

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

Magdalena Mieszała, Małgorzata Mieszała, Maja Ciach

Niewspółmierność odcinków

Zespołowa praca projektowa napisana
pod kierunkiem prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2025

Spis treści

1	Podstawowe pojęcia	2
2	Odcinki niewspółmierne w figurach geometrycznych	4
2.1	Niewspółmierność odcinków w figurach związanych z wielokątami foremnymi	4
2.2	Niewspółmierność boków w dwóch nieskończonych seriach trójkątów prostokątnych	14
2.3	Niewspółmierność boków kwadratów w zależności od stosunku ich pól	17

Wstęp

Pojęcie niewspółmierności odcinków odegrało istotną rolę w matematyce starożytnej, stając się jednym z fundamentów rozwoju matematyki greckiej. Choć dziś niewymierność liczby najczęściej rozumiemy algebraicznie, jej pierwotna intuicja miała charakter geometryczny. Celem niniejszej pracy jest przybliżenie idei niewspółmierności poprzez analizę klasycznych konstrukcji geometrycznych oraz ich nowocześniejszych interpretacji. W projekcie skupimy się na dowodach prowadzących do sprzeczności, opartych na iteracyjnym odcinaniu odcinków oraz symetrycznym układaniu figur, które pozwalają uchwycić istotę niewspółmierności w sposób wizualny i konstruktywny. W toku pracy przedstawiamy zarówno powszechnie znane przykłady z udziałem wielokątów foremnych, przedstawimy na ich podstawie autorską analizę dwóch nieskończonych serii trójkątów prostokątnych, jak i bardziej ogólne rozumowania oparte na zależnościach pomiędzy polami kwadratów. Wszystkie omawiane przypadki prowadzą do tego samego wniosku: pewnych długości nie da się wyrazić jako całkowitych wielokrotności wspólnej jednostki, co przekłada się na niewymierność liczb odpowiadających stosunkom ich długości.

1 Podstawowe pojęcia

W tej sekcji przywołamy definicje i obserwacje, które zostaną użyte w dalszej części pracy.

Definicja 1.1. Odcinek a jest **całkowitą wielokrotnością** odcinka δ , gdy odcinek δ można odłożyć na odcinku a dokładnie k razy bez reszty, gdzie k jest liczbą całkowitą dodatnią.

W arytmetycznym ujęciu oznacza to, że długość odcinka a można wyrazić jako całkowitą wielokrotność długości odcinka δ . Matematycznie zapisuje się to jako:

$$a = k \cdot \delta,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}_+$.

Z następującej prostej obserwacji będziemy często korzystać w dalszych rozdziałach pracy.

Obserwacja 1.2. *Jeżeli a i b są całkowitymi wielokrotnościami δ i jeśli $k \cdot a - m \cdot b > 0$, to odcinek $k \cdot a - m \cdot b$ także jest całkowitą wielokrotnością δ .*

Dowód: Skoro odcinki a i b są całkowitymi wielokrotnościami odcinka δ , to:

$$a = n \cdot \delta,$$

$$b = m \cdot \delta,$$

gdzie $n, m \in \mathbb{Z}^+$.

Weźmy odcinki $k \cdot a$ oraz $l \cdot b$; geometrycznie oznacza to, że odkładamy k razy odcinek a , czyli otrzymujemy $k \cdot n$ odcinków długości δ , natomiast odcinek b odkładamy l razy, czyli dostajemy $l \cdot m$ odcinków długości δ .

Odcinek $k \cdot a - l \cdot b$ oznacza odcięcie z większego zbioru odcinków δ mniejszego. W wyniku tego pozostaje nam $k \cdot n - l \cdot m$ odcinków długości δ , ponieważ $k \cdot a - l \cdot b = k \cdot n \cdot \delta - l \cdot m \cdot \delta = \delta(k \cdot n - l \cdot m)$.

Wynika z tego, że odcinek $k \cdot a - l \cdot b$ składa się z całkowitej liczby odcinków δ , więc jest całkowitą wielokrotnością δ . $\square$

Definicja 1.3. Odcinki a i b nazywamy **współmiernymi**, jeśli istnieje odcinek δ , taki, że zarówno a , jak i b są całkowitymi wielokrotnościami δ .

Następny rezultat pokazuje związek pomiędzy geometryczną własnością współmierności odcinków i wymiernością stosunku ich długości.

Lemat 1.4. Odcinki a, b są współmierne wtedy i tylko wtedy, gdy stosunek ich długości $\frac{a}{b}$ jest liczbą wymierną.

Dowód:

1. ($\Rightarrow$) Skoro odcinki a i b są współmierne, to znaczy, że istnieje pewien odcinek δ , który odkłada się całkowitą liczbą razy zarówno na odcinku a , jak i na odcinku b . Załóżmy, że odcinek δ odkłada się m razy na odcinku a i n razy na odcinku b , gdzie m i n są liczbami całkowitymi dodatnimi. Zatem stosunek długości odcinka a do odcinka b jest równy stosunkowi liczby tych odłożeń, czyli m do n . A więc stosunek długości a do b jest liczbą wymierną.

2. ($\Leftarrow$) Załóżmy, że stosunek długości odcinka a do odcinka b jest liczbą wymierną, czyli:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

gdzie $m, n \in \mathbb{N}$.

Z powyższego wynika, że $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$. Niech zatem δ będzie odcinkiem powstałym z podziału odcinka a na m jednakowych części, wtedy $\delta = \frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, więc odcinek a można przedstawić jako m odcinków δ , zaś odcinek b można przedstawić jako n odcinków długości δ . To zaś oznacza współmierność odcinków a i b . $\square$

Komentarz 1.5. Lemat 1.4 mówi nam, że udowodnienie niewspółmierności pewnych dwóch odcinków jest zawsze równoważne uzasadnieniu niewymierności liczby będącej stosunkiem ich długości.

2 Odcinki niewspółmierne w figurach geometrycznych

Jednym z klasycznych sposobów wykazywania niewspółmierności odcinków w geometrii jest metoda oparta na iteracyjnym odcinaniu i konstruowaniu nowych figur. Technika ta pozwala na uchwycenie idei niewspółmierności, czyli niemożności wyrażenia dwóch długości jako całkowitej wielokrotności trzeciej. Podstawą tej metody jest powtarzalny proces odcinania krótszego odcinka od dłuższego, następnie konstruowania i analizy nowopowstałych figur. W Podrozdziale 2.1 przedstawione zostaną przykłady takich dowodów w oparciu o konstrukcje geometryczne z wykorzystaniem wielokątów foremnych i powszechnie znanych zależności trygonometrycznych. W Podrozdziale 2.2 zaprezentowane zostaną autorskie dowody związane z dwiema nieskończonymi sekwencjami trójkątów prostokątnych. Natomiast w Podrozdziale 2.3 zostanie omówiony inny typ dowodu niewspółmierności odcinków, oparty na powtarzalnym procesie symetrycznego układania odpowiednio mniejszych kwadratów wewnątrz większego wzdłuż jego przekątnej.

2.1 Niewspółmierność odcinków w figurach związanych z wielokątami foremnymi

W tym podrozdziale przedstawimy konkretne przykłady niewspółmierności odcinków pojawiających się w klasycznych figurach geometrycznych. Każdy przypadek zostanie zilustrowany odpowiednim dowodem, ukazując zależności geometryczne między odcinkami oraz fakt, że stosunek ich długości jest liczbą niewymierną. Dowody przedstawione w niniejszym podrozdziale pochodzą z różnych źródeł, lecz zostały wzbogacone o nasze własne spostrzeżenia oraz uzupełnione dodatkowymi wyjaśnieniami.

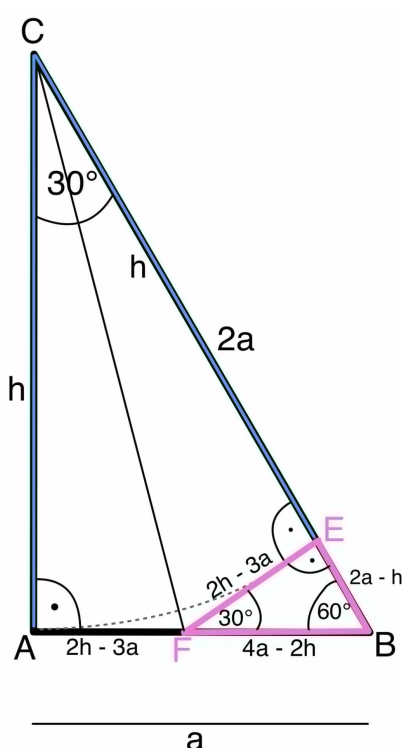
Bok i wysokość w trójkącie równobocznym

Pierwszym z omawianych dowodów będzie dowód niewspółmierności oparty na konstrukcji trójkąta prostokątnego, który stanowi połowę trójkąta równobocznego. Przykład ten pozwala w prosty sposób wykazać, że przyprostokątne w podanym trójkącie nie są współmierne. Rysunek ilustrujący ten dowód pochodzi ze strony internetowej Mathematics Stack Exchange ozna-

czonej numerem [3] w bibliografii, lecz samo rozumowanie zostało opracowane samodzielnie.

Twierdzenie 2.1. *W trójkącie prostokątnym, który jest połową trójkąta równobocznego, przyprostokątne są odcinkami niewspółmiernymi.*

Dowód: Rozważmy trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, gdzie a oznacza długość krótszej przyprostokątnej, $2a$ długość przeciwprostokątnej, natomiast h to długość dłuższej przyprostokątnej (patrz Rysunek 1).



Rysunek 1: Dowód Twierdzenia 2.1

Założmy nie wprost, że przyprostokątne AB i AC są współmierne, czyli zgodnie z Definicją 1.3 można przedstawić ich długości jako: $a = n \cdot \delta$ oraz $h = m \cdot \delta$ dla pewnej wspólnej miary δ i dla pewnych dodatnich liczb całkowitych n , m . Skoro $a = n \cdot \delta$, to możemy wnioskować, że $2a = 2n \cdot \delta$

Najpierw na boku długości $2a$ odłóżmy wysokość h , w ten sposób na boku BC powstaje punkt E . Następnie na boku AB wyznaczamy taki punkt F , że $EF \perp BC$, w wyniku czego powstał trójkąt $\triangle EBF$, który jest podobny do trójkąta $\triangle ABC$, ponieważ:

- oba trójkąty są prostokątne,
- posiadają jeden wspólny kąt $\angle EBF = \angle ABC = 60^\circ$,
- z powyższych warunków wynika, że $\angle EFB = \angle ACB = 30^\circ$.

Teraz przeanalizujemy długości boków trójkąta $\triangle EBF$. Zauważmy, że $|BE| = 2 \cdot a - h$. Korzystając z podobieństwa do $\triangle ABC$ wnioskujemy, że $|FB| = 2 \cdot (2 \cdot a - h) = 4 \cdot a - 2 \cdot h$. Pozostaje nam wyznaczyć długości boku FE . W tym celu rozważmy trójkąty $\triangle ACF$ oraz $\triangle ECF$. Są to trójkąty prostokątne ze wspólną przeciwprostokątną CF oraz przyprostokątną tej samej długości: $|AC| = |EC| = h$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że $|AF| = |FE|$. Zatem trójkąty $\triangle ACF$ oraz $\triangle ECF$ są przystające ma mocy cechy bok - bok - bok. Możemy teraz wyliczyć, że $|AF| = a - (4 \cdot a - 2 \cdot h) = 2 \cdot h - 3a = |FE|$. W ten sposób powstał nam trójkąt $\triangle EBF$, gdzie:

$$a_1 = |BE| = a - h = n \cdot \delta - m \cdot \delta = (n - m) \cdot \delta = n_1 \cdot \delta,$$

$$h_1 = |FE| = 2 \cdot h - 3 \cdot a = 2 \cdot m \cdot \delta - 3 \cdot n \cdot \delta = (2 \cdot m - 3 \cdot n) \cdot \delta = m_1 \cdot \delta,$$

gdzie $n_1, m_1 \in \mathbb{Z}^+$.

Otrzymany trójkąt $\triangle EBF$ jest mniejszy od pierwotnego trójkąta $\triangle ABC$ na podstawie następującego porównania długości ich przyprostokątnych. Wiemy, że w trójkącie $\triangle ABC$ przyprostokątna AB jest krótsza od przeciwprostokątnej BC . Z kolei przeciwprostokątna BF w trójkącie $\triangle EBF$ leży na przyprostokątnej AB , więc musi być od niej krótsza (patrz Rysunek 1). W szczególności oznacza to, że $BF < BC$, a więc trójkąt $\triangle EBF$ jest mniejszy niż trójkąt $\triangle ABC$. Stąd otrzymujemy następujący ciąg implikacji:

$$h_1 < h \Rightarrow m_1 \cdot \delta < m \cdot \delta \Rightarrow m_1 < m$$

Ponieważ przekątne BE i EF w trójkącie $\triangle EBF$ nadal są całkowitymi wielokrotnościami tego samego odcinka δ , powtarzając powyższy proces dla tego trójkąta, możemy utworzyć jeszcze mniejszy trójkąt podobny do wyjściowego o krótszej przyprostokątnej a_2 oraz dłuższej h_2 , dla których $a_2 = n_2 \cdot \delta$, $h_2 = m_2 \cdot \delta$ dla $n_2, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ oraz $m_2 < m_1$.

Ponieważ możemy w nieskończoność konstruować nowe trójkąty, otrzymujemy ściśle malejący ciąg dodatnich liczb całkowitych:

$$m > m_1 > m_2 > m_3 > m_4 \dots$$

To daje nam sprzeczność, ponieważ nie istnieje nieskończenie wiele różnych, dodatnich liczb całkowitych mniejszych od m . Zatem w trójkącie prostokątnym, który jest połową trójkąta równobocznego, przyprostokątne są odcinkami niewspółmiernymi. $\square$

Ponieważ powszechnie wiadomo, że przyprostokątna AC w wyżej rozpatrywanym trójkącie jest dłuższa od przyprostokątnej AB w stosunku $\sqrt{3}$, na podstawie Lematu 1.4 otrzymujemy następujący wniosek.

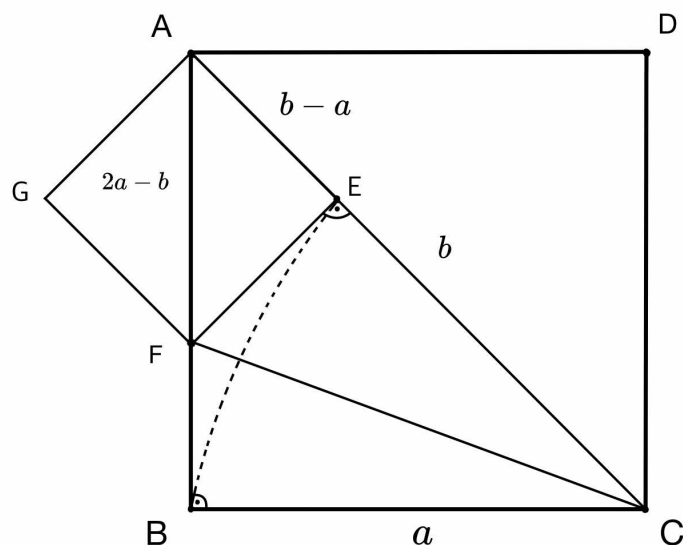
Wniosek 2.2. Liczba $\sqrt{3}$ jest niewymierna.

Bok i przekątna w kwadracie

W geometrii istotnym przykładem odcinków niewspółmiernych jest bok kwadratu i jego przekątna. Celem poniższego dowodu jest pokazanie, że nie istnieje wspólna jednostka długości, względem której oba te odcinki dałoby się wyrazić jako jej całkowite wielokrotności. Dowód bazuje na kilku niezależnych opracowaniach, w szczególności na pozycjach literatury matematycznej [1], [2] oraz na źródle internetowym [4].

Twierdzenie 2.3. *Bok kwadratu i jego przekątna są odcinkami niewspółmiernymi.*

Dowód:



Rysunek 2: Dowód Twierdzenia 2.3

Niech a będzie długością boku kwadratu $\square ABCD$, zaś b jego przekątnej (patrz Rysunek 2). Załóżmy nie wprost, że te wielkości są współmierne, czyli zgodnie z Definicją 1.3 możemy je zapisać jako: $a = n \cdot \delta$ oraz $b = m \cdot \delta$ dla pewnej miary δ i dla pewnej pary dodatnich liczb całkowitych n i m .

Najpierw na przekątnej b odłożymy bok a . W ten sposób wyznaczamy położenie punktu E na przekątnej kwadratu. Na boku AB zaznaczamy punkt F , taki że $EF \perp AC$. Z własności kwadratu wiemy, że $|AB| = |BC|$, z czego wynika, że trójkąt $\triangle ABC$ jest równoramienny, a $\angle ABC = 90^\circ$, zaś stąd wiadomo, że $\angle CAB = \angle ACB = 45^\circ$. Widzimy, że $\angle EAF = \angle CAB = 45^\circ$ i $\angle AEF = 90^\circ$, więc $\angle AFE = 45^\circ$, z czego wynika, że trójkąt $\triangle AFE$ jest równoramienny, gdzie $|AE| = |EF|$. Trójkąty $\triangle FBC$ i $\triangle FEC$ są trójkątami prostokątnymi ze wspólną przeciwprostokątną oraz drugim bokiem tej samej długości, ponieważ $|BC| = |FC|$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa wiemy, że $|BF| = |EF| = |AE|$. Ponieważ $|AE| = |EF|$, możemy zbudować nowy kwadrat $\square AEF G$. Długość jego boku oznaczmy jako a_1 , a jego przekątnej jako b_1 . Mamy zależności:

$$a_1 = |AE| = |AC| - |EC| = |AC| - |BC| = b - a,$$

$$b_1 = |AF| = |AB| - |BF| = |AB| - |AE| = a - (b - a) = 2 \cdot a - b.$$

Z tego, że $a = n \cdot \delta$ i $b = m \cdot \delta$ otrzymujemy:

$$a_1 = m \cdot \delta - n \cdot \delta = (m - n) \cdot \delta = n_1 \cdot \delta,$$

$$b_1 = 2 \cdot n \cdot \delta - m \cdot \delta = (2 \cdot n - m) \delta = m_1 \cdot \delta,$$

gdzie $n_1, m_1 \in \mathbb{Z}^+$.

Kwadrat $\square AGEF$ jest mniejszy od wyjściowego kwadratu $\square ABCD$, więc $|AF| < |AC|$, a stąd wynika, że $m_1 < m$. Otrzymujemy więc mniejszy kwadrat, którego bok i przekątna są krotnościami tego samego odcinka δ . Powyższy proces możemy powtórzyć dla kwadratu $\square AEF G$, powstanie bowiem kolejny kwadrat o boku $a_2 = n_2 \cdot \delta = (m_1 - n_1) \cdot \delta$ i przekątnej $b_2 = m_2 \cdot \delta = (2 \cdot n_1 - m_1) \cdot \delta$, gdzie $n_2, m_2 \in \mathbb{Z}^+$ oraz $m_2 < m_1$, co można ponownie udowodnić w ten sam sposób, jak w poprzednim kroku.

Ponieważ możemy w nieskończoność konstruować nowe kwadraty, otrzymujemy ściśle malejący ciąg dodatnich liczb całkowitych:

$$m > m_1 > m_2 > m_3 > \dots,$$

co prowadzi do sprzeczności, ponieważ nie może być nieskończenie wiele różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych od m . Zatem przekątna i bok kwadratu są odcinkami niewspółmiernymi. $\square$

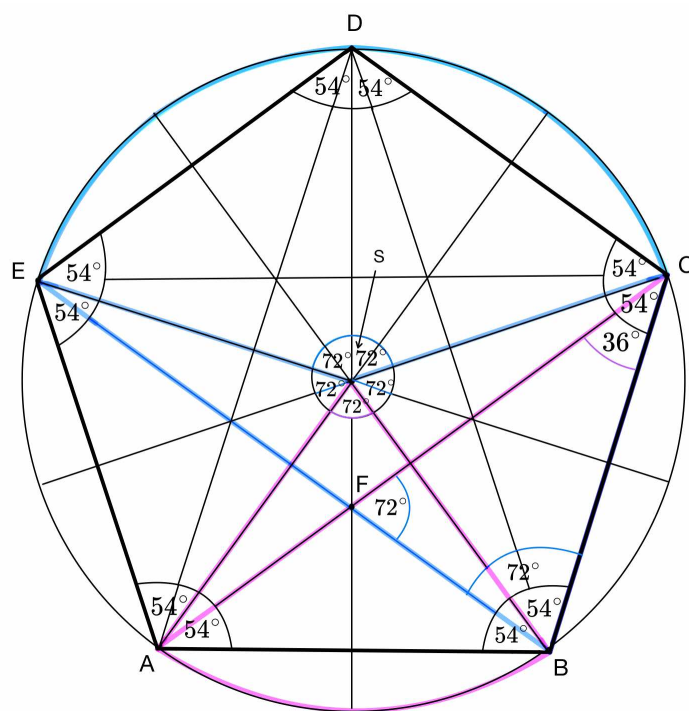
Wniosek 2.4. Z powyżej udowodnionego twierdzenia, że bok oraz przekątna kwadratu są odcinkami niewspółmiernymi oraz z powszechnie znanego faktu, że ich stosunek wyraża się jako $\sqrt{2}$, na podstawie Lematu 1.4 wnioskujemy, że liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Bok i przekątna w pięciokącie foremnym

Pięciokąt foremny to jedna z figur geometrycznych, w której pojawia się interesujący przypadek niewspółmierności odcinków wyznaczonych przez jego konstrukcję. Nie mamy wątpliwości, że bok i jego przekątna są różnej długości, jednak okazuje się, że nie dają się również wyrazić jako wielokrotności jednego mniejszego odcinka. Dowód został zaczerpnięty z książki [1] oraz ze źródła internetowego [5]. Warto wspomnieć, że stosunek długości przekątnej do boku pięciokąta foremnego nazywamy złotą liczbą, do czego jeszcze wrócimy na końcu omawiania tej pary odcinków niewspółmiernych.

Twierdzenie 2.5. *Bok pięciokąta foremnego i jego przekątna są odcinkami niewspółmiernymi.*

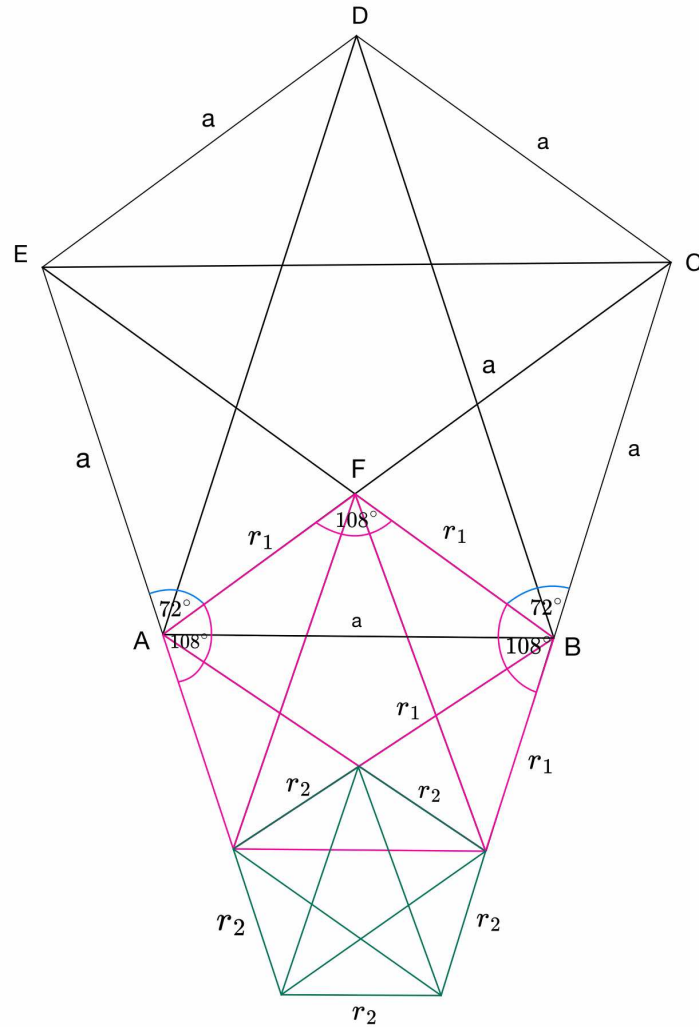
Dowód: Rozważmy pięciokąt foremny o boku długości a i przekątnych długości b . Zakładamy nie wprost, że a i b są współmierne, czyli $a = m \cdot \delta$ oraz $b = n \cdot \delta$ dla pewnej miary δ oraz pewnych liczb dodatnich całkowitych m i n . Na przekątnej b odkładamy bok a , czyli na Rysunkach 3 i 4 bok FC .



Rysunek 3: Dowód Twierdzenia 2.5

Geometrycznie można uzasadnić ten krok poprzez analizę kątów owej figury. Tak jak na Rysunku 3 opisujemy na pięciokącie foremnym okrąg o środku

w punkcie S . Wiemy, że kąty środkowe w pięciokącie mierzą po 72° , z czego wynika, że kąty wewnętrzne tego wielokąta foremego mają po 108° . Możemy zauważyć, że $\angle ASB$ i $\angle ACB$ są oparte na tym samym łuku okręgu $\overline{AB}$, więc z twierdzenia o miarach kątów wpisanych w okrąg i kąta środkowego, opartych na tym samym łuku, wiemy, że $\angle ACB = 36^\circ$. Korzystając z tej samej własności oraz obserwacji z rysunku możemy stwierdzić, że $\angle CBE = 72^\circ$, ponieważ jest to kąt wpisany w okrąg i leży na tym samym łuku $\overline{EC}$ co kąt środkowy $\angle CSE$. Teraz, korzystając z twierdzenia o sumie miar kątów wewnętrznych w trójkącie, możemy wywnioskować, że trójkąt $\triangle BCF$ jest trójkątem równoramiennym, gdzie $|BC| = |FC| = a$.



Rysunek 4: Kolejna faza dowodu Twierdzenia 2.5

W ten sposób na przekątnej długości b powstał odcinek AF o długości $b - a = r_1$, który według założenia początkowego dowodu również musi być wspólny z bokiem głównego pięciokąta foremnego, ponieważ $r_1 = b - a = n \cdot \delta - m \cdot \delta = (n - m) \cdot \delta = m_1 \cdot \delta$, gdzie $m_1 \in \mathbf{Z}^+$. Nierówność $m_1 > 0$ można udowodnić faktem, że przekątna pięciokąta foremnego zawsze jest dłuższa niż jego bok. Ponadto, korzystając z nierówności trójkąta w trójkącie równoramiennym ABC , którego ramiona mają długość a , a podstawa ma długość $a + r_1$, otrzymujemy $2 \cdot a > a + r_1$, skąd wynika, że $r_1 < a$, a w związku z tym $m_1 < m$. Możemy teraz zbudować nowy pięciokąt foremny o boku długości r_1 i przekątnej a (jak widać na Rysunku 4). Powstały pięciokąt jest podobny do pięciokąta o boku a , więc możemy ponownie powtórzyć algorytm, tylko tym razem od przekątnej o długości a odcinamy bok o długości r_1 . W ten sposób na przekątnej a powstał odcinek $r_2 = a - r_1$, który również jest całkowitą wielokrotnością tego samego odcinka δ , ponieważ $r_2 = a - r_1 = m \cdot \delta - m_1 \cdot \delta = m \cdot \delta - (n - m) \cdot \delta = (2 \cdot m - n) \cdot \delta = m_2 \cdot \delta$, gdzie $m_2 \in \mathbf{Z}^+$ i $m_2 < m_1$. Nierówność $m_2 > 0$ znowu wynika z tego, że przekątna pięciokąta foremnego zawsze jest dłuższa od jego boku. Znowu możemy zbudować kolejny pięciokąt podobny o boku r_2 i przekątnej r_1 . Widzimy, że proces konstrukcji kolejnych coraz to mniejszych pięciokątów foremnych z zastosowaniem boku i przekątnej możemy powtarzać w nieskończoność. Ponownie otrzymujemy ściśle malejący ciąg dodatnich liczb całkowitych:

$$m > m_1 > m_2 > m_3 > \dots,$$

co prowadzi do sprzeczności, ponieważ nie istnieje nieskończenie wiele różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych od konkretnego m , więc analizowane odcinki a i b są niewspółmierne, co kończy dowód Twierdzenia 2.5. $\square$

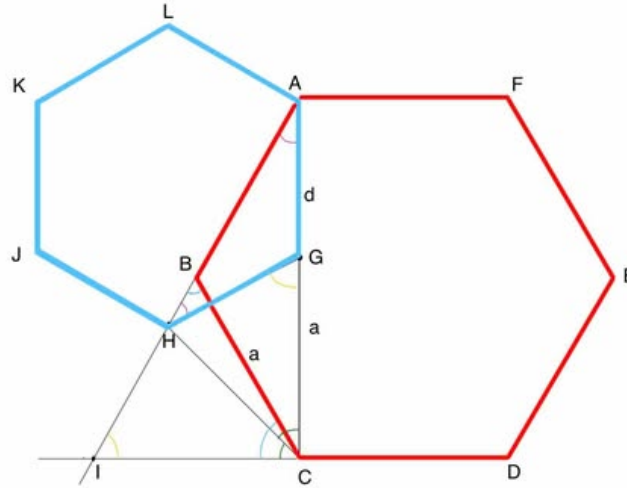
Wniosek 2.6. Skoro bok i przekątna pięciokąta foremnego są niewspółmierne, to wynika stąd, że liczba opisująca stosunek długości przekątnej do boku, czyli $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - zwana również złotą liczbą - jest liczbą niewymierną.

Bok i przekątna w sześciokącie foremnym

W sześciokącie foremnym występują przekątne różnych długości. W kolejnym przykładzie skupimy się na krótszej przekątnej. Udowodnimy, że przekątna ta oraz bok sześciokąta są odcinkami niewspółmiernymi, co czyni je kolejnym przykładem odcinków o niewymiernym stosunku długości w figurze geometrycznej. Prezentowany dowód został opracowany na podstawie materiału dostępnego w źródle internetowym [6].

Twierdzenie 2.7. *Bok i krótsza przekątna sześciokąta foremnego są odcinkami niewspółmiernymi.*

Dowód: Niech a oznacza bok sześciokąta foremnego $ABCDEF$, zaś d jego krótszą przekątną, tak jak na Rysunku 2.7. Zakładamy nie wprost, że a i d są współmierne, więc zgodnie z Definicją 1.3 możemy je zapisać jako: $a = n \cdot \delta$ oraz $d = m \cdot \delta$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, a δ jest wspólną miarą krótszej przekątnej i boku sześciokąta.



Rysunek 5: Dowód Twierdzenia 2.7

Najpierw na przekątnej d odłóżmy bok a . W ten sposób na przekątnej powstał punkt G , dlatego $|CG| = |BC| = a$. Niech teraz punkt I będzie punktem przecięcia się prostych AB i CD , natomiast H będzie takim punktem, że $\angle HCI = \angle HCA$. Z własności kątów w sześciokącie foremnym wiemy, że $\angle ABC = \angle BCD = 120^\circ$, dlatego $\angle CBI = \angle BCI = 60^\circ$, więc trójkąt $\triangle BCI$ jest równoboczny. Rozważmy trójkąty $\triangle HCI$ i $\triangle HCG$. Przeanalizujmy ich odpowiednie boki oraz kąty:

- mają wspólny bok CH ,
- bok CI oraz bok CB mają tę samą długość,
- kąt $\angle HCI$ oraz kąt $\angle HCG$ mają tę samą miarę.

Zatem, na podstawie cechy przystawiania bok-kąt-bok (BKB), możemy stwierdzić, że:

$$\triangle HCI \cong \triangle HCG.$$

Oznacza to, że trójkąty te są przystające, czyli mają takie same długości boków i miary kątów, dlatego też $|IH| = |HG|$ oraz $\angle CGH = \angle CIH = 60^\circ$.

Możemy teraz zauważyć, że kąt $\angle AGH = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, a skoro trójkąt $\triangle ABC$ jest równoramienny, to kąt $\angle HAG = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle ABC) = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$. Natomiast kąt $\angle AHG = 180^\circ - \angle AGH - \angle HAG = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, z czego wynika, że trójkąt $\triangle AGH$ jest równoramienny. Dlatego też możemy skonstruować nowy sześciokąt foremny $AGHJKL$. Niech d_1 będzie jego przekątną i a_1 będzie jego boki. Wówczas:

$$a_1 = |AG| = d - a,$$

$$\begin{aligned} d_1 &= |AH| = |AI| - |HI| = |AB| - |HG| = |AB| + |BC| - |AG| = \\ &= a + a - (d - a) = 2 \cdot a - d + a = 3 \cdot a - d \end{aligned}$$

Z tego, że $a = n \cdot \delta$ i $d = m \cdot \delta$ otrzymujemy, że:

$$a_1 = m \cdot \delta - n \cdot \delta = (m - n) \cdot \delta = n_1 \cdot \delta$$

$$d_1 = 3 \cdot n \cdot \delta - m \cdot \delta = (3 \cdot n - m) \cdot \delta = m_1 \cdot \delta$$

gdzie $n_1 = m - n$ oraz $m_1 = 3 \cdot n - m$ to dwie dodatnie liczby całkowite oraz $n_1 < n$ ponieważ z nierówności trójkąta wiemy, że $d < 2 \cdot a$, stąd otrzymujemy następujący ciąg implikacji:

$$d < 2 \cdot a \Rightarrow m \cdot \delta < 2 \cdot n \cdot \delta \Rightarrow m < 2 \cdot n \Rightarrow m - n < n \Rightarrow n_1 < n$$

co jest prawdą, ponieważ w dowolnym trójkącie każdy bok ma długość mniejszą od sumy długości dwóch pozostałych boków. Powyższą procedurę można powtórzyć na sześciokącie $ADHJKL$ otrzymamy w ten sposób kolejny sześciokąt foremny, którego przekątna wynosi $d_2 = m_2 \cdot \delta$, a bok $a_2 = n_2 \cdot \delta$, gdzie $n_2 = m_1 - n_1$, natomiast $m_2 = 3 \cdot n_1 - m_1$ to dwie dodatnie liczby całkowite przy czym $n_2 < n_1 < n$. Z tego wynika, że w nieskończoność możemy budować nowe sześciokąty foremne, w wyniku czego otrzymujemy ściśle malejący ciąg dodatnich liczb całkowitych:

$$n > n_1 > n_2 > n_3 > n_4 \dots,$$

co daje nam sprzeczność, gdyż nie może być nieskończenie wiele różnych liczb całkowitych dodatnich mniejszych od n . Zatem krótsza przekątna i bok sześciokąta foremnego są wielkościami niewspółmiernymi. $\square$

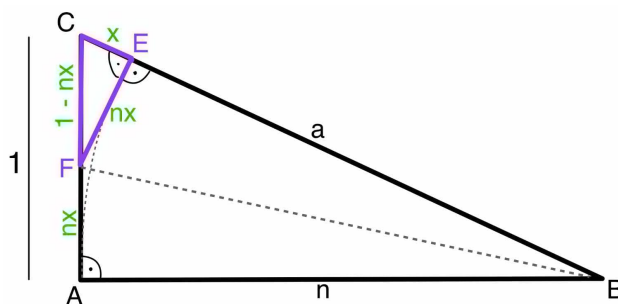
Wniosek 2.8. Z faktu, że długość boku oraz długość krótszej przekątnej sześciokąta foremnego są niewspółmierne, a ich stosunek długości wyraża się jako $\sqrt{3}$, wynika, na podstawie Lematu 1.4 że liczba $\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną.

2.2 Niewspółmierność boków w dwóch nieskończonych seriach trójkątów prostokątnych

W tym podrozdziale skupimy się na wykazaniu niewspółmierności odcinków w trójkątach prostokątnych w dwóch różnych przypadkach. Uogólnimy w ten sposób rozumowanie z dowodu Twierdzenia 2.1. Poniższy dowód jest wynikiem naszej własnej analizy i nie opiera się na istniejących dowodach w literaturze. W pierwszym z tych przypadków rozważymy trójkąty prostokątne, w których jedna przyprostokątna jest całkowitą krotnością drugiej. W drugim przypadku przyjrzymy się trójkątom prostokątnym, w których przeciwprostokątna jest n -krotnością jednej z przyprostokątnych. W obu przypadkach, wychodząc od niewspółmierności odcinków, przejdziemy do wnioskowania o niewymierności stosunków odpowiadających im długości, co korzystając z twierdzenia Pitagorasa będzie odpowiadać niewymierności liczb $\sqrt{n^2 + 1}$ oraz $\sqrt{n^2 - 1}$ dla całkowitych $n \geq 2$.

Twierdzenie 2.9. *Dany jest dowolny trójkąt prostokątny, w którym jedna przyprostokątna jest całkowitą krotnością drugiej. Wówczas przeciwprostokątna w tym trójkącie jest niewspółmierna z krótszą przyprostokątną.*

Dowód: Rozważmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 oraz n i przeciwprostokątnej długości a .



Rysunek 6: Dowód Twierdzenia 2.9

Założmy nie wprost, że 1 i a są krotnościami tej samej δ , czyli $1 = k \cdot \delta$ oraz $a = l \cdot \delta$ dla pewnej wspólnej miary δ i dla pewnych dodatnich liczb całkowitych k, l . Wówczas n też jest krotnością tej samej δ , czyli $n = m \cdot \delta$, gdzie $m = n \cdot k$. Na początku na boku a odkładamy bok n , w wyniku czego powstaje nam punkt E . Przeprowadzamy teraz prostą prostopadłą do boku BC przechodzącą przez punkt E . W ten sposób na boku AC utworzył się punkt F . W ten sposób powstał trójkąt $\triangle EFC$, który jest podobny do trójkąta $\triangle ABC$, ponieważ:

- oba trójkąty są prostokątne,
- posiadają jeden wspólny kąt $\angle ECF = \angle ACB$,
- z powyższych warunków wynika, że $\angle EFC = \angle ABC$.

Teraz zobaczmy ile wynoszą długości boków trójkąta $\triangle EFC$: $|CE| = x = a - n = l \cdot \delta - m \cdot \delta = (l - m) \cdot \delta$, więc x jest wielokrotnością tej samej δ . Korzystając z podobieństwa do $\triangle ABC$ otrzymujemy zależność $|EF| = n \cdot x$. Aby wyznaczyć długość ostatniego boku, przyjrzyjmy się trójkątom $\triangle ABF$ oraz $\triangle FBE$. Są to trójkąty prostokątne ze wspólną przeciwprostokątną oraz przyprostokątną tej samej długości $|BA| = |BE| = n$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa $|AF| = |FE| = n \cdot x$. Stąd wynika, że rozważane trójkąty są przystające z cechy bok - bok - bok. Możemy obliczyć, że $|FC| = 1 - n \cdot x$, też jest krotnością tej samej δ (wynika to też z Obserwacji 1.2)

W ten sposób powstał nam mniejszy trójkąt $\triangle EFC$ podobny do trójkąta $\triangle ABC$. To, że jest on mniejszy, wynika np. z nierówności:

$$x < n \cdot x = |FA| < |AC|.$$

Powyższy proces możemy powtarzać w nieskończoność, co prowadzi nas do powstania coraz mniejszych trójkątów podobnych. W wyniku tego powstaje ciąg coraz krótszych odcinków, które są krotnościami tego samego odcinka δ . W ten sposób dochodzimy do sprzeczności, ponieważ nie istnieje nieskończony malejący ciąg odcinków będących krotnościami tego samego odcinka δ . $\square$

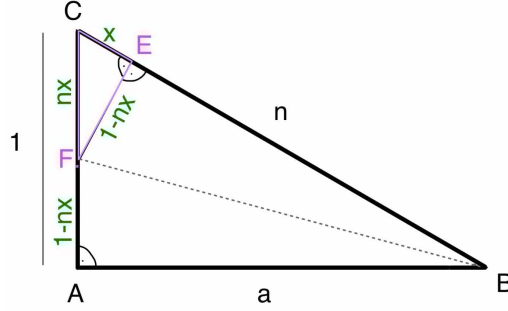
Na podstawie Lematu 1.4, Twierdzenie 2.9 daje nam następujący wniosek.

Wniosek 2.10. Dla dowolnego trójkąta prostokątnego o wymiarach $1, n, a$ przyprostokątna o długości 1 oraz przeciwprostokątna o długości a są niewspółmierne, czyli wyrażenie $a = \sqrt{1 + n^2}$ jest liczbą niewymierną.

Kolejne twierdzenie dostarcza nam jeszcze jedną nieskończoną serię par niewspółmiernych odcinków.

Twierdzenie 2.11. *Dany jest trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna jest n -krotnością jednej z przyprostokątnych. Wówczas druga przyprostokątna jest niewspółmierna z tą pierwszą.*

Dowód: Rozważmy trójkąt prostokątny $\triangle ABC$, gdzie przyprostokątne mają długości 1 i a , natomiast przeciwprostokątna n (patrz Rysunek 7).



Rysunek 7: Dowód Twierdzenia 2.11

Założmy nie wprost, że 1 i a są współmierne czyli są krotnościami tej samej δ , co znaczy, że $1 = k \cdot \delta$ i $a = l \cdot \delta$. Wtedy n też jest krotnością tej samej δ , co można zapisać, że $n = m \cdot \delta$. Najpierw na przeciwprostokątnej odkładamy przyprostokątną długości a , w ten sposób powstaje nam punkt E . Następnie na boku AC wyznaczamy taki punkt F , że $EF \perp CB$. Wtedy $|CE| = x = n \cdot a = (m - l) \cdot \delta$ jest też wielokrotnością tej samej δ . Przeanalizujemy trójkąty $\triangle ABC$ oraz $\triangle EFC$:

- mają kąt o mierze 90° ,
- mają wspólny kąt przy wierzchołku C ,
- z powyższych warunków wynika, że ich trzeci kąt również jest tej samej miary.

Zatem trójkąty $\triangle ABC$ oraz $\triangle EFC$ są podobne z cechy podobieństwa kąt-kąt-kąt (KKK). Wiemy, że długość boku CE w trójkącie $\triangle EFC$ wynosi x . Z faktu, że trójkąt ten jest podobny do trójkąta $\triangle ABC$, wnioskujemy, że długość boku CF wynosi $n \cdot x$. Do wyznaczenia długości boku FE musimy rozważyć trójkąty $\triangle ABF$ i $\triangle EBF$. Oba są trójkątami prostokątnymi, mają wspólną przeciwprostokątną BF , dodatkowo mają przyprostokątną tej samej długości $|AB| = |EB| = a$ oraz na mocy twierdzenia Pitagorasa $|AF| = |FE|$. Z tego wynika, że trójkąty $\triangle ABF$ i $\triangle EBF$ są przystające:

$$\triangle ABF \cong \triangle EBF.$$

Ponadto wiemy, że $|AF| = |AC| - |FC| = 1 - n \cdot x$, zatem $|EF| = 1 - n \cdot x$. Na podstawie Obserwacji 1.2 wnioskujemy, że $|EF|$ jest krotnością tego samego odcinka δ . W ten sposób powstał nam mniejszy trójkąt $\triangle EFC$ podobny do trójkąta $\triangle ABC$, ponieważ:

$$x < n \cdot x = |CF| < |AC|.$$

W nowo powstałym trójkącie przeciwprostokątna $|CF| = n \cdot x$ oraz przyprostokątna $|FE| = 1 - n \cdot x$ są krotnościami tego samego odcinka δ . Powyższy proces możemy powtarzać nieskończenie wiele razy, co prowadzi nas do powstania coraz mniejszych trójkątów podobnych, których boki są krotnościami tego samego odcinka δ . W wyniku konstrukcji otrzymujemy ciąg odcinków, których długości są malejącymi wielokrotnościami tej samej δ . Prowadzi to do sprzeczności, gdyż nie można utworzyć nieskończonego ciągu malejących odcinków o długościach będących wielokrotnościami jednej ustalonej wartości. $\square$

Na podstawie Lematu 1.4, Twierdzenie 2.11 daje nam następujący wniosek.

Wniosek 2.12. Dla dowolnego trójkąta prostokątnego o bokach długości 1, a , n przyprostokątna długości 1 oraz przyprostokątna długości a są niewspółmierne, czyli wyrażenie $a = \sqrt{n^2 - 1}$ jest liczbą niewymierną.

2.3 Niewspółmierność boków kwadratów w zależności od stosunku ich pól

W ostatniej części projektu przedstawimy przykłady niewspółmierności boków kwadratów, z których jeden ma pole odpowiednio 2, 3, 5 i 7 razy mniejsze od drugiego. Każdy przypadek zostanie zilustrowany geometrycznym dowodem opartym na symetrycznym układaniu mniejszych kwadratów wzdłuż przekątnej kwadratu wyjściowego. Podejście to, jak w poprzednim podrozdziale, prowadzi do sprzeczności wynikającej z powstania nieskończonego, malejącego ciągu dodatnich liczb całkowitych.

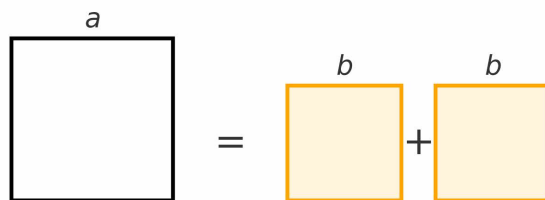
Niewspółmierność boku kwadratu z boki kwadratu o polu dwukrotnie mniejszym.

Pierwszy dowód w tym podrozdziale pokaże, że bok kwadratu jest odcinkiem niewspółmiernym względem boku kwadratu o dwukrotnie mniejszym polu. Ogólna koncepcja została zaczerpnięta z opracowania internetowego oznaczonego jako [7]. Rozumowanie zostało jednak przez nas rozwinięte i wzbogacone o dodatkowe wyjaśnienia.

Twierdzenie 2.13. *Bok kwadratu jest odcinkiem niewspółmiernym względem boku kwadratu o dwukrotnie mniejszym polu.*

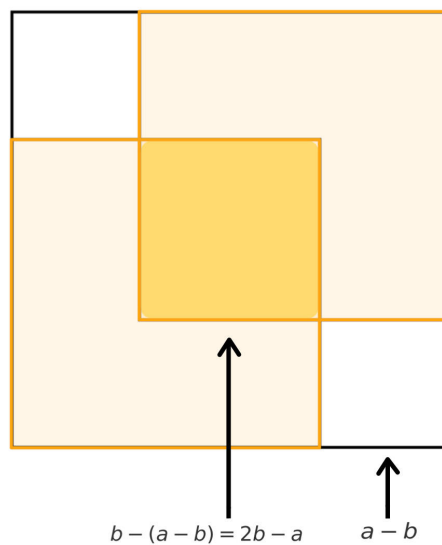
Dowód: Niech a oznacza długość boku większego kwadratu, natomiast b długość boku kwadratu, którego pole jest dwa razy mniejsze. Załóżmy nie wprost, że bok o długości a jest współmierny z boki o długości b . Możemy więc zapisać, że $a = m \cdot \delta$, natomiast $b = n \cdot \delta$ dla pewnej wspólnej miary δ oraz

liczb $m, n \in \mathbb{N}$. Z założenia wiemy, że pole kwadratu o boku długości a jest dwa razy większe od pojedynczego pola kwadratu o boku b , więc suma dwóch mniejszych kwadratów powinna dokładnie pokryć powierzchnię wyjściowego kwadratu (patrz Rysunek 8)



Rysunek 8: Kwadraty z Twierdzenia 2.13

Umieszczamy mniejsze kwadraty wewnątrz dużego w jego przeciwległych wierzchołkach (patrz Rysunek 9).



Rysunek 9: Dowód Twierdzenia 2.13

W dwóch przeciwległych rogach wyjściowego kwadratu powstały kwadratowe obszary, które nie zostały pokryte. Ich boki są równe różnicy boku kwadratu długości a oraz b , czyli $a - b$. Kwadraty o boku długości b , umieszczone wewnątrz większego kwadratu nachodzą na siebie, w wyniku czego powstaje obszar wspólny w kształcie kwadrat. Bok tego nakładającego się kwadratu

jest równy różnicy boku kwadratu długości b oraz $a - b$. Z tego wynika, że długość boku powstałego kwadratu jest równa $b - (a - b) = 2 \cdot b - a$.

Z założenia wiemy, że powierzchnia dwóch kwadratów o boku długości b jest równa powierzchni kwadratu o boku długości a . Możemy zatem wnioskować, że powierzchnia obszaru pokrytego dwukrotnie, jest równa powierzchni obszaru niepokrytego przez żaden kwadrat, co daje równanie:

$$(2 \cdot b - a)^2 = 2 \cdot (a - b)^2$$

Zauważmy, że powstaje tu identyczna zależność jak na początku, tylko tym razem długości boków kwadratów to:

$$a_1 = 2 \cdot b - a = 2 \cdot n \cdot \delta - m \cdot \delta = (2 \cdot n - m) \cdot \delta = m_1 \cdot \delta$$

$$b_1 = a - b = m \cdot \delta - n \cdot \delta = (m - n) \cdot \delta = n_1 \cdot \delta$$

Powyższe długości boków nowych kwadratów są całkowitymi krotnościami tego samego odcinka δ . Ponadto zauważmy, że kwadrat o boku długości a_1 jest mniejszy od kwadratu o boku długości a , co można wywnioskować z Rysunku 2.13. Zatem możemy wyciągnąć wniosek, że $m_1 < m$. Tę nierówność uzasadnia również następujący ciąg wynikających z siebie nierówności.

$$\begin{aligned} b &< a \\ \Downarrow \\ n \cdot \delta &< m \cdot \delta \\ \Downarrow \\ 2 \cdot n &< 2 \cdot m \\ \Downarrow \\ 2 \cdot n - m &< m \\ \Downarrow \\ m_1 &< m \end{aligned}$$

Ponieważ możemy powtarzać tę konstrukcję w nieskończoność, za każdym razem otrzymując parę liczb naturalnych m_i, n_i takich, że $m_i < m_{i-1}$, powstaje w ten sposób ściśle malejący ciąg liczb naturalnych:

$$m > m_1 > m_2 > m_3 > \dots$$

co prowadzi do sprzeczności, gdyż nie może być nieskończenie wiele różnych liczb całkowitych dodatnich mniejszych od m .

Zatem bok kwadratu jest odcinkiem niewspółmiernym z bokiem kwadratu o dwukrotnie mniejszym polu.

Wniosek 2.14. Na mocy Twierdzenia 2.13 oraz Lematu 1.4 wnioskujemy, że liczba $\sqrt{2}$, będąca stosunkiem długości boków dwóch kwadratów, z których jeden ma pole dwukrotnie mniejsze od drugiego, jest liczbą niewymierną.

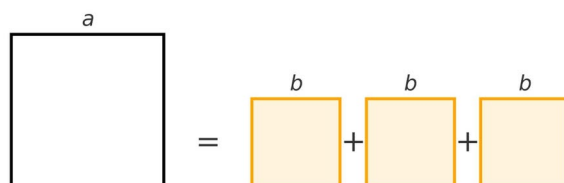
Niewspółmierność boku kwadratu z bokiem kwadratu o polu trzykrotnie mniejszym.

Kolejny dowód dotyczy niewspółmierności boku kwadratu względem boku kwadratu o trzykrotnie mniejszym polu. Jego ogólna idea pochodzi z opracowania internetowego [7]. Został on jednak wzbogacony o nasze własne obserwacje oraz dodatkowe wyjaśnienia, które mają na celu pogłębienie zrozumienia przedstawionego rozumowania.

Twierdzenie 2.15. *Bok kwadratu jest odcinkiem niewspółmiernym względem boku kwadratu o trzykrotnie mniejszym polu.*

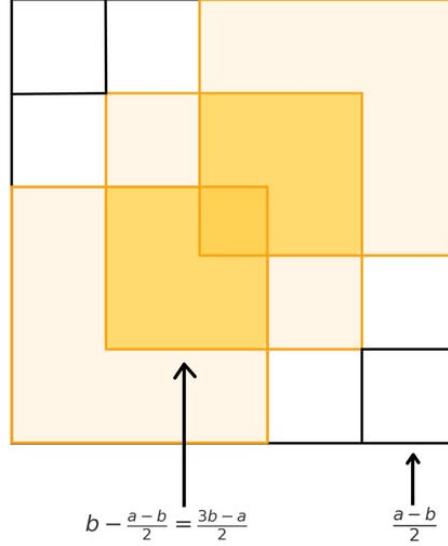
Dowód: Niech a to długość boku większego kwadratu, natomiast b to długość boku kwadratu o trzykrotnie mniejszym polu. Załóżmy nie wprost, że bok kwadratu o długości a jest współmierny z bokiem kwadratu o długości b . To oznacza, że możemy te wielkości napisać następująco: $a = m \cdot \delta$ oraz $b = n \cdot \delta$ dla pewnej wspólnej miary δ i $m, n \in \mathbb{N}$.

Z założenia wiemy, że pole kwadratu o boku a jest trzy razy większe od pojedynczego pola kwadratu o boku b . Z tego wynika, że suma powierzchni trzech mniejszych kwadratów powinna dokładnie pokryć powierzchnię wyjściowego kwadratu (patrz Rysunek 10).



Rysunek 10: Kwadraty z Twierdzenia 2.15

Umieszczamy małe kwadraty wewnątrz dużego kwadratu symetrycznie rozłożone względem głównej przekątnej (patrz Rysunek 11). W wyniku nakładania się kwadratów o boku b powstały dwa jednakowe mniejsze żółte kwadraty, które zostały pokryte podwójnie. Natomiast w dwóch pozostałych rogach kwadratu wyjściowego powstały obszary, które nie zostały pokryte przez żaden z trzech kwadratów o boku b .



Rysunek 11: Dowód Twierdzenia 2.15

Niepokryty obszar składa się łącznie z sześciu jednakowych kwadratów o boku $\frac{a-b}{2}$, co można łatwo wywnioskować z rysunku. Z tego z kolei wynika, że nakładające się żółte kwadraty mają bok długości $b - \frac{a-b}{2} = \frac{3b-a}{2}$. Korzystając z faktu, że trzy kwadraty o boku długości b pokrywają całą powierzchnię kwadratu o boku a , wnioskujemy, że suma pól dwóch żółtych kwadratów o boku długości $\frac{3b-a}{2}$ jest równa sumie pól sześciu kwadratów o boku długości $\frac{a-b}{2}$. Możemy zapisać to jako:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \left(\frac{3 \cdot b - a}{2} \right)^2 &= 6 \cdot \left(\frac{a - b}{2} \right)^2 \\
 \Downarrow \\
 \left(\frac{3 \cdot b - a}{2} \right)^2 &= 3 \cdot \left(\frac{a - b}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy tę samą zależność co na początku dowodu, lecz tym razem dla kwadratów o następujących długościach boków:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{3 \cdot b - a}{2} = \frac{3 \cdot n \cdot \delta - m \cdot \delta}{2} = \frac{3 \cdot n - m}{2} = m_1 \cdot \delta, \\
 b_1 &= \frac{a - b}{2} = \frac{m \cdot \delta - n \cdot \delta}{2} = \frac{m - n}{2} = n_1 \cdot \delta,
 \end{aligned}$$

gdzie m_1 oraz n_1 są całkowite. Do udowodnienia całkowitości tych liczb posłuży nam fakt, że kwadrat o boku długości a ma trzykrotnie większe pole niż kwadrat o boku długości b . Stąd:

$$\begin{aligned} a^2 &= 3 \cdot b^2 \\ \Downarrow \\ (m \cdot \delta)^2 &= 3 \cdot (n \cdot \delta)^2 \\ \Downarrow \\ m^2 &= 3 \cdot n^2 \end{aligned}$$

Z ostatniej równości możemy wnioskować, że liczby m i n mają tę samą parzystość. Na tej podstawie stwierdzamy, że liczby $3n - m$ oraz $m - n$ są parzyste, a zatem liczby $m_1 = \frac{3n-m}{2}$ oraz $n_1 = \frac{m-n}{2}$ są całkowite. W rezultacie otrzymujemy kwadraty, których długości boków są całkowitymi krotnościami tego samego odcinka δ . Co więcej nowe kwadraty są mniejsze od pierwotnych, co możemy zauważyć na Rysunku 11. W celu dokładniejszego zobrazowania tej zależności, przeprowadźmy także rozumowanie arytmetyczne.

$$\begin{aligned} b &< a \\ \Downarrow \\ n \cdot \delta &< m \cdot \delta \\ \Downarrow \\ n &< m \\ \Downarrow \\ \frac{3}{2} \cdot n &< \frac{3}{2} \cdot m \\ \Downarrow \\ \frac{3}{2} \cdot n - \frac{1}{2} \cdot m &< m \\ \Downarrow \\ m_1 &< m \end{aligned}$$

Powtarzając powyższy proces możemy w nieskończoność konstruować pary kwadratów, dla których pole jednego z nich jest trzy razy większe od pola drugiego. W ten sposób otrzymujemy ściśle malejący ciąg dodatnich liczb całkowitych:

$$m > m_1 > m_2 > m_3 > \dots$$

co prowadzi do sprzeczności, ponieważ nie istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych spełniających powyższą nierówność. Zatem długości

boków tych kwadratów są niewspółmierne, czyli odcinek będący bokiem kwadratu jest odcinkiem niewspółmiernym względem boku drugiego kwadratu o trzykrotnie mniejszym polu. $\square$

Jeśli rozważamy parę kwadratów, z których jeden ma pole trzy razy większe od drugiego, to stosunek długości ich boków jest równy $\sqrt{3}$. Korzystając z tej własności oraz Lematu 1.4 otrzymujemy następujący wniosek.

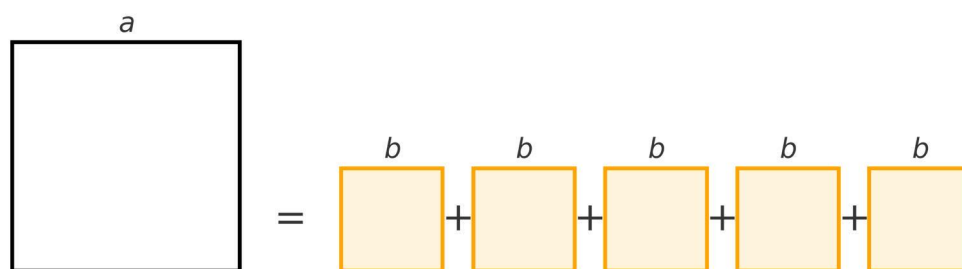
Wniosek 2.16. Liczba $\sqrt{3}$ jest niewymierna.

Niewspółmierność boku kwadratu z bokiem kwadratu o polu pięciokrotnie mniejszym.

W kolejnym dowodzie będziemy rozpatrywać kwadrat, którego pole jest pięciokrotnie mniejsze od pola większego kwadratu. Wykażemy, że długości ich boków nie są współmierne, co zostało również omówione w pracy [7].

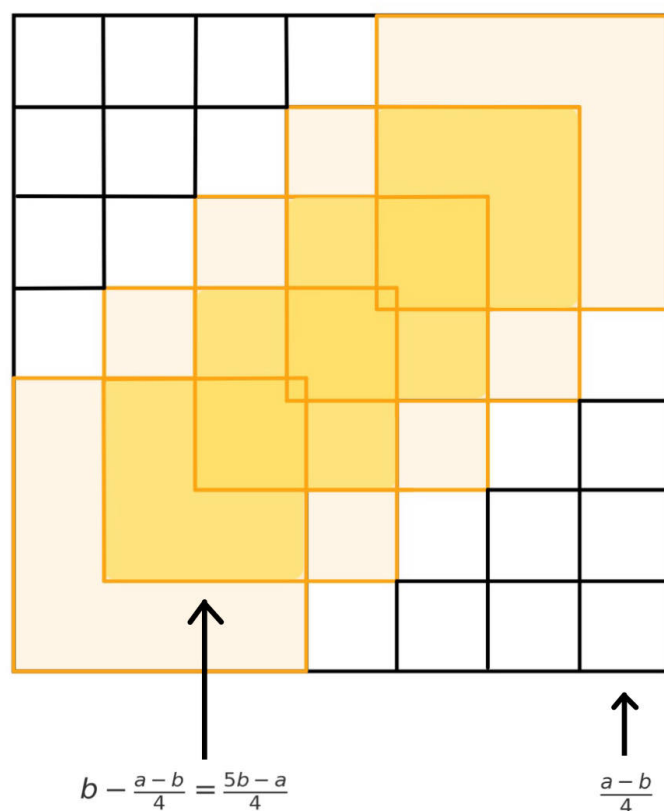
Twierdzenie 2.17. *Bok kwadratu jest odcinkiem niewspółmiernym względem boku kwadratu o polu pięciokrotnie mniejszym.*

Dowód: Załóżmy, że a to długość boku kwadratu, natomiast b to długość boku kwadratu, którego pole jest pięć razy mniejsze. Zakładamy nie wprost, że odcinek o długości a jest współmierny z odcinkiem o długości b , co oznacza, że $a = m \cdot \delta$, natomiast $b = n \cdot \delta$ dla pewnej wspólnej miary δ oraz liczb m oraz n , które są dodatnie i całkowite. Z założenia wiemy, że pole kwadratu o boku długości a jest pięć razy większe od pojedynczego pola kwadratu o boku długości b , więc suma pięciu mniejszych kwadratów powinna dokładnie pokryć powierzchnię wyjściowego kwadratu (patrz Rysunek 12).



Rysunek 12: Kwadraty z Twierdzenia 2.17

Umieszczamy mniejsze kwadraty wewnątrz dużego kwadratu symetrycznie oraz równomiernie wzdłuż głównej przekątnej (patrz Rysunek 13).



Rysunek 13: Dowód Twierdzenia 2.17

Każdy kwadrat nachodzi na kolejny, w wyniku czego powstają cztery mniejsze jednakowe kwadraty w kolorze żółtym o boku długości $b - \frac{a-b}{4} = \frac{5b-a}{4}$ (patrz Rysunek 13), które są pokryte podwójnie. Z kolei w dwóch rogach wyjściowego kwadratu powstaje obszar, który nie został objęty przez żaden z pięciu kwadratów o boku b . Obszar ten składa się z dwudziestu "pustych" kwadratów o boku długości $\frac{a-b}{4}$ (patrz Rysunek 13). Kluczowy jest tu fakt, że wszystkie pięć kwadratów o boku długości b całkowicie mieszczą się wewnątrz wyjściowego kwadratu. Stąd wyciągamy wniosek, że łączne pole czterech żółtych kwadratów o boku długości $\frac{5b-a}{4}$ jest równe sumie dwudziestu pól "pustych" kwadratów o boku długości $\frac{a-b}{4}$. W ten sposób otrzymujemy

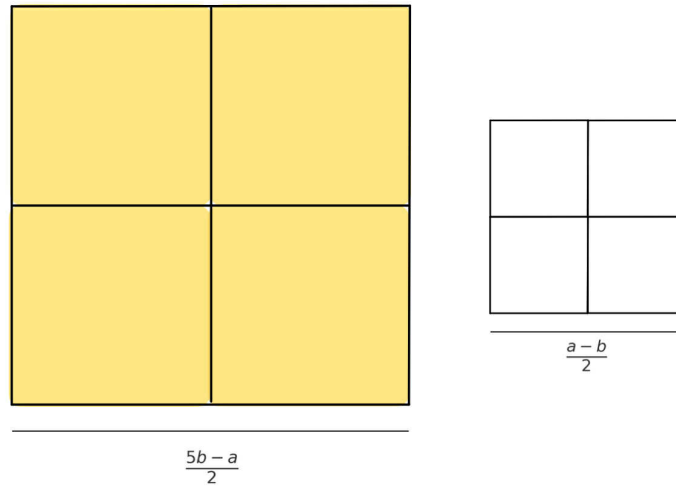
zależność:

$$4 \cdot \left(\frac{5 \cdot b - a}{4} \right)^2 = 20 \cdot \left(\frac{a - b}{4} \right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{5 \cdot b - a}{4} \right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{a - b}{4} \right)^2.$$

W dalszych rozważaniach będziemy analizować kwadraty składające się odpowiednio z czterech żółtych kwadratów o boku długości $\frac{5 \cdot b - a}{4}$ i czterech "pustych" kwadratów o boku długości $\frac{a - b}{4}$, z czego wynika, że nowe kwadraty będą miały długości boków $a_1 = \frac{5 \cdot b - a}{2}$ oraz $b_1 = \frac{a - b}{2}$ (patrz Rysunek 14).



Rysunek 14: Dalsza część dowodu Twierdzenia 2.17

Wtedy wcześniejsza zależność po pomnożeniu obustronnie przez 4, będzie wyglądać następująco:

$$\left(\frac{5 \cdot b - a}{2} \right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{a - b}{2} \right)^2.$$

Rozważmy więc długości boków nowopowstałych kwadratów:

$$a_1 = \frac{5 \cdot b - a}{2} = \frac{5 \cdot n \cdot \delta - m \cdot \delta}{2} = \frac{5n - m}{2} \cdot \delta = m_1 \cdot \delta$$

$$b_1 = \frac{a - b}{2} = \frac{m \cdot \delta - n \cdot \delta}{2} = \frac{m - n}{2} \cdot \delta = n_1 \cdot \delta$$

Powyższe długości boków nowych kwadratów są całkowitymi krotnościami tego samego odcinka δ . Aby udowodnić całkowitość liczb dodatnich m_1 oraz n_1 , wróćmy do założenia, że początkowy kwadrat o boku długości a ma pięciokrotnie większe pole niż kwadrat o boku długości b . Stąd:

$$\begin{aligned} a^2 &= 5 \cdot b^2 \\ \Downarrow \\ (m \cdot \delta)^2 &= 5 \cdot (n \cdot \delta)^2 \\ \Downarrow \\ m^2 &= 5 \cdot n^2 \end{aligned}$$

Z powyższej zależności wynika, że liczby m i n mają tę samą parzystość. Dzięki tej własności można stwierdzić, że liczby m_1 oraz n_1 są liczbami całkowitymi. Ponadto zauważamy, że kwadrat o boku długości b_1 jest mniejszy od kwadratu o boku długości b , co można wywnioskować z Rysunku 13. Powtarzając powyższy proces możemy w nieskończoność konstruować pary kwadratów, których stosunek pól jest równy 5, w związku z czym otrzymujemy ściśle malejący ciąg dodatnich liczb całkowitych:

$$m > m_1 > m_2 > m_3 > \dots,$$

co prowadzi do sprzeczności, gdyż nie istnieje nieskończenie wiele liczb dodatnich całkowitych, które spełniają powyższą nierówność. Zatem bok kwadratu jest odcinkiem niewspółmiernym względem boku kwadratu o pięciokrotnie mniejszym polu. $\square$

Wiadome jest, że jeżeli rozważamy parę kwadratów, taką że jeden z nich ma pole pięć razy mniejsze niż drugi, to stosunek długości ich boków jest równy $\sqrt{5}$.

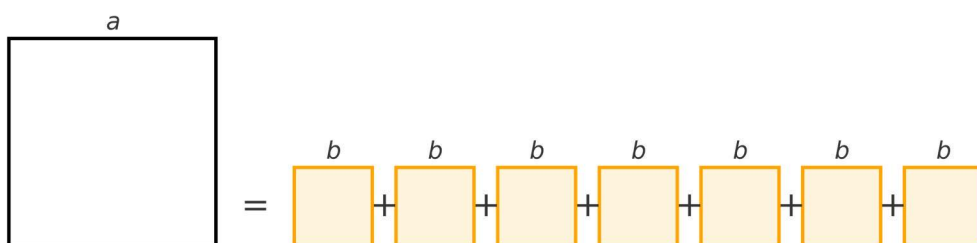
Wniosek 2.18. Na podstawie Twierdzenia 2.17 oraz Lematu 1.4 można stwierdzić, że liczba $\sqrt{5}$, będąca stosunkiem długości boków kwadratów, z których jeden ma pole pięciokrotnie mniejsze od drugiego, jest liczbą niewymierną.

Niewspółmierność boku kwadratu z bokiem kwadratu o polu siedmiokrotnie mniejszym.

Również w oparciu o pracę [7] przechodzimy do ostatniego przykładu w tym podrozdziale, dotyczącego kwadratu o polu siedmiokrotnie mniejszym niż pole wyjściowego kwadratu. Podobnie jak wcześniej, przyjęcie założenia o współmierności boków prowadzi do sprzeczności, co pozwala wykazać, że rozpatrywane odcinki nie mają wspólnej jednostki długości.

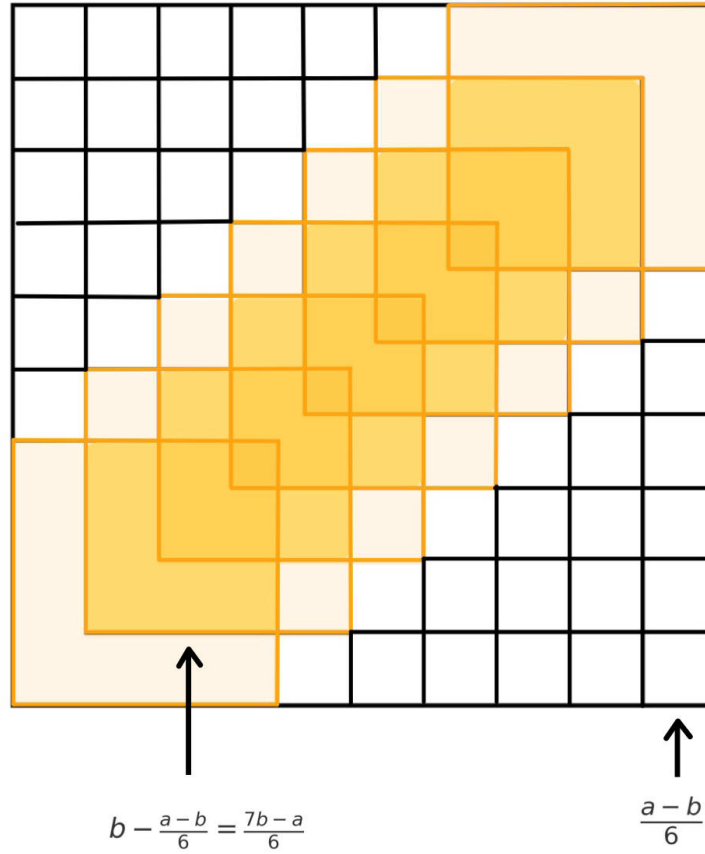
Twierdzenie 2.19. *Bok kwadratu jest odcinkiem niewspółmiernym względem boku kwadratu o polu siedmiokrotnie mniejszym.*

Dowód: Ponownie przyjmujemy, że a oznacza długość boku większego kwadratu, natomiast b to długość boku kwadratu, którego pole jest siedmiokrotnie mniejsze. Załóżmy nie wprost, że odcinki o długościach a i b są współmierne, czyli istnieje wspólna jednostka długości δ oraz dodatnie liczby całkowite m i n , takie że $a = m \cdot \delta$ oraz $b = n \cdot \delta$. Z faktu, że pole większego kwadratu jest siedem razy większe od pola jednego z mniejszych, wynika, iż siedem takich mniejszych kwadratów powinno całkowicie wypełnić powierzchnię wyjściowego kwadratu (zob. Rysunek 15).



Rysunek 15: Kwadraty z Twierdzenia 2.19

Mniejsze kwadraty rozmieszczamy wewnątrz większego kwadratu w sposób symetryczny i równomierny wzdłuż jego głównej przekątnej (zob. Rysunek 16). Każdy z siedmiu kwadratów nachodzi częściowo na kolejny, w wyniku czego powstaje sześć jednakowych mniejszych kwadratów o boku długości $b - \frac{a-b}{6} = \frac{7b-a}{6}$ w kolorze żółtym (zob. Rysunek 16), które są objęte dwukrotnym pokryciem. Jednocześnie, w dwóch przeciwległych rogach większego kwadratu pozostają niezajęte fragmenty, które nie są pokryte przez żaden z mniejszych kwadratów. Obszary te składają się łącznie z czterdziestu dwóch "pustych" jednakowych kwadratów o boku długości $\frac{a-b}{6}$ (zob. Rysunek 16). Tutaj również istotne jest, że wszystkie siedem kwadratów o boku b mieszczą się w całości wewnątrz wyjściowego kwadratu.

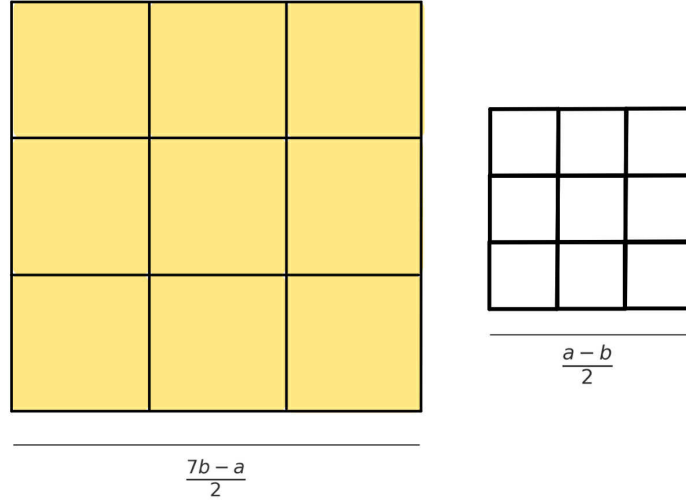


Rysunek 16: Dowód Twierdzenia 2.19

Wynika stąd, że całkowita powierzchnia sześciu żółtych kwadratów o boku $\frac{7 \cdot b - a}{6}$ musi być równa sumie pól czterdziestu dwóch "pustych" kwadratów o boku $\frac{a-b}{6}$. Otrzymujemy w ten sposób następującą zależność:

$$\begin{aligned}
 6 \cdot \left(\frac{7 \cdot b - a}{6} \right)^2 &= 42 \cdot \left(\frac{a - b}{6} \right)^2 \\
 \Downarrow \\
 \left(\frac{7 \cdot b - a}{6} \right)^2 &= 7 \cdot \left(\frac{a - b}{6} \right)^2.
 \end{aligned}$$

W dalszej części rozważań skupimy się na nowych kwadratach, które składają się odpowiednio z dziewięciu żółtych kwadratów o boku $\frac{7 \cdot b - a}{6}$ oraz dziewięciu "pustych" kwadratów o boku $\frac{a-b}{6}$. Z tego wynika, że długości boków nowych kwadratów są równe odpowiednio $a_1 = \frac{7 \cdot b - a}{2}$ oraz $b_1 = \frac{a-b}{2}$ (zob. Rysunek 17).



Rysunek 17: Dowód Twierdzenia 2.19

W takim przypadku wcześniejsza równość po pomnożeniu obu stron przez 9, przyjmuje postać:

$$\left(\frac{7 \cdot b - a}{2}\right)^2 = 7 \cdot \left(\frac{a - b}{2}\right)^2$$

Przyjrzyjmy się teraz długościom boków otrzymanych kwadratów:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{7 \cdot b - a}{2} = \frac{7 \cdot n \cdot \delta - m \cdot \delta}{2} = \frac{7n - m}{2} \cdot \delta = m_1 \cdot \delta \\ b_1 &= \frac{a - b}{2} = \frac{m \cdot \delta - n \cdot \delta}{2} = \frac{m - n}{2} \cdot \delta = n_1 \cdot \delta \end{aligned}$$

Otrzymane długości boków nowych kwadratów również stanowią całkowite wielokrotności tej samej jednostki długości δ . Aby wykazać, że odpowiadające im liczby m_1 oraz n_1 są dodatnimi liczbami całkowitymi, odwołamy się ponownie do założenia, że pole początkowego kwadratu o boku a jest siedem razy większe niż pole kwadratu o boku b . Wynika stąd, że:

$$\begin{aligned} a^2 &= 7 \cdot b^2 \\ \Downarrow \\ (m \cdot \delta)^2 &= 7 \cdot (n \cdot \delta)^2 \\ \Downarrow \\ m^2 &= 7 \cdot n^2 \end{aligned}$$

Ze znalezionej zależności wynika, że liczby m i n mają tę samą parzystość. Właściwość ta pozwala stwierdzić, że m_1 i n_1 są liczbami całkowitymi. Zauważmy ponadto, że bok kwadratu o długości b_1 jest krótszy niż bok kwadratu o długości b , co można dostrzec na Rysunku 16. Powtarzając opisaną wyżej procedurę, możemy w nieskończoność wyznaczać nowe pary kwadratów, których pola pozostają w stosunku 1 : 7. Tym samym otrzymujemy ściśle malejący ciąg dodatnich liczb całkowitych:

$$m > m_1 > m_2 > m_3 > \dots$$

Prowadzi to do sprzeczności, ponieważ nie może istnieć nieskończony ciąg dodatnich liczb całkowitych spełniających wskazaną nierówność. W konsekwencji bok kwadratu nie jest wspólniemy z boki kwadratu o siedmiokrotnie mniejszym polu. $\square$

Jeżeli rozpatrujemy dwa kwadraty, z których jeden ma pole siedmiokrotnie mniejsze od drugiego, to stosunek długości ich boków wynosi $\sqrt{7}$.

Wniosek 2.20. Na mocy Twierdzenia 2.19 oraz Lematu 1.4 wnioskujemy, że liczba $\sqrt{7}$, będąca stosunkiem długości boków dwóch kwadratów, z których jeden ma pole siedem razy mniejsze od drugiego, jest liczbą niewymierną.

Podsumowanie

W tej pracy zostały przedstawione różne przykłady par odcinków, które są niewspółmierne, czyli nie da się ich wyrazić jako wielokrotności jednej wspólnej jednostki długości. Wykorzystałyśmy do tego konstrukcje geometryczne oparte na klasycznych figurach, takich jak trójkąty, kwadraty oraz wielokąty foremne. W każdym przykładzie przyjęcie założenia o współmierności prowadzi do sprzeczności, ponieważ powstaje malejący ciąg liczb naturalnych, co jest niemożliwe.

Oprócz znanych przykładów, zostały zaprezentowane autorskie dowody ogólne. Pokazałyśmy, że w dowolnym trójkącie prostokątnym, w którym jedna z przyprostokątnych ma długość 1, a druga to n , przeciwprostokątna $\sqrt{n^2 + 1}$ jest z nią niewspółmierna. W drugim przypadku, gdy przeciwprostokątna ma długość n , a przyprostokątna długość 1, to druga przyprostokątna $\sqrt{n^2 - 1}$ także jest niewspółmierna z tą pierwszą. Dzięki tym uogólnieniom uzyskałyśmy nieskończenie wiele przykładów liczb niewymiernych, w tym np. liczby $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{24} = 2 \cdot \sqrt{6}$, $\sqrt{26}$ itd.

W ostatnim podrozdziale zostały zbadane przypadki, w których porównywałyśmy boki par kwadratów o polach pozostających w stosunku 2 : 1, 3 : 1, 5 : 1 i 7 : 1. Dla każdego z tych przykładów przeprowadziłyśmy dowody

pokazujące, że długości boków takich kwadratów również są niewspółmierne. Pozwoliło to na geometryczne uzasadnienie niewymierności liczb takich jak $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ i $\sqrt{7}$ - bez użycia metod algebraicznych. Całość pracy pokazuje, że podejście geometryczne nie tylko pozwala lepiej zrozumieć pojęcie niewspółmierności, ale także umożliwia samodzielne tworzenie ciekawych dowodów niewymierności znanych liczb.

Literatura

- [1] Krystyna Dałek, *Liczby i algorytmy, część 1*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1987.
- [2] Hans Rademacher, Otto Toeplitz, *O liczbach i figurach*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1956.
- [3] *Mathematics Stack Exchange*,
<https://math.stackexchange.com/questions/4752334/can-the-irrationality-of-sqrt3-be-proven-geometrically-by-infinite-descent-s>
- [4] *Incommensurability in the square*,
<https://www.atractor.pt/mat/incomensurabilidade/quadrado-en.html>
- [5] *Incommensurability in the regular pentagon*,
<https://www.atractor.pt/mat/incomensurabilidade/pentagono-en.html>
- [6] *Incommensurability in the regular hexagon*,
<https://www.atractor.pt/mat/incomensurabilidade/hexagono.html>
- [7] Ricardo Podesta, *Geometric Proofs That $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ and $\sqrt{7}$ Are Irrational*,
Mathematics Magazine
https://www.researchgate.net/publication/339972098_A_geometric_proof_that_sqrt_3_sqrt_5_and_sqrt_7_are_irrational