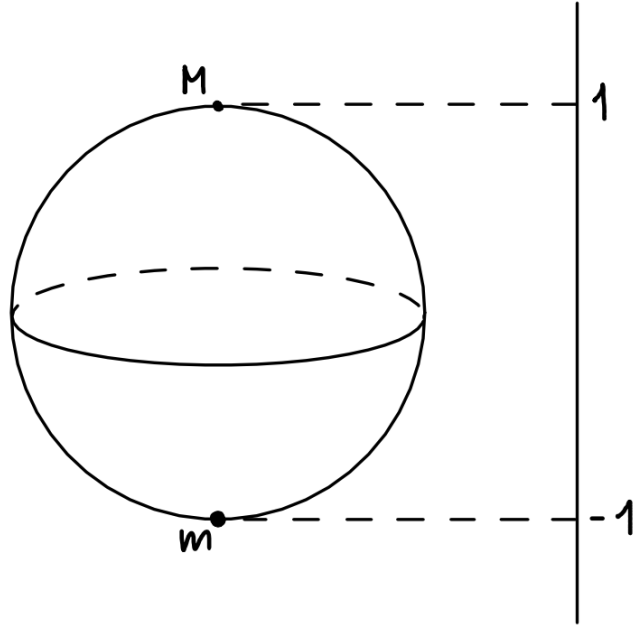
1 Wprowadzenie

1.1 Przykłady na początek

Zanim zaczniemy wprowadzać teorię Morse’a w sposób formalny przywołajmy trzy proste przykłady z [3], aby zobrazować istotę problemu. Niech M będzie 2-rozmaitością zanurzoną w $\mathbb{R}^3$. Będziemy rozważać funkcję wysokości $h: \mathbb{R}^3 \supseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem $h(x, y, z) = z$.

Przykład 1.1. Rozważmy kulę jednostkową $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Bieguny to oczywiście jedyne punkty krytyczne (minimum m i maksimum M). Sfera $\mathbb{S}^2$ jest zobrazowana na Rysunku 1. Mamy:

$$h^{-1}((-\infty, z]) = \begin{cases} \emptyset & \text{jeśli } z < -1 \\ \{(0, 0, -1)\} & \text{jeśli } z = -1 \\ \mathbb{D}^2 & \text{jeśli } -1 < z < 1 \\ \mathbb{S}^2 & \text{jeśli } z \geq 1 \end{cases}$$



Rysunek 1: Rysunek poglądowy $\mathbb{S}^2$ z Przykładu 1.1.

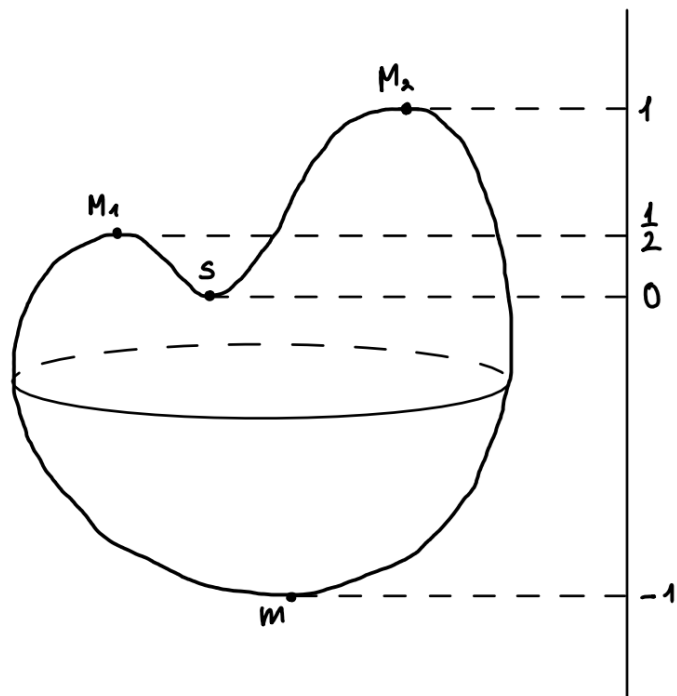
Widzimy, że przy „przejściu” przez pierwszy punkt krytyczny m („biegun południowy”, minimum) $h^{-1}((-\infty, z])$ jest homeomorficzne z dyskiem $\mathbb{D}^2$, co jest homotopijnie równoważne punktowi (0-rączce) doklejonemu do zbioru pustego. Natomiast przy przejściu przez drugi punkt krytyczny M („biegun północny”, maksimum) $h^{-1}((-\infty, z])$ staje się sferą, co odpowiada doklejeniu 2-rączki.

Przykład 1.2. Rozważmy „zdeformowaną” sferę S , widoczną na Rysunku 2. Jest ona oczywiście homeomorficzna ze sferą jednostkową $\mathbb{S}^2$ z Przykładu 1.1. Widzimy jednak, że S ma więcej punktów krytycznych (minimum m , punkt siodłowy s i dwa maksima M_1 i M_2), więc $h^{-1}((-\infty, z])$ będzie wyglądać inaczej. Mamy:

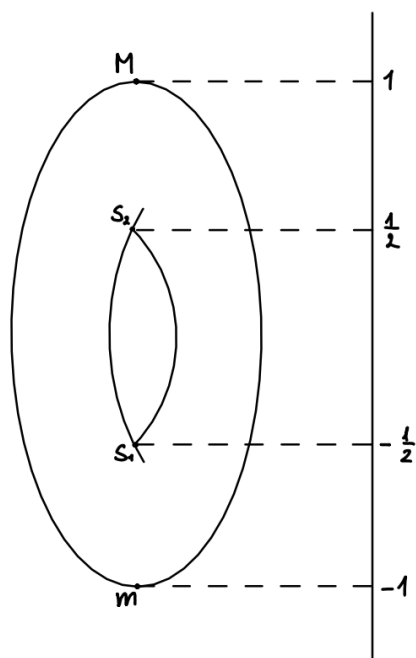
$$h^{-1}((-\infty, z]) = \begin{cases} \emptyset & \text{jeśli } z < -1 \\ \{m\} & \text{jeśli } z = -1 \\ \mathbb{D}^2 & \text{jeśli } -1 < z < 0 \\ \mathbb{D}^2 \text{ ze sklejonymi dwoma punktami brzegu} & \text{jeśli } z = 0 \\ \mathbb{S} \times I & \text{jeśli } 0 < z < \frac{1}{2} \\ \mathbb{D}^2 & \text{jeśli } \frac{1}{2} \leq z < 1 \\ S & \text{jeśli } z \geq 1 \end{cases}$$

Przy „prześciu” przez punkt krytyczny m , tak jak w Przykładzie 1.1 $h^{-1}((-\infty, z])$ jest homeomorficzne z dyskiem $\mathbb{D}^2$, co jest homotopijnie równoważne punktowi (0-rączki) doklejonemu do zbioru pustego. Jednak następny punkt krytyczny s odpowiada doklejeniu 1-rączki do dysku $\mathbb{D}^2$. Jest to homotopijne równoważne $\mathbb{S} \times I$, czyli cylindrowi. Dwa ostatnie punkty krytyczne to maksima M_1 i M_2 . „Przejście” przez nie odpowiada doklejeniu dwóch dysków, czyli 2-rączek. Widzimy, że każdy doklejony dysk „zalepia” pewną istniejącą dziurę.

Przykład 1.3. Rozważmy torus „postawiony” pionowo [Rysunek 3]. Posiada on 4 punkty krytyczne (minimum m , maksimum M i dwa punkty siodłowe s_1 i s_2). Mamy:



Rysunek 2: Rysunek poglądowy S z Przykładu 1.2.



Rysunek 3: Rysunek poglądowy torusa z Przykładu 1.3.

$$h^{-1}((-\infty, z]) = \begin{cases} \emptyset & \text{jeśli } z < -1 \\ \{m\} & \text{jeśli } z = -1 \\ \mathbb{D}^2 & \text{jeśli } -1 < z < \frac{1}{2} \\ \mathbb{D}^2 \text{ ze sklejonymi dwoma punktami brzegu} & \text{jeśli } z = -\frac{1}{2} \\ \mathbb{S} \times I & \text{jeśli } -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2} \\ \mathbb{S} \times I \text{ z brzegami sklejonymi w punkcie} & \text{jeśli } z = \frac{1}{2} \\ \mathbb{T}^2 \text{ bez dysku na górze} & \text{jeśli } \frac{1}{2} < z < 1 \\ \mathbb{T}^2 & \text{jeśli } z \geq 1 \end{cases}$$

Przy „prześciu” przez punkt krytyczny m , tak jak w Przykładach 1.1 i 1.2 $h^{-1}((-\infty, z])$ jest homeomorficzne z dyskiem $\mathbb{D}^2$, co jest homotopijnie równoważne punktowi (0-rączce) doklejonemu do zbioru pustego. Przy przejściu przez drugi punkt krytyczny s_1 , również jak w Przykładzie 1.2 doklejamy 1-rączkę do dysku $\mathbb{D}^2$. Jest to homotopijne równoważne $\mathbb{S} \times I$ czyli cylindrowi. Kolejnym punktem krytycznym jest drugi punkt siodłowy s_2 , co odpowiada doklejeniu 1-rączki do dwóch „końców” cylindra. Na końcu mamy maksimum M , które, jak w Przykładach 1.1 i 1.2, odpowiada doklejeniu 2-rączki zaklejając ostatnią dziurę w torusie.

W powyższych przykładach widzimy pewne zależności. Pierwszym punktem krytycznym zawsze jest minimum, a ostatnim zawsze maksimum. Dodatkowo minimum odpowiada doklejeniu 0-rączki, punkt siodłowy doklejeniu 1-rączki, a maksimum 2-rączki. Okazuje się, że istotnie zawsze jest to prawda, co pokażemy w dalszej części pracy.

1.2 Wycinanie dysku i suma spójna

Zanim postawimy główną tezę pracy, musimy zdefiniować operacje, których będziemy używać.

Definicja 1.4. Niech X będzie p. topologiczną. Powiemy, że podprzestrzeń domknięta $Y \subseteq X$ jest *dyskowa*, gdy istnieje otoczenie $U \supseteq Y$ t. że istnieje homeomorfizm pary (Y, U) na $(\mathbb{D}^2, B(0, 2))$, gdzie $B(0, 2)$ oznacza kulę o promieniu 2 wokół 0.

W powyższej definicji można zastąpić $B(0, 2)$ dowolnym otwartym, ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^2$.

Fakt 1.5. Niech M będzie 2-rozmaitością (być może z brzegiem) oraz niech X_1, X_2 będą dyskowymi podprzestrzeniami. Wtedy $M \setminus X_1$ jest homeomorficzne z $M \setminus X_2$. Ponadto, obie te przestrzenie są 2-rozmaitościami z brzegiem, który powstaje z ∂M przez dodanie jednej składowej spójności. Tak powstałą 2-rozmaitość z brzegiem oznaczamy przez $M \setminus \mathbb{D}^2$.

Możemy teraz zdefiniować najważniejszą w tej operację operację.

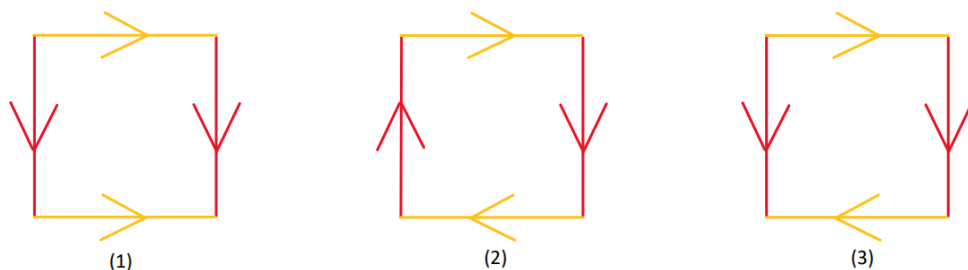
Definicja 1.6. Niech M_1, M_2 będą 2-rozmaitościami (być może z brzegiem). Suma spójna $M_1 \# M_2$ to 2-rozmaitość powstała przez wycięcie z M_1 oraz M_2 podzbiorów dyskowych oraz połączenie ich wzdłuż powstałej składowej spójności.

2 Kilka przydatnych homeomorfizmów

W niniejszej pracy będziemy stosować następujące oznaczenia:

- Torus – $\mathbb{T}^2$
- Rzeczywista płaszczyzna rzutowa – $\mathbb{RP}^2$
- Butelka Kleina – K_2

Obiekty, które będziemy opisywać w tej sekcji powstają przez pewne utożsamienie boków kwadratu. Są one przedstawione na Rysunku 4.



Rysunek 4: Utożsamiamy boki zgodnie z kolorem boków i kierunkiem strzałek. [$\mathbb{T}^2$ – (1), $\mathbb{RP}^2$ – (2), K_2 – (3)]

Lemat 2.1. *Butelka Kleina K_2 jest homeomorficzna z $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.*

Dowód. Wykonujemy poniższy ciąg operacji na prezentacji K_2 :

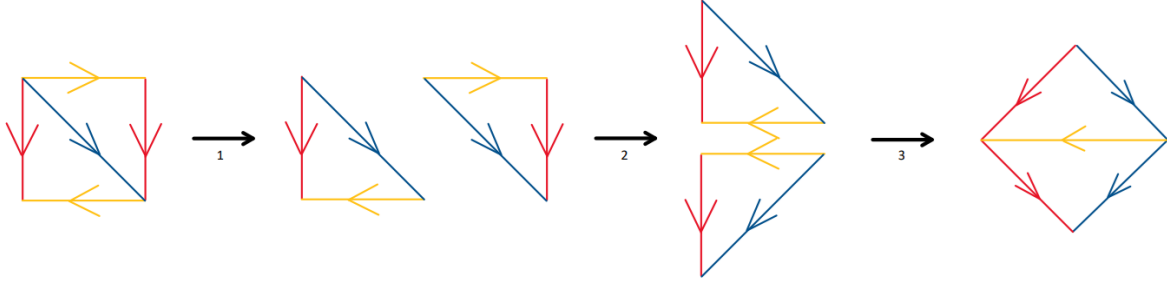
1. Rozcinamy kwadrat wzdłuż głównej przekątnej zorientowanej w ustalonym kierunku.
2. Obracamy jeden z powstałych trójkątów.
3. „Sklejamy” wzdłuż krawędzi, która pierwotnie była bokiem.

Powyższa procedura jest zobrazowana na Rysunku 5. Następnie wykonujemy poniższe operacje na prezentacji $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$:

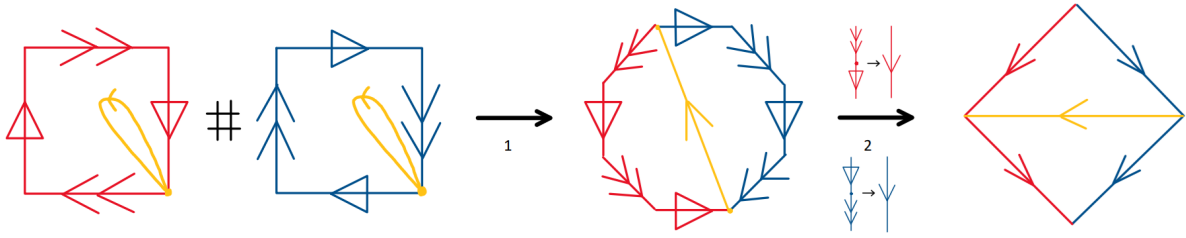
1. Wycinamy z każdej płaszczyzny rzutowej po niewielkim dysku. Brzeg dysku jest zorientowany w ustalonym kierunku. „Sklejamy” figury wzdłuż powstałego brzegu.
2. Stosujemy utożsamienie par sąsiednich boków powstałego ośmiokąta w nowe cztery boki. [Utożsamienia są widoczne na Rysunku 6.]

Wszystkie operacje, których użyliśmy zmieniają jedynie prezentacje obiektów, a nie faktyczne obiekty. Wskutek tych modyfikacji uzyskaliśmy dwie takie same prezentacje, zatem istotnie mamy do czynienia z homeomorficznymi obiektami. $\square$

Twierdzenie 2.2. $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2$ jest homeomorficzne z $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$.



Rysunek 5: Modyfikacja K_2 opisana w Lemacie 2.1. Czarne strzałki odpowiadają kolejnym krokom procedury.



Rysunek 6: Modyfikacja $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ opisana w Lemacie 2.1. Czarne strzałki odpowiadają kolejnym krokom procedury.

Dowód. Na mocy Lematu 2.1 teza twierdzenia jest równoważna zależności:

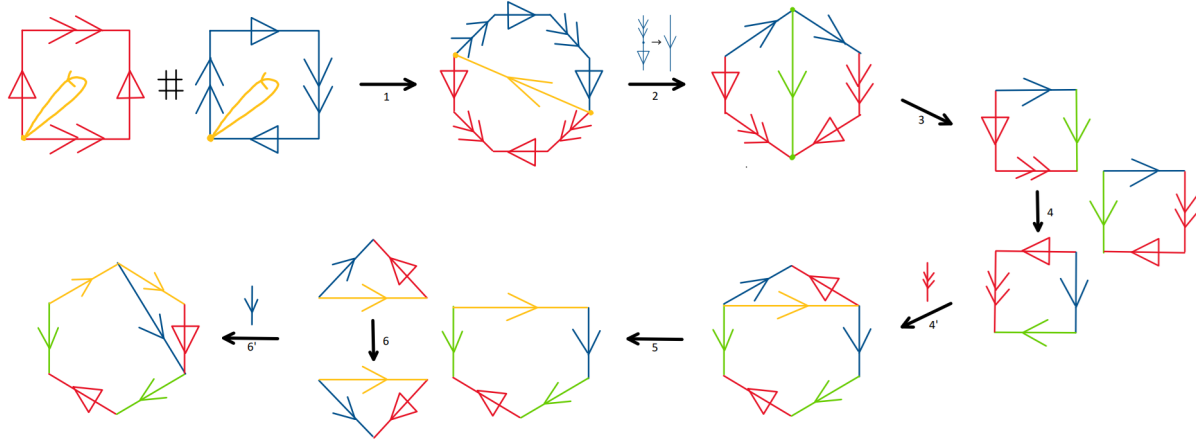
$$\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2 \cong K_2 \# \mathbb{RP}^2.$$

Wykonujemy następujące operacje na prezentacji $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2$ [Szczegóły wykonanych rozcięć, sklejeń, obrotów i utożsamień są widoczne na Rysunku 7]:

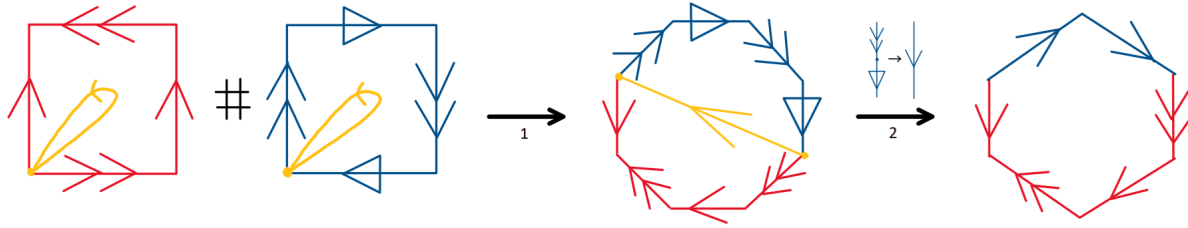
1. Wycinamy z $\mathbb{T}^2$ i z $\mathbb{RP}^2$ po niewielkim dysku. Brzeg dysku jest zorientowany w ustalonym kierunku. „Sklejamy” figury wzdłuż powstałego brzegu.
2. Stosujemy utożsamienie boków, które należały do płaszczyzny rzutowej w nowe, tworząc sześciokąt.
3. Rozcinamy sześciokąt wzdłuż jednej z dłuższych przekątnych zorientowanej w ustalonym kierunku.
4. Obracamy jeden z powstałych kwadratów.
- 4'. „Sklejamy” wzdłuż krawędzi, która pierwotnie była bokiem torusa.
5. Rozcinamy sześciokąt wzdłuż jednej z krótszych przekątnych zorientowanej w ustalonym kierunku.
6. Obracamy powstały trójkąt.
- 6'. „Sklejamy” wzdłuż jednej z krawędzi.

Następnie wykonujemy poniższe operacje na prezentacji $K_2 \# \mathbb{RP}^2$:

1. Wycinamy z K_2 i z $\mathbb{RP}^2$ po niewielkim dysku. Brzeg dysku jest zorientowany w ustalonym kierunku. „Sklejamy” figury wzdłuż powstałego brzegu.
2. Stosujemy utożsamienie boków, które należały do płaszczyzny rzutowej w nowe, tworząc sześciokąt. [Utożsamienie jest widoczne na Rysunku 8.]



Rysunek 7: Modyfikacja $T^2 \# \mathbb{RP}^2$ opisana w Twierdzeniu 2.2. Czarne strzałki odpowiadają kolejnym krokom procedury.



Rysunek 8: Modyfikacja $K_2 \# \mathbb{RP}^2$ opisana w Twierdzeniu 2.2. Czarne strzałki odpowiadają kolejnym krokom procedury.

Wszystkie operacje, których użyliśmy zmieniają jedynie prezentacje obiektów, a nie faktyczne obiekty. Wskutek tych modyfikacji uzyskaliśmy dwie takie same prezentacje (patrz Rysunki 7 i 8, strzałki są innych kolorów, ale są ułożone tak samo), zatem istotnie mamy do czynienia z homeomorficznymi obiektami. $\square$

3 Wprowadzenie do teorii Morse'a

Będziemy korzystać z kilku lematów teorii Morse'a, które cytujemy za [2].

Fakt 3.1. *Dla dowolnej zwartej, gładkiej rozmaitości M istnieje funkcja Morse'a, tzn. funkcja gładka*

$$f : M \rightarrow \mathbb{R},$$

która ma skończenie wiele izolowanych punktów krytycznych. Dodatkowo wszystkie te punkty są niezdegenerowane, a w tych punktach funkcja f przyjmuje różne wartości.

W tej definicji *niezdegenerowane* oznacza, że drugie pochodne w lokalnych współrzędnych tworzą macierz odwracalną. Wprowadzimy przydatne oznaczenia

$$M^a := f^{-1}(-\infty, a]$$

$$M^{[a,b]} := f^{-1}[a, b].$$

Fakt 3.2. *Jeśli a nie jest wartością krytyczną funkcji f , to M^a jest podrozmaitością M tego samego wymiaru. Brzeg tej podrozmaitości ∂M^a odpowiada zbiorowi $f^{-1}(a)$.*

3.1 Przypadek 2-rozmaitości

Kluczowe dla klasyfikacji powierzchni będzie poniższe Twierdzenie.

Twierdzenie 3.3. *Dowolną zwartą, zamkniętą 2-rozmaitość możemy zbudować poprzez ciąg domkniętych podrozmaitości*

$$\emptyset = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_k = M,$$

w którym M_{i+1} jest homeomorficzne z M zmodyfikowanym na jeden z trzech sposobów, które będziemy określać ruchami:

1. *Dłożenie w sposób rozłączny dysku $\mathbb{D}^2$. Nazwiemy to doklejeniem 0-rączki.*
2. *Doklejenie do budowanej rozmaitości paska $I \times I$ włożeniem podprzestrzeni $I \times \{0, 1\}$ na ∂M_i . Nazwiemy to doklejeniem 1-rączki.*
3. *Doklejenie dysku $\mathbb{D}^2$ poprzez homeomorfizm brzegu $\partial \mathbb{D}^2$ z jedną ze składowych ∂M_i . Nazwiemy to doklejeniem 2-rączki.*

Uwaga. Terminologia *doklejania λ -rączki* bierze się z dwóch źródeł: po pierwsze, λ jesteśmy w stanie odczytać z tego, jak rozmaitość wygląda w lokalnych współrzędnych. Po drugie, w ujęciu teorii Morse'a, z którego korzystamy [2], Twierdzenie 3.3 jest użyte do wyliczenia CW-kompleksu homotopijnie równoważnego M . Okazuje się, że λ -rączka w naszym sensie odpowiada dokładnie λ komórce w sensie CW-kompleksu.

Twierdzenie 3.3 można udowodnić, biorąc konkretną funkcję Morse'a z Faktu 3.1 i patrząc, co się dzieje przy przekraczaniu konkretnej wartości krytycznej.

Twierdzenie 3.4. *Niech f będzie funkcją Morse'a na M . Jeśli przedział $[a, b]$ zawiera dokładnie jedną wartość krytyczną, to M^b jest homeomorficzne z M^a , zmodyfikowanym na jeden ze sposobów wymienionych w Twierdzeniu 3.3.*

4 Klasyfikacja zwartych 2-rozmaitości

4.1 Sformułowanie Twierdzenia

Notacja. W twierdzeniu poniżej uznajemy sferę $\mathbb{S}^2$ za *pustą sumę spójną*, tzn. sumę spójną 0 torusów (lub 0 płaszczyzn rzutowych). $\mathbb{N}_0$ oznaczać będzie liczby naturalne włącznie z zerem. Dla rozmaitości M zapis $M \setminus \mathbb{D}^2$ oznaczać będzie rozmaitość M z wyciętym dyskiem $\mathbb{D}^2$. Jednocześnie oznacza to dłożenie do naszej rozmaitości brzegu $\mathbb{S}^1$.

Naszym celem w tym paragrafie będzie udowodnienie poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 4.1. *Każda zwarta, zamknięta i spójna 2-rozmaitość może być przedstawiona w postaci*

$$\#^n \mathbb{T}^2, \quad n \geq 0 \quad \text{lub w postaci} \quad \#^n \mathbb{RP}^2, \quad n \geq 1$$

dla pewnego $n \in \mathbb{N}_0$, w zależności od tego, czy jest orientowalna. Ponadto żadne dwie z wypisanych wyżej powierzchni nie są homeomorficzne.

Okazuje się, że nie jest trudne uogólnienie powyższego twierdzenia na przypadek rozmaitości z brzegiem. Dowód poniższego twierdzenia odkładamy do ostatniego podparagrafu.

Twierdzenie 4.2. *Każda zwarta, zamknięta i spójna 2-rozmaitość może być przedstawiona w postaci*

$$\#_{i=0}^n \mathbb{T}^2 \setminus k\mathbb{D}^2$$

lub w postaci

$$\#_{i=1}^n \mathbb{RP}^2 \setminus k\mathbb{D}^2,$$

dla pewnych $k, n \in \mathbb{N}_0$, w zależności od tego, czy jest orientowalna.

4.2 Dowód Twierdzenia 4.1

Dzięki Twierdzeniu 3.3 przeprowadzimy nasz dowód bez bezpośredniego korzystania z teorii Morse'a.

Niech c_i, c_{i+1} będą kolejnymi wartościami krytycznymi funkcji Morse'a f . Nasz dowód indukcyjny będzie polegać na doklejaniu do rozmaitości z brzegiem $M^{c_i+\varepsilon}$, λ -rączkę odpowiadającą wartości krytycznej c_{i+1} .

Ponieważ możemy doklejać λ -rączki na więcej niż jeden sposób, będziemy mieli wiele kroków indukcyjnych. Dla ułatwienia dowodu wzmocnimy też tezę indukcyjną:

Wzmocnione twierdzenie, którego dowód przeprowadzimy. Niech $\mathbb{RP}_{\#n}^2 \# \mathbb{T}_{\#m}^2 \setminus k\mathbb{D}^2$ oznacza rozmaitość z brzegiem

$$(\#_{i=0}^n \mathbb{RP}^2 \# \#_{i=0}^m \mathbb{T}^2) \setminus k\mathbb{D}^2,$$

gdzie $\#_{i=0}^0 \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^2, n, m, k \in \mathbb{N}_0$ oraz $\#_{i=0}^n \mathbb{RP}^2 = \mathbb{S}^2$. Wówczas dla dowolnego punktu krytycznego c_i funkcji Morse'a f , dowolna spójna składowa $M^{c_i+\varepsilon}$ jest postaci $\mathbb{RP}_{\#n}^2 \# \mathbb{T}_{\#m}^2 \setminus k\mathbb{D}^2$.

4.2.1 Baza indukcji

Niech a będzie najmniejszym punktem krytycznym funkcji Morse'a f . Wówczas rozważany punkt jest 0-rączką. Oznacza to, że jest on homeomorficzny z dyskiem $\mathbb{D}^2$, który z kolei jest homeomorficzny z rozmaitością z brzegiem $\mathbb{S}^2 \setminus \mathbb{D}^2$. Rozmaitość ta może być zapisana w postaci $\mathbb{RP}_{\#0}^2 \# \mathbb{T}_{\#0}^2 \setminus \mathbb{D}^2$.

4.2.2 Doklejanie 0-rączek

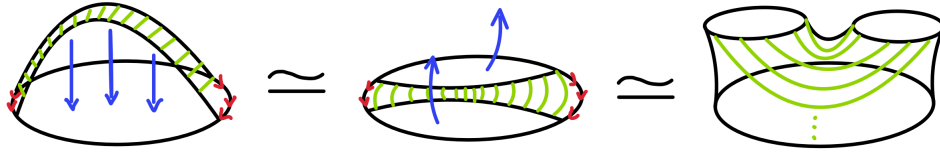
Niech punktowi krytycznemu c_{i+1} odpowiada 0-rączka. Na mocy założenia indukcyjnego nasza rozmaitość $M^{c_i+\varepsilon}$ jest sumą spójnych składowych, każda postaci $\mathbb{RP}_{\#n}^2 \# \mathbb{T}_{\#m}^2 \setminus k\mathbb{D}^2$. Ponieważ 0-rączka może być dołączona do rozmaitości $M^{c_i+\varepsilon}$ jedynie poprzez dodanie nowej spójnej składowej $\mathbb{RP}_{\#0}^2 \# \mathbb{T}_{\#0}^2 \setminus \mathbb{D}^2$, nasza rozmaitość $M^{c_{i+1}+\varepsilon}$ spełnia założenie indukcyjne.

4.2.3 Doklejanie 1-rączek

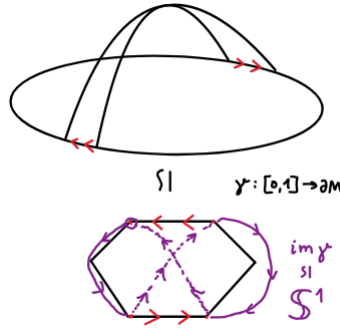
Niech punkt krytyczny c_{i+1} odpowiada 1-rączce. Na mocy założenia indukcyjnego wiemy, że $M^{c_i+\varepsilon}$ jest sumą spójnych składowych postaci $\mathbb{RP}_{\#n}^2 \# \mathbb{T}_{\#m}^2 \setminus k\mathbb{D}^2$. Na mocy Twierdzenia 3.3 doklejenie 1-rączki można zrealizować na 5 sposobów:

1. Doklejenie 1-rączki do pojedynczego okręgu brzegowego w orientowalny sposób.

Na podstawie obrazka 9 wnioskujemy, że spójna składowa, do której dokleiliśmy naszą 1-rączkę zyskała dodatkową dziurę. Oznacza to, że spójna składowa $\mathbb{RP}_{\#n}^2 \# \mathbb{T}_{\#m}^2 \setminus d\mathbb{D}^2$ po doklejeniu 1-rączki w wyżej opisany sposób jest homomorficzna z rozmaitością postaci $\mathbb{RP}_{\#n}^2 \# \mathbb{T}_{\#m}^2 \setminus (k+1)\mathbb{D}^2$.



Rysunek 9: Doklejenie 1-rączki do pojedynczego okręgu brzegowego w orientowalny sposób.



Rysunek 10: Doklejenie 1-rączki do pojedynczego okręgu brzegowego w nieorientowalny sposób.

2. Doklejenie 1-rączki do pojedynczego okręgu brzegowego w nieorientowalny sposób.

Na podstawie rysunku 10 wnioskujemy, że spójna składowa, do której dokleiliśmy naszą 1-rączkę nie zyskała nowych dziur, natomiast jeśli wcześniej była orientowalna, to teraz tę własność straciła. Wnioskujemy, że spójna składowa postaci $\mathbb{RP}^2_{\#n} \# \mathbb{T}^2_{\#m} \setminus k\mathbb{D}^2$ została spójną składową postaci $\mathbb{RP}^2_{\#(n+1)} \# \mathbb{T}^2_{\#m} \setminus k\mathbb{D}^2$. Taka spójna składowa spełnia nasze założenie indukcyjne.

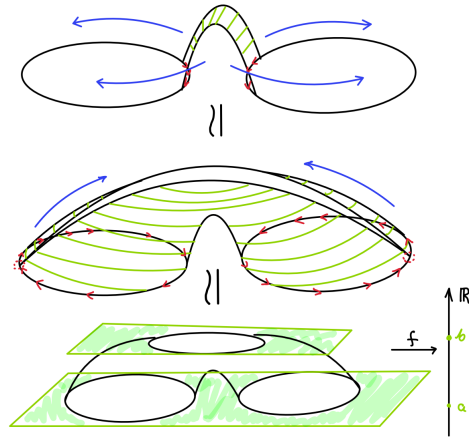
Dodatkowa $\mathbb{RP}^2$ pojawia się z następującego powodu: jeśli składową brzegu wraz z otoczeniem *oderwiemy* od rozmaitości, otrzymamy $\mathbb{S} \setminus 2\mathbb{D}^2$. Łatwo się przekonać, że $\mathbb{S} \setminus \mathbb{D}^2$ z doklejonym nieorientowalnym paskiem to wstęga Möbiusa, czyli $\mathbb{RP}^2 \setminus \mathbb{D}^2$. Zatem $\mathbb{S}^2 \setminus 2\mathbb{D}^2$ z nieorientowalnym paskiem jest homeomorficzne z $\mathbb{RP}^2 \setminus 2\mathbb{D}^2$. Jednej ze składowych brzegów musimy użyć to *przytwierdzenia* tego fragmentu z powrotem do rozmaitości.

3. Doklejenie 1-rączki do dwóch różnych okręgów brzegowych tej samej spójnej składowej w orientowalny sposób.

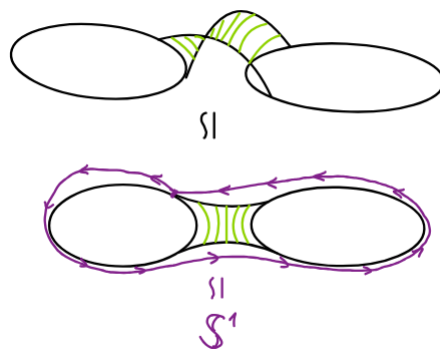
Na podstawie rysunku 11 wnioskujemy, że spójna składowa postaci $\mathbb{RP}^2_{\#n} \# \mathbb{T}^2_{\#m} \setminus k\mathbb{D}^2$ po doklejeniu 1-rączki w wyżej opisany sposób traci jedną dziurę. Zatem staje się postaci $\mathbb{RP}^2_{\#n} \# \mathbb{T}^2_{\#m} \setminus (k-1)\mathbb{D}^2$. Ponieważ aby wykonać tego typu doklejenie k musi być większe równe 2 taka spójna składowa nadal spełnia nasze założenie indukcyjne.

4. Doklejenie 1-rączki do dwóch różnych okręgów brzegowych tej samej spójnej składowej w nieorientowalny sposób.

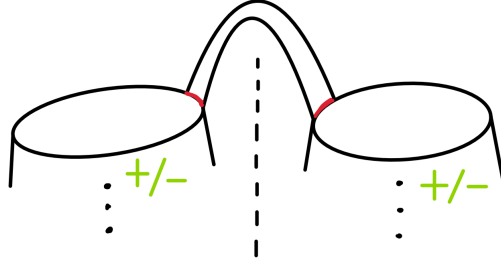
Na podstawie rysunku 12 wnioskujemy, że spójna składowa postaci $\mathbb{RP}^2_{\#n} \# \mathbb{T}^2_{\#m} \setminus k\mathbb{D}^2$ po doklejeniu 1 rączki w sposób opisany na rysunku traci jedną dziurę. Zostaje do niej także doklejona rozmaitość $\mathbb{RP}^2$. Oznacza to, że nasza spójna składowa będzie postaci $\mathbb{RP}^2_{\#(n+1)} \# \mathbb{T}^2_{\#m} \setminus (k-1)\mathbb{D}^2$. Ponieważ zaczęliśmy od spójnej składowej, w której $k \geq 2$ nasza spójna składowa spełnia założenie indukcyjne.



Rysunek 11: Doklejenie 1-rączki do dwóch różnych okręgów brzegowych tej samej spójnej składowej w orientowalny sposób.



Rysunek 12: Doklejenie 1-rączki do dwóch różnych okręgów brzegowych tej samej spójnej składowej w nieorientowalny sposób.



Rysunek 13: Doklejenie 1-rączki do dwóch różnych okręgów brzegowych różnych spójnych składowych.

5. Doklejenie 1-rączki do dwóch różnych okręgów brzegowych różnych spójnych składowych.

Uważny czytelnik może zapytać dlaczego nie rozpatrzamy przypadku doklejania 1-rączki do dwóch różnych okręgów brzegowych, różnych spójnych składowych dla przypadku orientowalnego i nieorientowalnego. Okazuje się, że nie jest to potrzebne – orientacje na spójnych składowych możemy wybrać niezależnie dla orientowalnych spójnych składowych. Z kolei jeśli przynajmniej jedna z dwóch spójnych składowych jest nieorientowalna, to sposób, w jaki wykonamy doklejenie nie ma znaczenia. Po tym wyjaśnieniu przejdźmy do dowodu tego punktu.

Założmy, że nasze spójne składowe są homeomorficzne z $\mathbb{RP}_{\#n_1}^2 \# \mathbb{T}_{\#m_1}^2 \setminus k_1 \mathbb{D}^2$, $\mathbb{RP}_{\#n_2}^2 \# \mathbb{T}_{\#m_2}^2 \setminus k_2 \mathbb{D}^2$. Analogicznie jak w rysunku 11 tracimy jedną dziurę, jednak tym razem jednocześnie łączymy dwie spójne składowe. Wnioskujemy, że po doklejeniu 1-rączki w sposób pokazany w wyżej przytoczonym rysunku otrzymujemy jedną spójną składową homeomorficzną z $\mathbb{RP}_{\#(n_1+n_2)}^2 \# \mathbb{T}_{\#(m_1+m_2)}^2 \setminus (k_1+k_2-1) \mathbb{D}^2$. Taka spójna składowa spełnia założenie indukcyjne.

4.2.4 Doklejenie 2-rączek

Przyklejanie λ -rączki przy $\lambda = 2$ odpowiada zaklejeniu jednej ze składowych brzegu dyskiem. Jeśli wykonamy tę operację na spójnej składowej homeomorficznej do $\mathbb{RP}_{\#n}^2 \# \mathbb{T}_{\#m}^2 \setminus k \mathbb{D}^2$, otrzymamy spójną składową postaci $\mathbb{RP}_{\#n}^2 \# \mathbb{T}_{\#m}^2 \setminus (k-1) \mathbb{D}^2$.

4.2.5 Podsumowanie

Udowodniwszy tezę indukcyjną, zobaczmy jak wynurza się z niej teza twierdzenia. Przypomnijmy, że twierdzenie dotyczy 2-rozmaiłości spójnych i zamkniętych (bez brzegu). Zgodnie z tezą indukcyjną, otrzymujemy zatem, że jako spójna powierzchnia rozpatrywana rozmaiłość ma postać

$$\mathbb{RP}_{\#n}^2 \# \mathbb{T}_{\#m}^2 \setminus k \mathbb{D}^2.$$

Ponieważ jest to rozmaiłość bez brzegu, to $k = 0$. Mamy więc do czynienia z powierzchnią

$$\mathbb{RP}_{\#n}^2 \# \mathbb{T}_{\#m}^2.$$

Jest to bardziej ogólna postać niż w tezie twierdzenia. Zauważmy jednak, że dla powierzchni orientowalnych $n = 0$. Jeśli natomiast powierzchnia nie jest orientowalna i $n > 0$, to na mocy Twierdzenia 2.2 mamy

$$\mathbb{RP}_{\#n}^2 \# \mathbb{T}_{\#m}^2 \cong \mathbb{RP}_{\#n+2m}^2.$$

Zatem istotnie każda powierzchnia jest postaci jak w Twierdzeniu 4.1.

4.3 Różność powierzchni

Tego, że powierzchnie wymienione w Twierdzeniu 4.1 są parami niehomeomorficzne, dowodzimy za pomocą grup homologii. W książce [1] można znaleźć wyliczenie grup homologii singularnych

$$\begin{aligned} H_1 \mathbb{T}_{\#n}^2 &\cong \mathbb{Z}^{2n} \\ H_1 \mathbb{RP}_{\#n}^2 &\cong \mathbb{Z}^{2n-2} \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

4.4 Klasyfikacja zwartych 2-rozmaitości z brzegiem

Uogólnimy teraz Twierdzenie 4.1 na przypadek rozmaitości z brzegiem – odpowiednia teza to Twierdzenie 4.2. Kluczowa do tego jest poniższa obserwacja, którą uznajemy za oczywistą.

Fakt 4.3. *Brzeg zwartej ∂M 2-rozmaitości M jest zwartą 1-rozmaitością (niekoniecznie spójną, nawet jeśli M jest spójna), jest więc sumą rozłączną pewnej liczby kopii $\mathbb{S}^1$.*

Wynika stąd, że możemy z 2-rozmaitości usunąć brzeg poprzez zaklejenie każdej składowej ∂M jednym dyskiem $\mathbb{D}^2$. Stąd każdą zwartą rozmaitość z brzegiem uzyskujemy z rozmaitości zamkniętej poprzez wycięcie pewnej liczby dysków. Ponieważ operacja wycięcia dysku nie wpływa na orientowalność, Twierdzenie 4.2 wynika z Twierdzenia 4.1.

Literatura

- [1] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [2] John Willard Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [3] Álvaro del Pino Gómez. A Gentle Introduction to Morse Theory. <https://alvarodelpino.com/wp-content/uploads/2019/03/notes.pdf>, 2019. [Online; dostęp 22.01.2025].