

Teoria węzłów

M. Mazurek

S. Cygan

B. Maciurak

R. Suwalski

19 lutego 2016

Spis treści

1	Wprowadzenie	2
1.1	Definicja	2
1.2	Równoważność węzłów	3
1.3	Diagram	4
1.4	Każdy kij ma dwa końce, czyli orientacja węzła	7
1.5	Ruchy Reidemeistera	8
2	Kolorowania węzłów	12
2.1	Kolorowanie diagramów	12
2.2	Równania kolorowań	14
2.3	Macierze kolorowań	16
2.4	Własności wyznacznika diagramu	19
2.5	Wyznacznik sumy spójnej	24
2.6	Grupy kolorowań	26
2.7	Przykład zastosowań - rodzina węzłów	26
3	Wielomiany Alexandra	29
3.1	Wielomian Laurenta	29
3.2	Macierz skrzyżowań	30
3.3	Macierz i wielomian Alexandra	31
3.4	Suma spójna	36
3.5	Równoważna definicja	37
4	Wielomian Jonesa	38
4.1	Nawias Kauffmana	38
4.2	Spin	39
4.3	Wielomian Jonesa	40
4.4	Relacja kłębiasta	40
4.5	Odwrotności, lustra i sumy	41
4.6	Rozpiętość i wielomian Jonesa	41
4.7	Wielomian HOMFLY	44
4.8	Węzły pierwsze	45

1 Wprowadzenie

Jest dość dużo (więcej niż trzy) definicji węzła. Każda z nich w pewnym sensie oddają intuicję, która kryje się za potocznym rozumieniem nazwy tego pojęcia. W tym rozdziale podamy jedną z nich. Powiemy też, co to znaczy, że dwa węzły są równoważne, tj. zastanowimy się, kiedy mając dane dwa węzły jesteśmy w stanie równoważnie (nie zmieniając "ciągłej struktury") zdeformować jeden z nich, aby otrzymać drugi. Zastanowimy się nad tym, jakie przekształcenia możemy uważać za takie deformacje. Na koniec sformułujemy i udowodnimy twierdzenie Reidemeistera.

1.1 Definicja

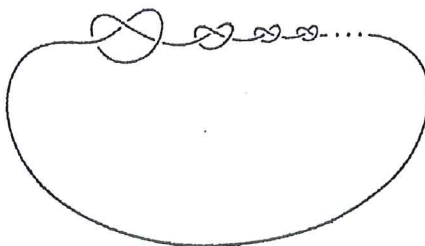
Zacznijmy ten rozdział do sformułowania definicji węzła. Kiedy definiuje się matematyczne pojęcie ważne jest (przynajmniej takie wrażenie ma autor tej części pracy), żeby definicja odpowiadała naszym oczekiwaniom, tj. żeby gwarantowała oczekiwane własności, a jednocześnie zachowywała możliwie jak największy stopień ogólności.

Na pierwszy rzut oka następujące podejście wygląda dość rozsądnie.

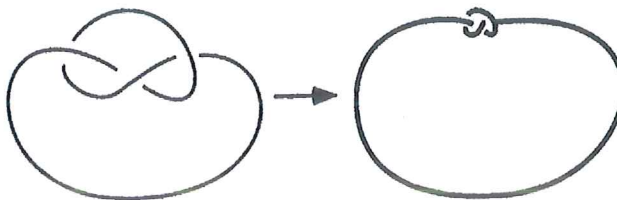
Definicja 1.1. Węzłem nazywamy ciągłą funkcję $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, która spełnia następujące własności:

1. $f(0) = f(1)$,
2. $\forall x, y \in [0, 1) \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

W rzeczywistości ma ono dość poważne wady. Po pierwsze, powyższa definicja dopuszcza tak zwane dziłkie węzły (rysunek poniżej), co jest sprzeczne z intuicyjnym pojmowaniem węzła, który może mieć jedynie skończenie wiele pętli.



Po drugie wychodząc od definicji [1.1](#) mielibyśmy kłopot z określeniem tego, kiedy dane dwa węzły są równoważne. Naturalną definicją wydaje się następująca: węzły K i J uważamy za równoważne, gdy istnieje rodzina węzłów $\{K_t\}_{t \in [0, 1]}$, taka że $K_0 = K$, oraz $K_1 = J$. Oprócz tego węzły K_t i K_s powinny leżeć dowolnie "blisko" dla t dostatecznie bliskich s . W sensie tej definicji (nie wnikając w to, co oznacza, że dwa węzły leżą "blisko"), moglibyśmy ściągnąć pojedynczą pętlę do okręgu (patrz rysunek poniżej).



Rozwiązanie naszych problemów okazuje się zaskakująco proste. Zamiast definiować węzeł za pomocą ciągłej krzywej, można posłużyć się łamaną. Skąd ten pomysł? Łamana ma skończenie wiele wierzchołków, zatem powinniśmy bez specjalnych problemów wykluczyć z naszych rozważań tak zwane dzikie węzły. Takie dyskretne podejście pozwoli nam też stosunkowo w prosty sposób zdefiniować pojęcie elementarnej deformacji.

Definicja 1.2. Odcinkiem domkniętym łączącym parę różnych punktów $p, q \in \mathbb{R}^3$ nazwiemy zbiór

$$[p, q] := \{\lambda p + (1 - \lambda)(q - p) : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Definicja 1.3. Niech $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^3$ będą parami różne. Łamaną o wierzchołkach p_i nazwiemy zbiór

$$\bigcup_{i=1}^n [p_i, p_{i+1}].$$

Łamaną tej postaci będziemy oznaczać przez $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Gdy $p_1 = p_n$ mówimy o łamanej zamkniętej. Jeśli dodatkowo każdy punkt łamanej należy do dokładnie jednego odcinka, mówimy wtedy o łamanej bez samoprzecięć. Jeśli dodatkowo $p_1 = p_n$, wówczas mówimy o łamanej zamkniętej bez samoprzecięć. Odcinek $[p_i, p_{i+1}]$ będziemy dalej krótko oznaczać przez I_i .

Definicja 1.4. Węzeł to łamana zamknięta w $\mathbb{R}^3$ bez samoprzecięć.

Uwaga Jeśli węzeł K to łamana $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, wówczas zbiór $(p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, \dots, p_{\sigma(n)})$, gdzie σ to cykl długości n definiuje ten sam węzeł K . Co więcej, jeśli dla pewnego i punkty p_{i-1}, p_i, p_{i+1} są współliniowe, to oczywiście $K = (p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$. Z ostatniego spostrzeżenia łatwo można wywnioskować, że węzeł jest jednoznacznie wyznaczony przez minimalny (w sensie inkluzji) zbiór wierzchołków łamanej, która ten węzeł definiuje.

Definicja 1.5. Niech uporządkowany zbiór $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ definiuje węzeł K . Jeśli żaden jego właściwy podzbiór nie definiuje tego samego węzła K , wówczas elementy zbioru $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ nazwiemy wierzchołkami węzła K .

Od tego momentu będziemy definiować węzeł poprzez łamane o minimalnej liczbie wierzchołków, chyba, że zostanie powiedziane inaczej. Na koniec tego podrozdziału podamy definicję splotu.

Definicja 1.6. Splotem nazywamy sumę (mnogościową) skończenie wielu parami rozłącznych węzłów. Każdy taki węzeł nazywamy składową splotu. W szczególności węzeł jest splotem o jednej składowej.

1.2 Równoważność węzłów

W tym podrozdziale zastanowimy się nad tym, kiedy dwa, pozornie różne węzły, w istocie możemy uważać za takie same (mimo iż explicite nie są tym samym węzłem). Zaczniemy od zdefiniowania kilku pojęć.

Definicja 1.7. Niech dane będą węzły $J = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ oraz $K = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Powiemy, że J powstaje przez elementarną deformację węzła K gdy:

1. punkt p_0 nie jest współliniowy z p_1 oraz z p_n ,
2. część wspólna trójkąta (trójkąt rozumiemy jako trójkąt z wnętrzem) o wierzchołkach w punktach p_0, p_1, p_n z węzłem K zawiera się w odcinku $[p_1, p_n]$.

Przekształcenie odwrotne do elementarnej deformacji również jest elementarną deformacją.

Uwaga Powyższą definicję można uogólnić zastępując wąż K węzłem $(p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_n)$ dla $i = 1, 2, \dots, n-1$, oraz zastępując wierzchołki p_0, p_1, p_n wierzchołkami p_i, p_{i+1}, p_{i-1} odpowiednio.

Definicja 1.8. Mówimy, że węzły J i K są równoważne, gdy istnieje skończony ciąg węzłów $K_0, K_1, \dots, K_n$, gdzie $K_0 = K, K_n = J$, oraz K_{i+1} jest elementarną deformacją węzła K_i .

Sprawdzenie, że podana relacja jest w istocie relacją równoważności pozostawiamy czytelnikowi jako proste ćwiczenie.

Dla przykładu rozważmy dowolny n -kąt wypukły na płaszczyźnie. Można łatwo pokazać przez indukcję (po liczbie wierzchołków), że każdy taki wielokąt jest równoważny trójkątowi. Istotnie, dla trójkąta teza jest oczywista. Załóżmy jej prawdziwość dla wszystkich liczb naturalnych nie większych, niż n . Mając dowolny $n+1$ -kąt wypukły $J = (k_0, k_1, k_2, \dots, k_n)$ łatwo się przekonać, że jest on elementarnym przekształceniem n -kąta $K = (k_1, k_2, \dots, k_n)$. To, że K jest wielokątem wypukłym, podobnie jak to, że pierwszy warunek z definicji [1.7] jest spełniony, jest oczywiste. Drugi warunek jest spełniony, ponieważ z wypukłości K zachodzi $([p_0, p_1] \cup [p_0, p_n]) \cap K = \{p_1, p_n\}$.

Definicja 1.9. Każdy węzeł, który jest elementem klasy abstrakcji opisanej w przykładzie nazywamy niewęzłem.

Definicja 1.10. Sploten trywialnym nazywamy sumę mnogościową skończenie wielu rozłącznych niewęzłów leżących w jednej płaszczyźnie.

Uwaga W przypadku nie-splotu warunek leżenia w jednej płaszczyźnie jest istotny. Aby się o tym przekonać czytelnik może zechcieć odpowiedzieć na pytanie, jak mogą leżeć względem siebie rozłączne okręgi w $\mathbb{R}^3$, a jak muszą w $\mathbb{R}^2$.

Od tej chwili węzły równoważne będziemy uważać za tożsame, to znaczy zamiast pisać, że węzeł J jest równoważny węzłowi K , będziemy pisać krótko $J = K$ (właśnie w taki sposób został powyżej zdefiniowany niewęzeł). Odróżniać będziemy tylko te węzły, które nie są równoważne.

1.3 Diagram

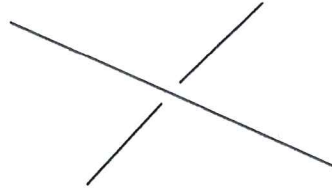
Od początku tej pracy, z konieczności rysowaliśmy węzły (obiekty żyjące w przestrzeni trójwymiarowej) na płaszczyźnie. W tym podrozdziale podamy ścisłą definicję tych dwuwymiarowych rysunków (diagramów) i pokażemy, że jeśli dwa węzły mają przedstawienie w postaci tego samego diagramu, to są w istocie równoważne.

Definicja 1.11. Rzutem zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^3$ na płaszczyznę nazwiemy funkcję $p: A \rightarrow \mathbb{R}^2$ określoną wzorem $p(x, y, z) = (x, y)$. Kiedy A jest węzłem, $p[A]$ nazywamy rzutem węzła A na płaszczyznę.

Definicja 1.12. Rzutem regularnym węzła K nazywamy takie rzutowanie p węzła K na płaszczyznę, że

1. dla każdego wierzchołka v , dla każdego $a \in K$ jeśli $p(v) = p(a)$, to $p = a$,
2. dla każdych a_1, a_2, a_3 jeśli $p(a_1) = p(a_2) = p(a_3)$, to $a_1 = a_2$ lub $a_1 = a_3$ lub $a_2 = a_3$.

Zakładając, że węzeł ma regularny rzut na płaszczyznę, możemy w ścisły sposób zdefiniować pojęcie diagramu. Diagramem węzła K nazywamy następującą modyfikację regularnego rzutu K na płaszczyznę. Jeśli przeciwobrazem punktu (x_0, y_0) jest zbiór dwuelementowy $\{a, b\}$, wówczas w tym punkcie przecinają się dwa różne odcinki, które są rzutami dwóch różnych odcinków węzła K , powiedzmy I_a, I_b . Ponieważ rzut K jest rzutem regularnym, więc jeden z tych odcinków leży pod drugim, co oznaczamy, jak na poniższym rysunku.



Definicja 1.13. Mówimy, że dwa węzły $(p_i), (q_j)$ są od siebie odległe o mniej, niż t , gdy mają tyle samo wierzchołków i gdy dla każdej pary wierzchołków zachodzi $d(p_k, q_k) < t$.

Udowodnimy teraz twierdzenie, które zagwarantuje nam, że dla każdego węzła można znaleźć węzeł dowolnie mu bliski, który jest równoważny z wyjściowym, i którego rzut na płaszczyznę jest regularny. Będziemy do tego potrzebować następujących lematów.

Lemat 1.14. Dla dowolnego węzła $K = (v_0, \dots, v_i, \dots, v_n)$ i dowolnego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ istnieje taki $\epsilon > 0$, że dla każdego $v' \in B(v_i, \epsilon)$ węzły K oraz $(v_0, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_n)$ są równoważne.

Dowód. Ustalmy dowolne i . Dodawanie i odejmowanie indeksów w dalszej części dowodu należy rozumieć jak działanie modulo $n + 1$. Możemy założyć, że punkty v_{i-1}, v_i, v_{i+1} nie są współliniowe. Zaczniemy dowód od skonstruowania dwóch stożków. Stożek o wierzchołku w , środku podstawy s i promieniu podstawy r będę oznaczał $S(s, r, w)$.

Niech $p \in \mathbb{R}^3$ będzie wektorem długości jeden prostopadłym do odcinków I_{i-1} oraz I_i . Oznaczmy przez α kąt pomiędzy odcinkami I_{i-2} i I_{i-1} . Dobierzmy tak małą $\mu \in \mathbb{R}^3$, żeby kąt pomiędzy I_{i-1} oraz $[v_{i-1}, v_i + \mu p]$ był mniejszy od α . Możemy μ wyliczyć np. używając trygonometrii w trójkącie prostokątnym o wierzchołkach $v_{i-1}, v_i, v_i + r \cdot p$, gdzie $r \in \mathbb{R}_+$. Połóżmy

$$\epsilon = \frac{1}{2} \min\{d(I_{i-1}, K \setminus (I_{i-2} \cup I_i)), \mu\}, \text{ oczywiście } \epsilon > 0.$$

Wtedy

1. $S(v_i, \epsilon, v_{i-1}) \cap K \subseteq I_{i-1} \cup I_i$,
2. dla każdej $\delta \in (0, \epsilon)$ zachodzi $[v_{i-1}, v_i + \delta p] \subseteq S(v_i, \epsilon, v_{i-1})$.

Zauważmy, że $d(v_i, \text{cl}(K \setminus (I_{i-1} \cup I_i))) > 0$, więc (jako że $\mathbb{R}^3$ jest T_4) można znaleźć takie $\gamma > 0$, że $B(v_i, \gamma) \cap \text{cl}(K \setminus (I_{i-1} \cup I_i)) = \emptyset$. Możemy wziąć takie γ , żeby $\gamma < \epsilon$.

Wtedy stożek $S_{i-1} = S(v_i + \gamma(v_i - v_{i-1}), \epsilon, v_{i-1})$ spełnia własność 1 oraz własność

$$\text{dla każdego } v' \in B(v_i, \gamma) \quad [v_{i-1}, v'] \subseteq S_{i-1}.$$

W analogiczny sposób konstruujemy stożek $S_i = S(v_i + \gamma'(v_i - v_{i+1}), \epsilon', v_{i+1})$. Zbiory S_{i-1} i S_i mają niepuste wnętrza, oraz $v_i \in \text{int}(S_i) \cap \text{int}(S_{i+1})$. Istnieje więc taka liczba $r > 0$, że $B(v_i, r) \subseteq S_i \cap S_{i+1}$.

Owe stożki pomogą nam pokazać, że dla każdego $v' \in B(v_i, r)$ węzeł $(v_1, \dots, v', \dots, v_n)$ jest równoważny K .

Ustalmy $v' \in B(v_i, r)$. Wtedy odcinki $[v_{i-1}, v'], [v', v_i], [v', v_{i+1}]$ należą do zbioru $S_i \cup S_{i-1}$, który jest rozłączny z $K \setminus (I_{i-1} \cup I_i)$. Rozważmy dwa przypadki.

Jeżeli $v' \in I_i$ (gdy $v' \in I_{i-1}$, to postępujemy analogicznie), to węzeł K można zdefiniować za pomocą łamanej $(v_1, \dots, v_i, v', v_{i+1}, \dots, v_n)$. Ponieważ wnętrze odcinka $[v_{i-1}, v']$ jest rozłączne z K , więc K jest równoważny węzłowi $(v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_n)$.

Jeśli $v' \notin I_i \cup I_{i-1}$, wówczas wnętrze odcinka $[v_i, v']$ jest rozłączne z $I_i \cup I_{i-1}$. Rozważmy odcinek $[v_{i-1}, v']$, jeśli przecina on odcinek I_i , to wtedy odcinek $[v', v_i]$ nie przecina odcinka I_{i-1} , zatem bez

zmniejszenia ogólności możemy założyć, że wewnątrz odcinka $[v_{i-1}, v']$ jest rozłączne z K . Tworzymy następujący ciąg

$$K_0 = K, K_1 = (v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_i, \dots, v_n), K_2 = (v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_n).$$

Czytelnik zechce się sam przekonać, że jest to ciąg elementarnych deformacji. Kładziemy $K' = K_2$ i kończymy dowód. $\square$

Uwaga Ponieważ funkcja $d(x, y) \mapsto d(p(x), p(y))$ jest nierosnąca, więc przy oznaczeniach, jak w dowodzie lematu zachodzi $p(v') \in B(p(v_i), \epsilon)$.

Lemat 1.15. Rozpatrzmy węzeł $K = (v_1, \dots, v_n)$. Niech p oznacza rzut na płaszczyznę. Dla każdego i , dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje węzeł $J = (q_1, \dots, q_i, \dots, q_n)$ równoważny węzłowi K odległy od K o mniej niż ϵ oraz spełniający: dla dowolnego $r \in J$ i dla dowolnego i zachodzi $p(q_i) \neq p(r)$, gdzie p oznacza rzut prostokątny na płaszczyznę OXY .

Dowód. Niech i będzie dowolne. Niech ϵ' będzie dobrany do wierzchołka v_i , jak w tezie lematu [1.14](#). W razie potrzeby możemy go zmniejszyć, tak by $\epsilon' < \epsilon$. Zauważmy, że $p[B(v_i, \epsilon')] = B(p(v_i), \epsilon')$, gdzie kula po lewej stronie równości jest z $\mathbb{R}^3$, a po prawej z $\mathbb{R}^2$. Ponieważ zbiór $p(K)$ jest nigdziegęstym podzbiorem płaszczyzny, więc możemy wybrać taki $q_i \in B(v_i, \epsilon')$, że $p(\{q_i\}) \cap p(K) = \emptyset$. Otrzymujemy w ten sposób nowy węzeł $(v_1, \dots, q_i, \dots, v_n)$. Powtarzamy opisaną procedurę $n - 1$ razy i w efekcie otrzymujemy węzeł J . Ponieważ ϵ' był z lematu [1.14](#) więc J i K są równoważne. $\square$

Twierdzenie 1.16. Niech K będzie węzłem o uporządkowanym zbiorze wierzchołków $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje węzeł K' , który jest odległy od węzła K o nie więcej, niż ϵ , oraz jego rzut na płaszczyznę OXY jest regularny.

Dowód. Najpierw zastosujemy lemat [1.15](#) do węzła K i powstały w ten sposób węzeł oznaczmy przez K' .

Ponieważ rzut węzła K' spełnia pierwszy warunek z definicji [1.12](#) więc dla dwóch różnych odcinków I, J węzła K' zachodzi $|p(I) \cap p(J)| \leq 1$.

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną wszystkich takich podzbiorów zbioru odcinków węzła K' , że dla każdego $A \in \mathcal{A}$ zachodzi

1. $|A| > 1$,
2. istnieje taki $r \in \mathbb{R}^2$, że $\bigcap_{I \in A} p(I) = \{r\}$,
3. dla każdego $J \notin A$ $(\bigcap_{I \in A} p(I)) \cap p(J) = \emptyset$.

Niech $a \in K'$ będzie punktem z wnętrza pewnego odcinka I_i , takim że istnieją różne od a punkty $b, c \in K'$ takie że $p(a) = p(b) = p(c)$ i $b \neq c$. Niech $\{t_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ będzie ciągiem w $\mathbb{R}^2$, takim że $t_A = \bigcap_{I \in A} p(I)$. Niech $u \in \mathbb{R}^2$ będzie niezerowym wektorem prostopadłym do osi OZ , który nie jest równoległy do $p(I_{i-1})$ oraz nie jest równoległy do $p(I_{i+1})$. Wtedy, używając tego samego argumentu, co w dowodzie lematu [1.15](#) możemy znaleźć dostatecznie małą $\delta > 0$, że dla każdej $0 < \delta' < \delta$ istnieje wektor w , taki że węzeł $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \delta'w, v_{i+1} + \delta'w, v_{i+2}, \dots, v_n)$ jest równoważny węzłowi K' , oraz rzut tego węzła spełnia punkt pierwszy definicji [1.12](#). Ponieważ ciąg t_A jest skończony, to liczbę δ' można wziąć na tyle małą, żeby była mniejsza od dowolnej dodatniej odległości $d(p(I_j), t_A)$ dla $j \in \{i-1, i+1\}$. Wtedy węzeł powstały z K' przez zastąpienie v_i, v_{i+1} wierzchołkami $v'_i = v_i + \delta'w, v'_{i+1} = v_{i+1} + \delta'w$ odpowiednio jest równoważny węzłowi K' , co więcej, dla każdego $r \in [v_{i-1}, v'_i] \cup [v'_i, v'_{i+1}] \cup [v'_{i+1}, v_{i+2}]$ istnieje co najwyżej jeden taki $r' \neq r$, że $p(r') = p(r)$. Zauważmy, że po tej zastosowaniu tej procedury przynajmniej jeden element rodziny $\mathcal{A}$ ma jeden element mniej. zatem w skończonej liczbie kroków dojdziemy do momentu, kiedy w rodzinie $\mathcal{A}$ zostaną jedynie zbiory dwuelementowe. Wtedy rzut otrzymanego węzła będzie regularny. $\square$

Warto podkreślić, że dwa różne węzły (w sensie relacji równości) mogą mieć ten sam diagram, np. mając dany węzeł można przesunąć jego wierzchołek o największej trzeciej współrzędnej o wektor równoległy do osi OZ. Okazuje się jednak, że jeśli dwa węzły mają ten sam diagram, to są równoważne.

Twierdzenie 1.17. *Jeśli dwa węzły $K = (v_1, \dots, v_n)$ oraz $W = (w_1, \dots, w_n)$ mają regularne rzutowanie oraz ich diagramy są równe, to K i J są równoważne.*

Dowód. Ustalmy wierzchołek v_i . Zauważmy, że bez straty ogólności możemy założyć, że rzut każdego z odcinków I_i, I_{i-1} węzła K zawiera co najwyżej jedno skrzyżowanie. Istotnie, jeśli rzut odcinka I_i zawiera więcej skrzyżowań (oczywiście jest ich skończenie wiele), to niech s_0 oznacza skrzyżowanie najbliższe $p(v_i)$, a s_1 skrzyżowanie najbliższe punktowi s_0 . Wybierzmy dowolny punkt z wnętrza odcinka $[s_0, s_1]$, oznaczmy go przez s . Niech $v' = p^{-1}(s)$. Wtedy łamana $(v_1, \dots, v_i, v', v_{i+1})$ definiuje węzeł K . Wówczas odcinek $p[[v_i, v']]$ zawiera dokładnie jedno skrzyżowanie. To samo możemy założyć o węźle J dodając nowy wierzchołek q' w punkcie $p^{-1}(s)$.

Niech I, J oznaczają te odcinki węzła K , że $p[I] \cap p[I_i] \neq \emptyset$ oraz $p[J] \cap p[I_{i-1}] \neq \emptyset$. Wtedy I leży „pod” odcinkiem I_i i pod odcinkiem węzła W , który jest rzutowany na $p[I_i]$, albo „nad” oboma tymi odcinkami. To samo się tyczy odcinka J . Stąd wynika, że wnętrza odcinków $[v_{i-1}, w_i], [w_i, v_{i+1}]$ są rozłączne z węzłem K . To, że $K \cap [v_i, w_i] = \{v_i\}$ jest oczywiste. Dlatego ciąg

$$K_0 = (v_1, \dots, v_n), K_1 = (v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n), K_3 = (v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

jest ciągiem elementarnych deformacji. Stosując powyżej opisaną procedurę do każdego wierzchołka węzła K otrzymamy na końcu węzeł J , co znaczy, że te węzły są równoważne. $\square$

1.4 Każdy kij ma dwa końce, czyli orientacja węzła

Jak już wcześniej zostało powiedziane, węzeł to łamana w $\mathbb{R}^3$. Łamana z kolei jest wyznaczona jednoznacznie przez zbiór swoich wierzchołków. Mając dany węzeł o wierzchołkach $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, możemy go zorientować, to znaczy dla każdego odcinka węzła wybrać początek i koniec tego odcinka. Chcielibyśmy to zrobić w taki sposób, żeby każdy wierzchołek był końcem dokładnie jednego odcinka. W tym sensie węzeł $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ jest węzłem różnym od węzła $(v_n, \dots, v_2, v_1)$, mimo, że jako podzbiory $\mathbb{R}^3$ są sobie równe. Teraz spróbujemy sformalizować to, co dotychczas powiedzieliśmy.

Definicja 1.18. *Odcinkiem zorientowanym w $\mathbb{R}^3$ o początku w p i końcu w q (zakładamy, że $p \neq q$) nazywamy liniowe włożenie $l: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, takie że $l(0) = p, l(1) = q$ i oznaczamy przez $[p, q]_o$.*

Innymi słowy odcinek zorientowany to odcinek z wyróżnionym początkiem i końcem. Co więcej, przy oznaczeniach z definicji zachodzi

$$q - p = |q - p| \cdot \frac{l'(x)}{|l'(x)|}, \text{ dla dowolnego } 0 < x < 1.$$

Definicja 1.19. *Orientacją węzła $K = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ nazywamy takie zorientowanie jego odcinków, że każdy wierzchołek jest końcem (równoważnie - początkiem) dokładnie jednego odcinka.*

Nie trudno się przekonać, że każdy węzeł można zorientować na dokładnie dwa sposoby. Istotnie, wybranie orientacji jednego odcinka węzła jednoznacznie wyznacza orientację całego węzła.

Przyjmijmy następującą konwencję, jeśli powiemy, że węzeł $K = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ jest węzłem zorientowanym, będziemy przez to rozumieć, że $I_1 = [v_1, v_2]_o$.

Uwaga Niech będzie dany węzeł $K = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, niech ponadto uporządkowane n -tki $K_i = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n})$ oraz $K_j = (v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_n})$ definiują ten sam węzeł K . Niech O_i, O_j oznaczają

orientację zorientowanych węzłów K_i, K_j odpowiednio. Powiemy, że orientacja O_i jest równoważna orientacji O_j , gdy istnieje taka $\sigma \in S_n$, że dla każdego k zachodzi $\sigma(i_k) = j_k$. Sprawdzenie, że ta relacja jest w istocie relacją równoważności pozostawiamy jako proste ćwiczenie.

Definicja 1.20. Węzłem zorientowanym nazywamy węzeł z wybraną orientacją.

Elementarne deformacje węzła zorientowanego definiuje się w sposób oczywisty. Do zestawu punktów (1), (2) z definicji 1.7 należy dodać następujący warunek.

Odcinki zorientowane koincydentne z wierzchołkiem p_0 są równe $[p_n, p_0]_o, [p_0, p_1]_o$.

Definicja 1.21. Węzły zorientowane nazywamy równoważnie zorientowanymi, gdy w skończeniu wielu krokach za pomocą elementarnych deformacji jednego węzła zorientowanego możemy otrzymać drugi.

Należy wyraźnie powiedzieć, że równoważność dwóch węzłów jest istotnie inną relacją, niż równoważność węzłów w sensie orientacji. Istnieją bowiem przykłady węzłów równoważnych ale nie równoważnych w sensie orientacji. Opisanie ich dokładnie wykracza jednak poza możliwości intelektualne autora, dlatego fakt ten, z wyższej konieczności, jest podany czysto informacyjnie. Na koniec tego rozdziału podamy jeszcze jedną definicję.

Definicja 1.22. Odwrotnością węzła zorientowanego $K = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ nazywamy węzeł $K^* = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_1)$. Powiemy, że K jest węzłem odwracalnym, jeżeli K i K^* są równoważne w sensie orientacji. Dla węzła J niezorientowanego, powiemy że jest on odwracalny, jeśli istnieje taka orientacja węzła J , że jest on odwracalny (jako węzeł zorientowany z tą wybraną orientacją).

1.5 Ruchy Reidemeistera

W tym podrozdziale przedstawimy pierwsze poważne narzędzie, które w wielu przypadkach pozwoli nam rozstrzygnąć, czy dwa węzły są równoważne, czy też nie. Na początku sformułujemy nową definicję elementarnej deformacji, równoważną tej, którą wprowadziliśmy wcześniej.

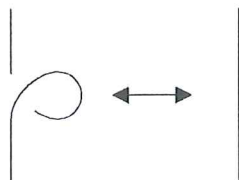
Definicja 1.23. Węzeł K' jest elementarną deformacją węzła $K = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, gdy

1. $K' = (v_1, v_2, \dots, v_i, v', v_{i+1}, \dots, v_n)$, gdzie $v' \in \text{Int}I_i$, lub
2. $K' = (v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_n)$, o ile czworokąt C o wierzchołkach $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v'$ spełnia $C \cap K = I_{i-1} \cup I_i$.

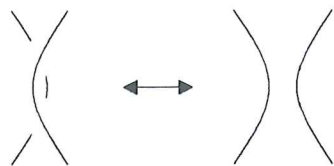
Równoważność tej definicji z definicją podaną wcześniej jest oczywista.

Definicja 1.24. Następujące trzy operacje (wraz z operacjami odwrotnymi - w sumie jest ich sześć) nazywamy ruchami Reidemeistera.

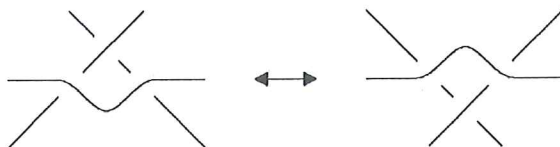
1. Pierwszy ruch Reidemeistera:



2. Drugi ruch Reidemeistera:



3. Trzeci ruch Reidemeistera:



Definicja 1.25. Dwa diagramy uważa się za równoważne, gdy za pomocą skończonej liczby ruchów Reidemeistera z jednego diagramu można otrzymać drugi.

Twierdzenie 1.26. (Reidemeister'a) Dwa węzły są równoważne, wtedy i tylko wtedy, gdy ich diagramy są równoważne.

Dowód. Załóżmy najpierw, że mamy dane węzły J i K , oba te węzły mają regularny rzut na płaszczyznę, oraz węzeł K można otrzymać z węzła J przez pewien ciąg elementarnych deformacji. Ponieważ ten ciąg jest skończony, bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że węzeł K powstaje z węzła J w wyniku jednej elementarnej deformacji. Wystarczy więc pokazać, że ta deformacja odpowiada ciągowi ruchów R na diagramie węzła J .

Rozważmy pojedynczą elementarną deformację węzła J w sensie definicji [1.23]. Powiedzmy że $J = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$, oraz że $K = (v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_n)$. Ogólny przypadek na pierwszy rzut wydaje się być mocno skomplikowany. Opiszemy go za pomocą wielu podprzypadków, z którymi w prosty sposób potrafimy sobie poradzić.

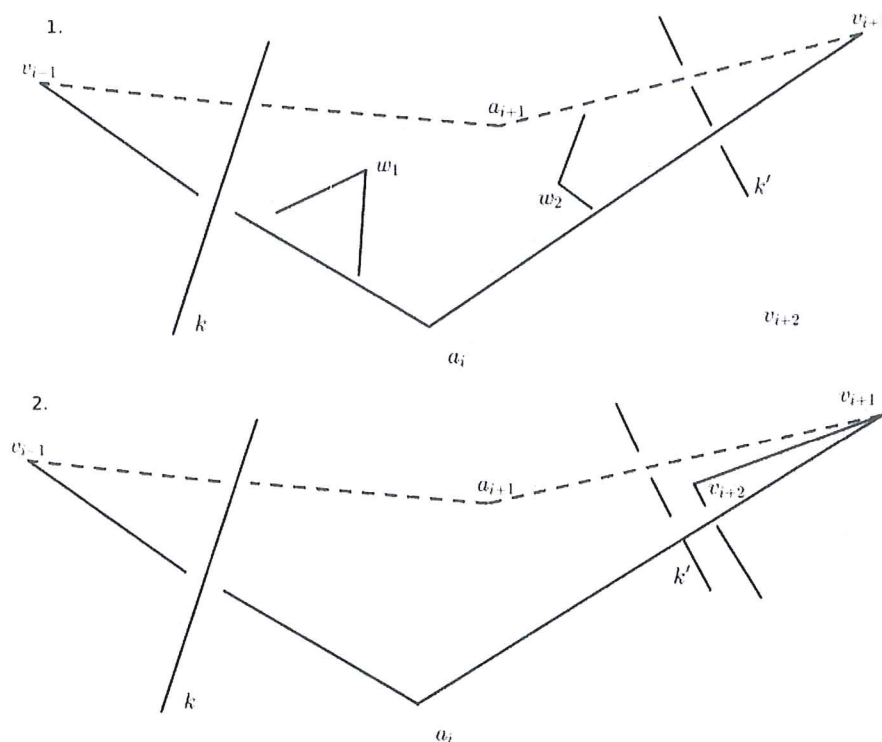
Niech C oznacza czworokąt $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v'$, przez o oznaczmy odcinek vv' . Przez S oznaczmy zbiór skrzyżowań z wnętrza C (jako podzbiór $\mathbb{R}^2$), przez W oznaczmy zbiór wierzchołków z wnętrza C , przez P oznaczmy zbiór punktów przecięcia osi o z łukami z wnętrza C . Oczywiście zbiór $S \cup W \cup P$ jest skończony. Niech A oznacza obraz tego zbioru przez rzut promienisty na o , to znaczy, jeśli dany punkt p jest po tej samej stronie osi o , co punkt v_{i-1} (v_{i+1}), to rzutem promienistym punktu p na o nazwiemy rzutowanie na o w kierunku prostej zawierającej odcinek $[p, v_{i-1}]$ ($[p, v_{i+1}]$). Możemy założyć, że rzuty punktów z $S \cup W \cup P$ są parami różne, oraz że żadne skrzyżowanie ani wierzchołek nie leżą na osi o . Jeśli by tak nie było, możemy używając drugiego ruchu R odrobinę poprzesuwać skrzyżowania i miejsca przecięcia łuków z osią. Niestety w przypadku, kiedy skrzyżowanie i wierzchołek znajdują się na prostej, wzdłuż której odbywa się rzutowanie, sytuacja jest nieco bardziej skomplikowana, co widać na poniższym rysunku.

Diagram illustrating the 'Złotliwy przypadek' (Golden case) in the proof of the Poincaré conjecture. The diagram shows a geometric configuration with points v_{i-1} , v_i , v_{i-2} , a_i , a_{i+1} , p , o , and lines k , k' , c , A . A dashed line connects v_{i-1} and v_i , and a dotted line connects v_{i-2} and p . A solid line connects a_i and a_{i+1} .

Niech B oznacza zbiór zrzuowanych punktów na oś o . Wprowadźmy na o następującą relację porządku: $x < y \iff d(v_i, x) < d(v_i, y)$. Ustawmy zbiór B rosnąco $x_1, x_2, \dots, x_{l-1}$. Niech $v_i = a_0, a_1, a_2, \dots, a_l = v'$ będzie ciągiem punktów, takim że $a_i \in o$, oraz $x_i < a_i < x_{i+1}$ w sensie wprowadzonego porządku. Wystarczy zatem pokazać, że każdą z elementarnych deformacji przeprowadzających wierzchołek v_i na a_1 , wierzchołek a_1 na punkt $a_2, \dots$, wierzchołek a_{l-1} na punkt a_l można uzyskać za pomocą sekwencji ruchów R , co prowadzi do rozbiecia problemu na wiele mniejszych podprzypadków, których lista znajduje się poniżej.

Łuki skrzyżowania mogą przechodzić, albo oba nad bokami czworokąta C , albo oba pod bokami C , albo jeden może leżeć nad czworokątem, a drugi pod. Dwa pierwsze przypadki są oczywiste, radzimy sobie z nimi stosując trzeci ruch R , oraz w celach kosmetycznych drugi ruch R . Trzeci przypadek jest nieco trudniejszy, ale również główną rolę gra w nim trzeci ruch R . Po prostu można przenieść łuk, który przechodzi nad czworokątem C na drugą stronę skrzyżowania łuku przechodzącego pod czworokątem C i łuku $a_i v_{i-1}$, potem parokrotnie zastosować drugi ruch R a na koniec znów zastosować trzeci ruch R , żeby przenieść łuk, który ruszyliśmy na początku, na jego pierwotne miejsce.

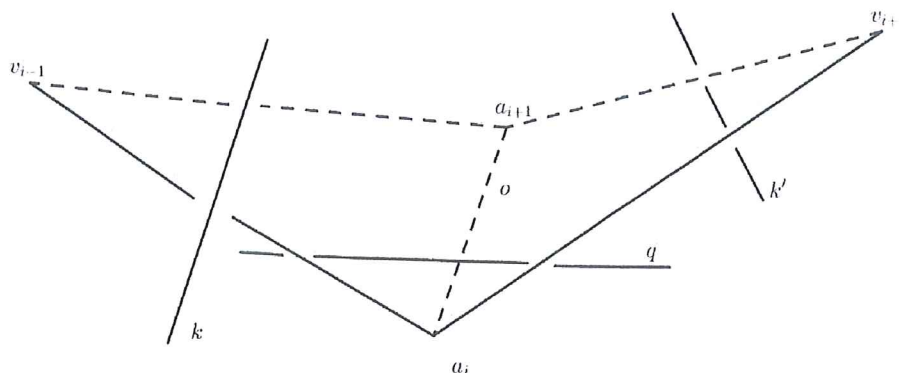
Przypadek drugi - wierzchołek.



Podprzypadek pierwszy jest prosty, wystarczy zastosować drugi ruch R . Przypadek drugi wymaga nieco komentarza.

Żeby poradzić sobie z przypadkiem 2. należy zastosować pierwszy ruch R (wcześniej go nie stosowaliśmy) do pętli $a_i v_{i+1} v_{i+2}$. To nam pozwoli wyrzucić wierzchołek v_{i+2} z czworokąta C . Mamy też pewność, że efektem ubocznym tego ruchu nie będą żadne nowe skrzyżowania, ani wierzchołki, ani łuki przecinające oś o , zatem będziemy w stanie przenieść wierzchołek a_i na wierzchołek a_{i+1} . Na koniec, musimy wykonać operację odwrotną do tej, która wyrzuciła wierzchołek v_{i+2} z czworokąta C , która sprawi, że v_{i+2} wróci na swoje pierwotne miejsce.

Przypadek trzeci - łuk przecinający oś.



Ten przypadek jest prosty, żeby przenieść wierzchołek a_i na drugą stronę łuku q wystarczy zastosować drugi ruch R. Przypadek, kiedy łuk q przechodzi nad czworokątem C jest analogiczny.

Na koniec trzeba jeszcze pamiętać o naszym początkowym założeniu o tym, że rzuty są parami różne, i że żadne skrzyżowania, ani wierzchołki nie leżą na osi o . Jeśli potrzebowaliśmy lekko zmodyfikować diagram wyjściowego węzła, żeby to założenie było prawdziwe, musimy na koniec wykonać modyfikacje odwrotne, które oczywiście można uzyskać za pomocą ruchów R.

W ten sposób zakończyliśmy szkic dowodu implikacji w jedną stronę. Implikacja w drugą stronę jest oczywista.

□

2 Kolorowania węzłów

Głównym zadaniem teorii węzłów jest stworzenie narzędzi służących do opisywania, klasyfikowania oraz rozróżniania węzłów. Na podstawie twierdzenia przedstawionego w poprzedniej części wiemy że, diagramy są równoważne jeżeli pierwszy można przekształcić do drugiego stosując ruchy Reidemeistera. Sprawdzanie równoważności diagramów w ten sposób jest jednak uciążliwe, oraz czasochłonne. W niniejszej części zostanie przedstawione zagadnienie kolorowania diagramów węzłów. Kolorowanie węzłów jest niezmiennikiem diagramu. Oznacza to że gdy pierwszy diagram posiada pewną własność kolorowania, a drugi nie, to diagramy te nie są równoważne, a więc przedstawiają różne węzły. Kolorowanie nie jest idealnym narzędziem klasyfikującym i istnieją diagramy nierównoważne o takich samych własnościach kolorowania.

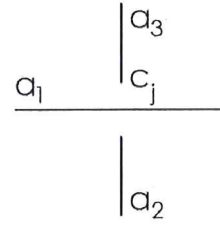
Kolejność omawianych zagadnień w tym rozdziale będzie następująca: Najpierw podana zostanie definicja kolorowania, oraz warunki które muszą zostać spełnione aby węzeł mógł zostać w określony sposób pokolorowany. Następnie zdefiniowane zostaną równania kolorowań oraz macierze kolorowań. Kolejnym etapem będzie wprowadzenie macierzy kolorowań jako niezmiennika węzłów. Ostatnią część stanowić będzie wskazanie relacji pomiędzy klasami diagramów węzłów a grupami kolorowań.

2.1 Kolorowanie diagramów

Niech K będzie węzłem zorientowanym, L jego diagramem, $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ zbiorem łuków, $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ zbiorem skrzyżowań.

Definicja 2.1. Diagram L jest kolorowalny modulo $n \in \mathbb{N}$, gdy każdemu łukowi diagramu L można przyporządkować liczbę $a \in \{0, \dots, n-1\}$ w taki sposób, że:

1. Dla każdego skrzyżowania c_j spełnione jest równanie kolorowania
 $a_2 + a_3 - 2a_1 \equiv 0 \pmod n$
2. Kolorowanie nie jest stałe, tzn istnieją łuki b_i, b_j którym przyporządkowano różne liczby.



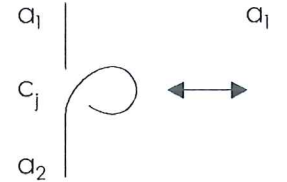
Przyporządkowanie spełniające powyższe własności nazywa się *kolorowaniem diagramu modulo n*.

Twierdzenie 2.2. Kolorowalność modulo n jest niezmiennikiem węzła.

Dowód. Dwa diagramy L_1, L_2 są równoważne jeżeli istnieje ciąg ruchów Reidemeistera przekształcający L_1 w L_2 . Wystarczy zatem sprawdzić że kolorowalność modulo n nie zmienia się po wpływie ruchów Reidemeistera.

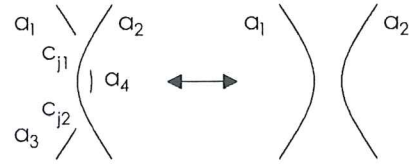
1. Pierwszy ruch Reidemeistera:

Dla skrzyżowania c_j spełnione jest równanie
 $a_1 + a_2 - 2a_2 \equiv 0 \pmod n$. Zatem $a_1 \equiv a_2$.



2. Drugi ruch Reidemeistera:

Dla skrzyżowania c_{j1} mamy
 $a_1 + a_4 - 2a_2 \equiv 0 \pmod n$.
Dla skrzyżowania c_{j2} ,
 $a_3 + a_4 - 2a_2 \equiv 0 \pmod n$.
Stąd $a_1 \equiv a_3 \pmod n$.

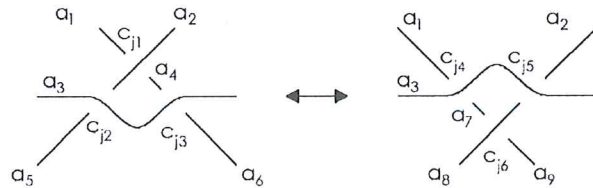


3. Trzeci ruch Reidemeistera:

Dla skrzyżowania c_{j2} mamy $a_5 + a_2 - 2a_3 \equiv 0 \pmod n$. Analogicznie dla skrzyżowania c_{j5} ,
 $a_8 + a_2 - 2a_3 \equiv 0 \pmod n$. Stąd $a_5 \equiv a_8 \pmod n$.

W drugim przypadku mamy:

$$\begin{aligned}
a_4 &\equiv 2a_2 - a_1. \\
a_6 &\equiv 2a_3 - a_4 \equiv \\
&\equiv 2a_3 - 2a_2 + a_1. \\
a_8 &\equiv 2a_3 - a_2. \\
a_7 &\equiv 2a_3 - a_1. \\
a_9 &\equiv 2a_8 - a_7 \equiv \\
&\equiv 2a_3 - 2a_2 + a_1 \equiv a_6.
\end{aligned}$$



Zatem, kolory łuków o indeksach różnych od 7 nie ulegają zmianie. Kolor łuku a_7 zmienia się i wynosi $a_7 \equiv a_6 - a_2 + a_4$. Wtedy otrzymane kolorowanie spełnia równania kolorowań w diagramie L_2 .

□

Definicja 2.3. Niech $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ będzie zbiorem łuków. Kolorowaniem $(a_{b_1}, \dots, a_{b_k})$ nazywamy przyporządkowanie każdemu łukowi b_i koloru a_{b_i} , tak aby spełnione były równania kolorowań. W dalszej części opracowania zapis ten zostanie uproszczony do postaci $(a_1, \dots, a_k)$, gdzie indeks przy a , odpowiada numerowi łuku, którego ten kolor dotyczy.

Lemat 2.4. Jeżeli dla diagramu L istnieje kolorowanie $(a_1, \dots, a_k)$, to dla każdego $l \in \mathbb{N}$ $(a_1 + l, \dots, a_k + l)$ też jest kolorowaniem.

Dowód. Dla każdego c_j spełnione jest:

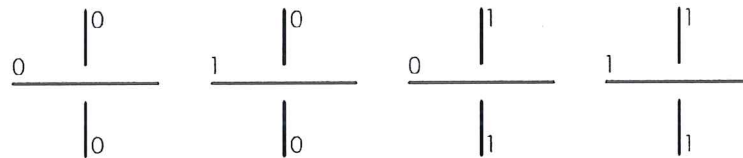
$$a_{m_1} + a_{m_2} - 2a_{m_3} \equiv 0 \pmod{n}. \text{ Wobec czego}$$

$$a_{m_1} + l + a_{m_2} + l - 2a_{m_3} - 2l \equiv 0.$$

□

Wniosek: Jeśli diagram jest kolorowalny to istnieje kolorowanie takie że $a_1 = 0$.

Kolorowanie modulo 2 Jeżeli węzeł jest kolorowalny modulo 2 to dla każdego skrzyżowania zachodzi jedna z czterech możliwości:



W każdym przypadku kolory łuków leżących po przeciwnych stronach skrzyżowania są jednakowe. Startując w dowolnym punkcie węzła i przechodząc go w wybranym kierunku otrzymamy że każdy łuk należący do tej samej komponenty spójności co punkt startowy ma przyporządkowany jednakowy kolor. Zatem splot może być kolorowany mod 2 $\Leftrightarrow$ splot składa się z co najmniej 2 węzłów.

Definicja 2.5. Niech K będzie splotem, L jego diagramem. Diagram L jest podzielny jeśli splot składa się z co najmniej 2 węzłów, oraz $\exists U, V$ otwarte, $U \cap V = \emptyset$, takie że $L \subseteq U \cup V$, $L \cap U \neq \emptyset$, $L \cap V \neq \emptyset$.

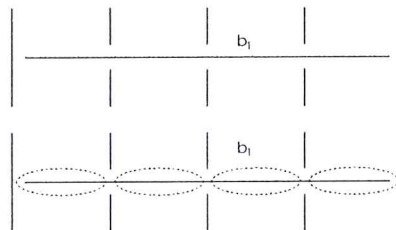
Lemat 2.6. Jeżeli splot K jest podzielny to, $\forall n > 1$ diagram L jest kolorowalny mod n .

Dowód. Niech każdy łuk zawarty w U będzie pokolorowany na kolor 0, łuk zawarty w V na kolor 1. Takie przyporządkowanie jest kolorowaniem. Równania skrzyżowań zachodzą dla każdego n . □

2.2 Równania kolorowań

Definicja 2.7. Krótki łuk, to część łuku który przechodzi dokładnie przez 2 skrzyżowania.

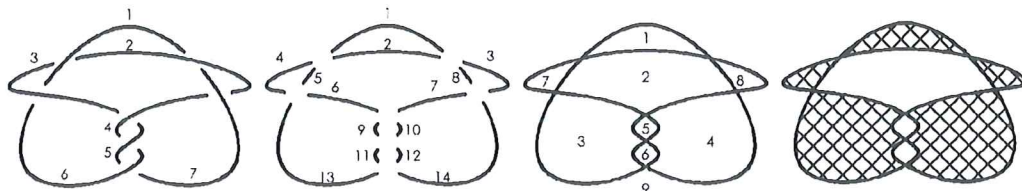
Przykład: Łuk b_1 przechodzi przez 5 skrzyżowań i składa się z 4 krótkich łuków.



Definicja 2.8. Region to komponenta spójności $\mathbb{R}^2 \setminus L$.

Definicja 2.9. Szachownica diagramu to przyporządkowanie każdemu regionowi jednego z 2 kolorów tak aby każdy krótki łuk oddzielał regiony o różnych kolorach.

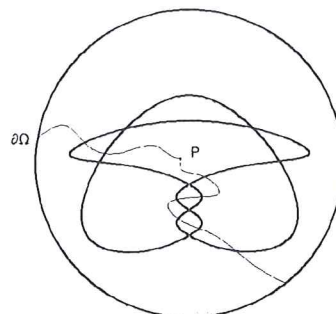
Przykład: Rozważmy węzeł który w literaturze jest oznaczony symbolem 7_3 . Diagram węzła jest przedstawiony na rysunku poniżej (pierwszy z lewej). Węzeł posiada 7 łuków, 14 krótkich łuków, oraz 9 regionów.



Lemat 2.10. Dla każdego węzła K istnieje szachownica jego diagramu.

Dowód. Ustalmy węzeł K , oraz jego diagram L . Niech L będzie zawarty w pewnej kuli otwartej Ω . Weźmy dowolny region diagramu L . Ustalmy punkt P należący do tego regionu. Weźmy dowolne dwie krzywe o następujących własnościach:

- Krzywe są bez samo przecięć i nie przecinają się wzajemnie,
- Początki krzywych znajdują się w punkcie P ,
- Końce krzywych znajdują się na brzegu Ω ,
- Krzywa nie przechodzi przez skrzyżowania.



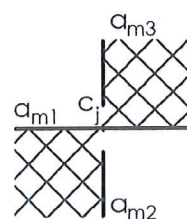
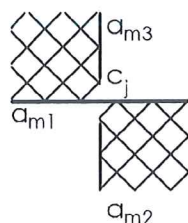
Zatem suma krzywych dzieli węzeł na 2 części. Ponadto obie krzywe przecinają parzystą liczbę łuków. Zatem każda z krzywych przecina taką samą liczbę łuków modulo 2. Stąd kolor regionu nie zależy od wyboru krzywej, więc szachownica diagramu istnieje zawsze. $\square$

Dla każdego skrzyżowania c_j równanie można przedstawić na 2 sposoby.

Definicja 2.11. Wybór znaku równania kolorowania nazywa się dobrym, gdy przyjmuje następującą postać:

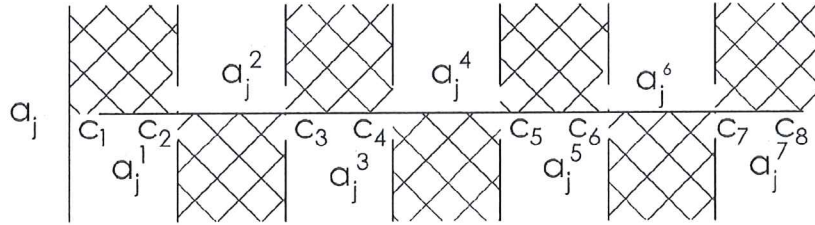
$$a_{m2} + a_{m3} - 2a_{m1} \equiv 0 \pmod{n}, \text{ dla}$$

$$2a_{m1} - a_{m2} - a_{m3} \equiv 0 \pmod{n}, \text{ dla}$$



Lemat 2.12. Suma równań po wszystkich skrzyżowaniach równa się 0, o ile znaki równań zostały wybrane dobrze.

Dowód. Ustalmy dowolny łuk b_j , z kolorem a_j . Łuk b_j składa się z pewnej liczby krótkich łuków b_j^i . Każdy krótki łuk łączy dokładnie 2 skrzyżowania. Istnieje region X_i , taki że oba skrzyżowania graniczą z X_i . Niech a_j^i oznacza kolor b_j^i krótkiego łuku. Kolor każdego krótkiego łuku występuje w równaniach dokładnie 2 skrzyżowań.



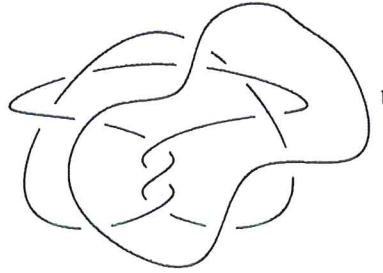
Ponieważ znaki równań zostały *wybrane dobrze*, znak a_j^i w równaniu skrzyżowania c_{j1} , jest przeciwny do znaku a_j^i w równaniu skrzyżowania c_{j2} . Wobec czego równania dla krótkich łuków sumują się do 0, dla każdego i . Zatem sumują się również do 0 dla równań kolorowań zwykłych łuków. $\square$

Wniosek: Niech łuk j , ma początek w skrzyżowaniu c_m . Zaczynając w c_m a następnie idąc wzdłuż łuku i sumując współczynniki przy j -tym łuku w mijanych równaniach skrzyżowań, suma zawsze wynosi ± 1 .

Dowód. Zamiast sumować współczynniki przy j -tym łuku w kolejnych równaniach skrzyżowań można sumować współczynniki przy odpowiadających mu krótkich łukach. Z lematu współczynniki sumują się do 0. Zatem suma wszystkich współczynników jest równa współczynnikowi krótkiego łuku przy ostatnim mijanym skrzyżowaniu, a ten współczynnik wynosi ± 1 . $\square$

2.3 Macierze kolorowań

Definicja 2.13. Łuk zamknięty w diagramie to węzeł składający się dokładnie z jednego łuku.



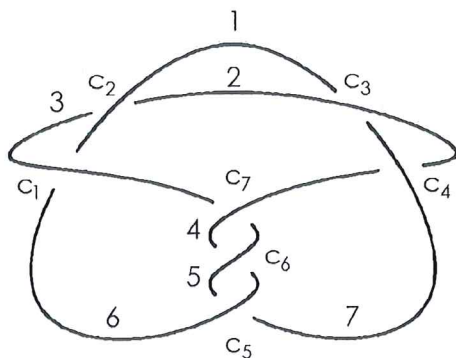
Lemat 2.14. Jeżeli węzeł K nie zawiera łuków zamkniętych, to liczba skrzyżowań i łuków w diagramie L jest równa.

Dowód. Niech L będzie diagramem zorientowanym. Ponieważ węzeł nie zawiera łuków zamkniętych to dla każdego łuku istnieją dokładnie 2 skrzyżowania które odpowiadają początkowi i końcowi łuku. Dodatkowo każde skrzyżowanie jest początkiem i końcem dokładnie 2 łuków. Zatem funkcja przyporządkowująca łukowi skrzyżowanie będące jego początkiem jest bijekcją. $\square$

Niech L będzie diagramem bez łuków zamkniętych, B zbiorem łuków, $(a_1, \dots, a_k)$ jego kolorowaniem modulo n , C zbiorem skrzyżowań.

Definicja 2.15. Macierz kolorowania A_+ to macierz powstała ze współczynników występujących w równaniach kolorowań diagramu L , przy czym znaki równań kolorowań zostały wybrane dobrze. $A_+ = (a_{ij})$, gdzie a_{ij} odpowiada współczynnikowi przy kolorze i -tego łuku w równaniu c_j -tego skrzyżowania.

Proces tworzenia macierzy A_+ dla węzła 7_3 został przedstawiony poniżej.



$$\begin{aligned} c_1 : a_1 + a_6 - 2a_3 &\equiv 0 \pmod n \\ c_2 : a_2 + a_3 - 2a_1 &\equiv 0 \pmod n \\ c_3 : a_1 + a_7 - 2a_2 &\equiv 0 \pmod n \\ c_4 : a_2 + a_4 - 2a_7 &\equiv 0 \pmod n \\ c_5 : a_5 + a_7 - 2a_6 &\equiv 0 \pmod n \\ c_6 : a_4 + a_6 - 2a_5 &\equiv 0 \pmod n \\ c_7 : a_3 + a_5 - 2a_4 &\equiv 0 \pmod n \end{aligned}$$

$$A_+ = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Obserwacja: Równania kolorowań diagramu L są liniowo zależne, bo sumują się do 0. Zatem wyznacznik macierzy kolorowania $|\det(A_+)| = 0$.

Definicja 2.16. Macierz kolorowań A wymiaru $(k-1) \times (k-1)$, to dowolny minor macierzy A_+ powstały poprzez usunięcie jednego wiersza i jednej kolumny.

Definicja 2.17. Wyznacznik diagramu $\det(L)$ to moduł z wyznacznika $|\det(A)|$.

Twierdzenie 2.18. Wyznacznik diagramu jest dobrze określony, nie zależy od wyboru minora macierzy A_+

Dowód. Niech $A_{i,j}$ oznacza minor powstały poprzez usunięcie i -tego wiersza, oraz j -tej kolumny. W macierzy A_+ suma elementów w wierszu, oraz suma elementów w kolumnie równa się 0, ponieważ

znaki równań są wybrane dobrze. Niech X będzie macierzą $k \times k$, oraz $X = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Rozważmy

$$\det(A_+ + X) = \det \begin{pmatrix} 1 + a_{1,1} & \cdots & 1 + a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + a_{k,1} & \cdots & 1 + a_{k,k} \end{pmatrix}$$

Suma elementów w każdej kolumnie, oraz w każdym wierszu równa się k . Wyznacznik zostanie obliczony w następujących krokach:

1. Po dodaniu do i-tego wiersza, sumy pozostałych wierszy każdy element i-tego wiersza będzie mieć wartość k. Wartości w pozostałych komórkach pozostaną niezmiennione.

$$\det \begin{pmatrix} 1 + a_{1,1} & \cdots & 1 + a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k & \cdots & k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + a_{k,1} & \cdots & 1 + a_{k,k} \end{pmatrix}$$

2. Po dodaniu do j-tej kolumny, sumy pozostałych kolumn, element $a_{i,j}$ będzie mieć wartość k^2 . Pozostałe elementy w i-tym wierszu, oraz j-tej kolumnie będą mieć wartość k. Pozostałe elementy pozostaną niezmiennione.

$$\det \begin{pmatrix} 1 + a_{1,1} & \cdots & k & \cdots & 1 + a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & \cdots & k^2 & \cdots & k \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + a_{k,1} & \cdots & k & \cdots & 1 + a_{k,k} \end{pmatrix}$$

3. Po wyciągnięciu k przed wyznacznik, wyrażenie będzie miało postać.

$$k \times \det \begin{pmatrix} 1 + a_{1,1} & \cdots & k & \cdots & 1 + a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 + a_{k,1} & \cdots & k & \cdots & 1 + a_{k,k} \end{pmatrix}$$

4. Odejmując i-ty wiersz od pozostałych wierszy otrzymamy.

$$k \times \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & k & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

Korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem j-tej kolumny:

$|\det(A + X)| = k^2 \times |(-1)^{i+j} \times \det(A_{i,j})|$, dla każdego i, j . Zatem $|\det(A_{i,j})|$ nie zależy do wyboru i, j .

□

2.4 Własności wyznacznika diagramu

Wyznacznik diagramu jest powiązany z możliwymi kolorowaniami diagramu.

Lemat 2.19. Niech A będzie macierzą o wyrazach całkowitych. Istnieją macierze X, Y o wyrazach całkowitych, takie że $|\det(X)| = |\det(Y)| = 1$, oraz macierz diagonalna $|D| = (|d_{i,i}|)$, taka że $D = XAY$.

Dowód. Niech A będzie macierzą wymiaru $k \times k$, oraz a liczbą całkowitą. Ustalmy macierze:

- $Z_{i,j}^1$ - Macierz odpowiadająca transpozycji i -tej, oraz j -tego wektora macierzy A ,
- Z_{i,a_j}^2 - Macierz odpowiadająca dodaniu do i -tego wektora, a -tą krotność j -tego wektora.

Każda z powyższych macierzy ma wyznacznik 1.

Krok 1: Mnożąc macierz A z lewej lub prawej przez Z^1 da się ją przekształcić do postaci $A^{(1)}$, takiej że najmniejszy co do modułu, niezerowy wyraz znajduje się w lewym górnym rogu macierzy. Następnie mnożąc z lewej lub prawej przez Z_{i,a_1}^2 , można przekształcić macierz do postaci $A^{(2)}$ takiej że, wartość bezwzględna każdego elementu leżącego w pierwszym wierszu lub pierwszej kolumnie jest mniejsza od wartości bezwzględnej elementu $a_{1,1}$.

Krok 2: Powtarzając Krok 1, można sprowadzić macierz do postaci

$$A^{(n_1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{k,2} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

Krok 3: Powtarzając krok 1 i 2 dla macierzy wymiaru $(k-1) \times (k-1)$ otrzyma się macierz

$$A^{(n_2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{k,3} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

Krok 4: Indukcyjnie, macierz A może zostać sprowadzona do postaci diagonalnej D . Operacje wykonywane na kolumnach odpowiadają mnożeniu macierzy A przez Z^i z prawej strony, na wierszach przez mnożenie z lewej strony. Zatem macierze X, Y są postaci:

$$X = \prod_m Z^m.$$

$$Y = \prod_n Z^n.$$

$Z^m, Z^n \in \{Z_{i(m),j(m)}^1, Z_{i(m),a_j(m)}^2\}$, odpowiadają kolejno wykonywanym operacjom wierszowym i kolumnowym. Ponieważ $|\det(Z^i)| = 1 \Rightarrow |\det(D)| = |\prod_{i=1}^k d_k| = |\det(XAY)| = |\det(A)|$,

□

Macierz diagonalna D , nie jest wyznaczona jednoznacznie. Dla każdej macierzy A , mogą istnieć różne macierze D_1, X_1, Y_1 , oraz D_2, X_2, Y_2 , takie że $A = X_1 \times D_1 \times Y_1 = X_2 \times D_2 \times Y_2$.

Twierdzenie 2.20. Niech A będzie macierzą kolorowań diagramu L , $\{D_1, \dots, D_n\}$ zbiorem wszystkich możliwych macierzy diagonalnych odpowiadających A . Istnieje dokładnie jedna macierz diagonalna D_i , o wartościach na głównej przekątnej $(d_1, \dots, d_k)$, takich że dla każdego j , $d_j | d_{j+1}$.

Dowód. Istnienie: Weźmy dowolną macierz diagonalną D , wymiaru $k \times k$, o wartościach na głównej przekątnej $(d_1, \dots, d_k)$. Weźmy element d_k . Niech $x_{i,k}$, oznacza największy wspólny dzielnik elementów d_i, d_k . Ponadto liczby $f_i = d_i/x_{i,k}$, oraz $f_k = d_k/x_{i,k}$, są względnie pierwsze. Istnieją zatem liczby $a, b \in \mathbb{Z}$, takie że $a \times f_i + b \times f_k = 1$. Rozważmy ciąg operacji:

- Dodanie do i -tej kolumny b -tej krotności k -tej kolumny
- Dodanie to k -tego wiersza a -tej krotności i -tego wiersza

$$D_i = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & f_i x_{i,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & 0 & \cdots & f_k x_{i,k} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & f_i x_{i,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & x_{i,k} & \cdots & f_k x_{i,k} \end{pmatrix}$$

- Odjęcie od i -tego wiersza f_i -tej krotności k -tego wiersza
- Odjęcie od k -tej kolumny f_k -tej krotności i -tej kolumny
- Zamiana i -tej i k -tej kolumny

$$\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & 0 & \cdots & -f_i f_k x_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & x_{i,k} & \cdots & f_k x_{i,k} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & 0 & \cdots & -f_i f_k x_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & x_{i,k} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Zamiana i -tego i k -tego wiersza

$$\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & x_{i,k} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & 0 & \cdots & -f_i f_k x_{i,k} \end{pmatrix}$$

Powtarzając rozumowanie dla wszystkich $i \in \{1, \dots, k-1\}$, otrzymamy że dla każdego i , $d_i | d_k$. Następnie powtarzając całe rozumowanie dla d_{k-1} , otrzymamy że dla każdego i , $d_i | d_{k-1}$. Ponadto w dalszym ciągu $d_{k-1} | d_k$, bo dla każdego j , f_{j1}, f_{j2} , są względnie pierwsze. Rozumując indukcyjnie przekształcimy macierz diagonalną D do żądanej postaci.

Jedyność: Załóżmy nie wprost że istnieją 2 macierze diagonalne D_1, D_2 , oraz obie spełniają warunek $d_i | d_{i+1}$. Istnieje zatem najmniejsze i , że $d_i^1 \neq d_i^2$. Niech X_1, Y_1, X_2, Y_2 , będą odpowiadającymi macierzami przejść. Z równości $A = X_1 \times D_1 \times Y_1 = X_1 \times D_1 \times Y_1$, mamy $D_1 = X_1^{-1} \times X_2 \times D_2 \times Y_2 \times Y_1^{-1}$. Ponieważ dla $j < i$, $d_j^1 = d_j^2$, to macierze $X_1^{-1} \times X_2$, oraz $Y_1^{-1} \times Y_2$, mają postać:

$$X_1^{-1} \times X_2 = \begin{pmatrix} I & O \\ O & X' \end{pmatrix} \quad Y_2 \times Y_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & Y' \end{pmatrix}$$

Bez straty ogólności można przyjąć że d_i^1 nie dzieli d_i^2 . Ponieważ dla każdego j większego od i , d_i^1 dzieli d_j^1 , to dowolna kombinacja liniowa $\sum_{j=i}^k d_j^1 \times g_j$, jest podzielna przez d_i^1 , gdzie g_j , są współczynnikami całkowitymi zależnymi od elementów macierzy X' , oraz Y' . Ale z założenia $\sum_{j=i}^k d_j^1 \times g_j = d_i^2$, co jest sprzeczne z faktem że d_i^1 nie dzieli d_i^2 . □

Twierdzenie 2.21. Wyznacznik diagramu L , oraz wartości w odpowiadającej mu macierzy diagonalnej są niezmiennikiem węzła.

Dowód. Niech K będzie węzłem, L jego diagramem, $B = \{b_1, \dots, b_k\}$ zbiorem łuków, C zbiorem skrzyżowań, $\{a_1, \dots, a_k\}$ jego kolorowaniem modulo n , A_+ macierzą kolorowania. Wystarczy sprawdzić że wyznacznik diagramu oraz struktura macierzy diagonalnej nie zmienia się pod wpływem ruchów Reidemeistera.

1. Pierwszy ruch Reidemeistera. Bez straty ogólności można założyć że ruch Reidemeistera jest przeprowadzany na k -tym łuku, pomiędzy i , oraz $i+1$ skrzyżowaniem. Dodatkowo można przyjąć że indeksy skrzyżowań do których dochodzi łuk k są mniejsze od $i+1$, oraz indeksy skrzyżowań do których dochodzi $k+1$, są większe od i . W rezultacie, macierz A'_+ po transformacji, ma wymiar $k+1$. Elementy o obu indeksach mniejszych od k pozostają niezmienione.

$\longleftrightarrow$

$$A'_+ = \begin{pmatrix} & & a_{1,k} & 0 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & a_{i,k} & 0 \\ & A & 0 & a_{i+1,k} \\ & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & a_{k-1,k} \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k-1} & 0 & a_{k,k} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Równania skrzyżowań o indeksach od 1 do i nie zmieniają się. W równaniach skrzyżowań o indeksach większych od i , k -ty kolor zostaje zastąpiony $k+1$ -szym. Ostatni wiersz macierzy wynika z równania c_{k+1} skrzyżowania. Na mocy lematu znaki równań mogą być tak dobrane aby sumowały się one do 0. Co więcej taki dobór znaków jest również właściwy dla macierzy A_+ . Niech A' będzie minorem A'_+ powstałym poprzez usunięcie ostatniej kolumny i ostatniego wiersza.

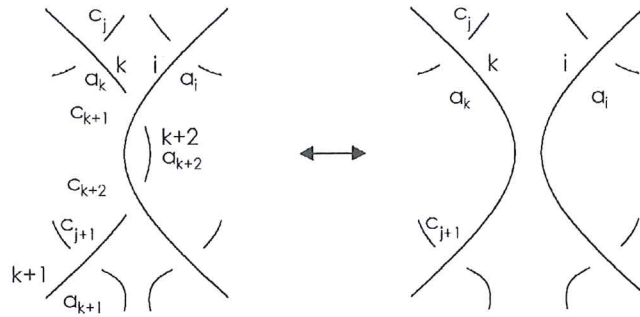
$$A' = \begin{pmatrix} & & a_{1,k} \\ & & \vdots \\ & A & a_{i,k} \\ & & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Dodając do k -tego wiersza sumę pozostałych wierszy otrzymamy macierz:

$$\begin{pmatrix} & & & a_{1,k} \\ & & & \vdots \\ & A & & a_{i,k} \\ & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Stąd korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem ostatniego wiersza, $|\det(A')| = |1 \times \det(A)|$. Przenosząc element $a_{k,k} = 1$ w lewy górny róg macierzy i powtarzając rozumowanie z twierdzenia o postaci macierzy diagonalnej, otrzymujemy, że jeśli macierz diagonalna odpowiadająca A ma wartości na głównej przekątnej $\{|d_1|, \dots, |d_{k-1}|\}$, to macierz diagonalna odpowiadająca A' , ma wartości $\{1, |d_1|, \dots, |d_{k-1}|\}$

2. Drugi ruch Reidemeistera. Bez straty ogólności można założyć że ruch Reidemeistera dotyczy i -tego, oraz k -tego łuku, gdzie i -ty łuk jest łukiem górnym, oraz ruch jest pomiędzy skrzyżowaniami c_j, c_{j+1} .



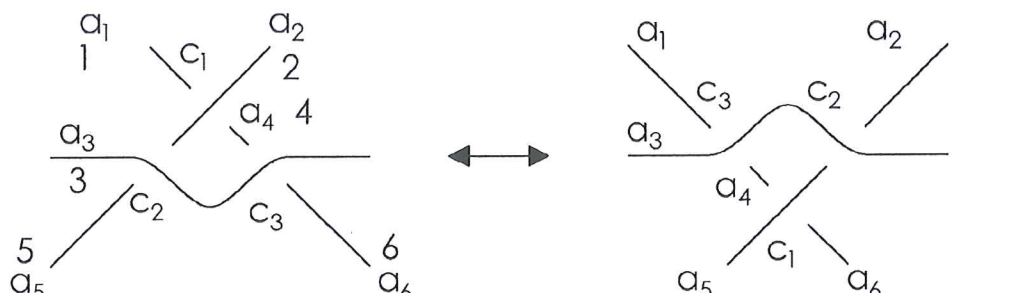
Niech indeksy skrzyżowań do których dochodzi łuk k są mniejsze od $i+1$, oraz indeksy skrzyżowań do których dochodzi $k+1$, są większe od i . Równania skrzyżowań do których nie dochodzi łuk $k+1$ nie zmieniają się. Macierze kolorowania mają zatem postacie:

$$A'_+ = \begin{pmatrix} & & & a_{1,k} & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & A & & a_{i,k} & 0 & 0 \\ & & & 0 & a_{i+1,k} & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & a_{k-1,k} & 0 \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,i} & \dots & a_{k,k-1} & 0 & a_{k,k} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} & & & & & a_{1,k} & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & a_{i,k} & 0 \\ & & A & & & 0 & a_{i+1,k} \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & a_{k-1,k} \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,i} & \cdots & a_{k,k-1} & 0 & a_{k,k} \\ 0 & \cdots & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Po wykonaniu na macierzy A' następujących operacji: dodanie do ostatniej $(k+1)$ kolumny sumy pozostałych kolumn, oraz dodanie do przedostatniego wiersza (k) sumy wierszy od 1 do $k-1$, oraz zastosowaniu rozwinięcia Laplace'a otrzymamy $|\det(A')| = |\det(A)|$. Macierz diagonalna ma postać $\{1, 1, |d_1|, \dots, |d_k|\}$. Argumentacja jest analogiczna jak w pierwszym ruchu Reidemeistera.

3. Trzeci ruch Reidemeistera. Trzeci ruch nie zmienia liczby skrzyżowań. Macierze A_+ , oraz A'_+ mają wymiar $k \times k$. Diagram przed i po wykonaniu ruchu, oraz odpowiadające im macierze kolorowań zostały przedstawione poniżej.



$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_x & A_y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A_x & A_y \end{pmatrix}$$

Ponadto łuk a_4 występuje jedynie w równaniach skrzyżowań c_3 , oraz c_1 . Wynika stąd że czwarta kolumna macierzy A_x jest równa 0. Niech macierze A , oraz A' będą macierzami powstałymi po usunięciu pierwszego wiersza i trzeciej kolumny. Rozważmy ciąg operacji.

Dla macierzy A' :

- Odjęcie czwartej kolumny od szóstej kolumny,
- Zamiana pierwszego i drugiego wiersza,
- Zamiana pierwszej i czwartej kolumny.

Dla macierzy A :

- Odjęcie czwartej kolumny od pierwszej kolumny,
- Zamiana pierwszego i drugiego wiersza,
- Zamiana pierwszej i czwartej kolumny.

Wtedy obie macierze zostaną przekształcone do postaci:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & A'_x & & & 0 \\ & & & A_y & & \end{pmatrix}$$

Gdzie, A'_x jest macierzą powstałą przez usunięcie trzeciej kolumny z macierzy A_x . Zatem sprowadzając macierze do postaci diagonalnej otrzymujemy że $\det|A'| = \det|A|$, oraz odpowiadające macierze diagonalne są równe $D' = D$.

□

Twierdzenie 2.22. Diagram L może być kolorowalny mod $n \Leftrightarrow |\det(L)|$ oraz n nie są względnie pierwsze.

Dowód. Istnienie kolorowania mod n oznacza istnienie kolorów $\{a_1, \dots, a_k\}$, takich że równania kolorowań są spełnione dla każdego skrzyżowania. Równoważnie, jest spełnione równanie macierzowe: $A_+ x \equiv 0 \pmod n$, $x \in \mathbb{Z}_n^k$. Z lematu wynika, że można przyjąć $a_1 = 0$. Ponieważ równania kolorowań są liniowo zależne i $a_1 = 0$, zatem powyższa równość zachodzi $\Leftrightarrow Ax' \equiv 0 \pmod n$, $x' \in \mathbb{Z}_n^{k-1}$.

Korzystając z twierdzenia o postaci diagonalnej otrzymujemy $A = X^{-1}DY^{-1}$. X^{-1} , Y^{-1} są macierzami całkowitoliczbowymi. Niech $\overline{X^{-1}} = X^{-1} \pmod n$, $\overline{Y^{-1}} = Y^{-1} \pmod n$, oznacza przypisanie każdemu elementowi macierzy, reszty z dzielenia mod n . Stąd $Ax' \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{A}x' \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{X^{-1}}\overline{D}\overline{Y^{-1}}x' \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{X^{-1}} \times \overline{D} \times \overline{Y^{-1}}x' \equiv 0 \Leftrightarrow \overline{D}y' \equiv 0$, $y' = Y^{-1}x'$, $y' \in \mathbb{Z}_n^{k-1}$. Ponieważ kolorowanie x' nie jest trywialne, to $y' \neq 0 \pmod n$. Zatem $\exists i \in \{1, \dots, k\}$ $d_i \times y'_i \neq 0 \pmod n$. Ponieważ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ $y'_i \in \mathbb{Z}_n$, to d_i , oraz n , nie są względnie pierwsze. Ponadto $|\det(L)| = |\det(D)| = \prod_{i=1}^k |d_i|$. Stąd $\det(L)$, oraz n nie są względnie pierwsze. □

Wniosek:

- Jeżeli $|\det(L)| = 0$, to dla każdego n , diagram jest kolorowalny modulo n ,
- Jeżeli $|\det(L)| = 1$, to dla żadnego n , diagram nie jest kolorowalny modulo n

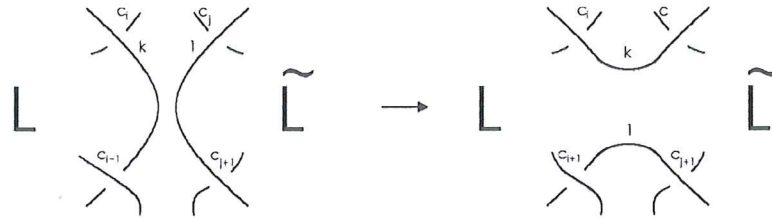
2.5 Wyznacznik sumy spójnej

Niech $K, \tilde{K}$ będą węzłami, $L, \tilde{L}$ ich diagramami, $A_+, \tilde{A}_+$ macierzami kolorowania, $C, \tilde{C}$ zbiorami skrzyżowań. Rozważmy sumę spójną węzłów $K \# \tilde{K}$. Bez straty ogólności można przyjąć dwa upraszczające założenia:

- Diagramy zostały połączone względem k -tego łuku w diagramie L , oraz względem pierwszego łuku w diagramie $\tilde{L}$.
- Skrzyżowania w diagramie L zostały tak ponumerowane że skrzyżowania do których dochodzi łuk k , oraz znajdują się przed miejscem połączenia diagramów mają numer mniejszy od $i+1$, zaś skrzyżowania znajdujące się za miejscem połączenia mają numer większy od i . Analogicznie dla diagramu $\tilde{L}$.

Twierdzenie 2.23. Wyznacznik sumy spójnej diagramów $|\det(K \# \tilde{K})| = |\det(K)| \times |\det(\tilde{K})|$. Ponadto jeżeli wartości w odpowiadających macierzach diagonalnych wynoszą $\{|d_1|, \dots, |d_k|\}$, oraz $\{|\tilde{d}_1|, \dots, |\tilde{d}_k|\}$, to wartości w macierzy diagonalnej dla diagramu sumy spójnej wynoszą $\{1, |d_1|, \dots, |d_k|, |\tilde{d}_1|, \dots, |\tilde{d}_k|\}$.

Dowód. Operacja sumy spójnej przerywa dwa wybrane łuki i łączy końce.



W diagramie L , równania skrzyżowań o indeksach większych od i zostaną zmienione. Współczynnik odpowiadający łukowi k , będzie odpowiadał łukowi pierwszemu z diagramu $\tilde{L}$. W diagramie $\tilde{L}$, współczynnik odpowiadający łukowi pierwszemu będzie odpowiadał łukowi k z diagramu L . Macierz kolorowania ma postać:

$$(A_{L\#\tilde{L}})_+ = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,k} & 0 & & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & 0 & a_{i+1,k} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k-1} & 0 & a_{k,k} & & \\ & & & \tilde{a}_{1,1} & 0 & \tilde{a}_{1,2} & \cdots & \tilde{a}_{1,k} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \tilde{a}_{i,1} & 0 & \tilde{a}_{i,2} & \cdots & \tilde{a}_{i,k} \\ & & & 0 & \tilde{a}_{i+1,1} & \tilde{a}_{i+1,2} & \cdots & \tilde{a}_{i+1,k} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \tilde{a}_{k,1} & \tilde{a}_{k,2} & \cdots & \tilde{a}_{k,k} \end{pmatrix}$$

Po usunięciu z macierzy $k+1$ -szego wiersza oraz $k+1$ -szej kolumny otrzymamy

$$A_{L\#\tilde{L}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{i,k} & & & \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k-1} & 0 & & & \\ & & & \tilde{a}_{2,1} & \tilde{a}_{2,2} & \cdots & \tilde{a}_{2,k} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \tilde{a}_{i,1} & \tilde{a}_{i,2} & \cdots & \tilde{a}_{i,k} \\ & & & 0 & \tilde{a}_{i+1,2} & \cdots & \tilde{a}_{i+1,k} \\ & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & \tilde{a}_{k,2} & \cdots & \tilde{a}_{k,k} \end{pmatrix}$$

Następnie dodając do k -tego wiersza sumę wierszy od 1 do $k-1$, oraz zamieniając k -ty wiersz z $k+\tilde{k}$ -szym wierszem i k -tą kolumnę z $k+\tilde{k}$ kolumną mamy:

$$A_{L\#\tilde{L}} = \begin{pmatrix} A & O & 0 \\ O & \tilde{A} & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Na podstawie wniosku o szachownicy diagramu $\sum_{m=1}^i a_{m,k} = \mp 1$. Zatem $|\det(A_{L\#\tilde{L}})| = 1 \times |\det(A_L)| \times |\det(\tilde{A}_L)|$. Ponadto przesuwając 1 w lewy górny róg macierzy i stosując proces diagonalizacji otrzymamy, że elementami macierzy diagonalnej są $\{1, |d_1|, \dots, |d_k|, |\tilde{d}_1|, \dots, |\tilde{d}_k|\}$. □

2.6 Grupy kolorowań

Definicja 2.24. Grupa kolorowań diagramu $Col(L)$, to grupa abelowa, w której generatorami są łuki diagramu, zaś relacjami są równania kolorowań, oraz ustalony koloru wybranego łuku, $a_1 = 0$.

Formalnie: $Col(L) = \langle a_1, \dots, a_k \mid \begin{pmatrix} a_{j_1} + a_{j_2} - 2 \times a_{j_3} \equiv 0 \\ \vdots \\ a_{j_{k-2}} + a_{j_{k-1}} - 2 \times a_{j_k} \equiv 0 \end{pmatrix}, a_1 = 0 \rangle$.

$$Col(L) = \langle x \mid Ax \equiv 0 \rangle, x \in \mathbb{Z}^{k-1}$$

Grupa kolorowań nie jest dobrze zdefiniowanym pojęciem. Zależy ona bowiem od sposobu indeksowania łuków, skrzyżowań oraz wyboru koloru dla pierwszego elementu.

Twierdzenie 2.25. Skończenie generowana grupa przemienna jest izomorficzna z produktem grup cyklicznych.

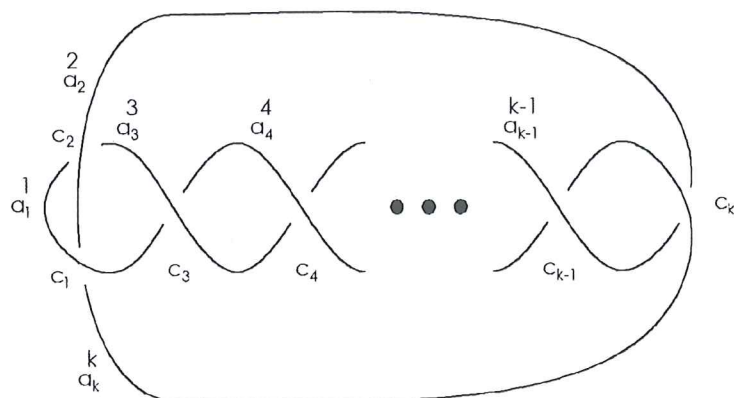
Grupa kolorowań ma zatem postać: $Col(L) \cong \prod_{i=1}^m \mathbb{Z}_{n_i}$.
Z definicji grupy wynika że $Col(L) \cong \mathbb{Z}^m / (A\mathbb{Z}^m)$. Niech $A = X^{-1}DY^{-1}$
 $\mathbb{Z}^m / (A\mathbb{Z}^m) \cong \mathbb{Z}^m / (X^{-1}DY^{-1}\mathbb{Z}^m) \cong \mathbb{Z}^m / (D\mathbb{Z}^m) \cong \mathbb{Z}^m / (\prod_{i=1}^m |d_i|\mathbb{Z}) \cong \prod_{i=1}^m \mathbb{Z}_{|d_i|}$

Klasa izomorfizmów grupy jest dobrze zdefiniowana. Wyznacznik, oraz wartości w macierzy diagonalnej nie zależą od wyboru diagramu, sposobu indeksowania łuków ani skrzyżowań. Produkt grup cyklicznych izomorficzny z grupą kolorowania jest niezmiennikiem węzła.

Wniosek: Grupa kolorowań jest nieskończona $\Leftrightarrow \det(L) = 0$.

2.7 Przykład zastosowań - rodzina węzłów

Przykład 1: Rozważmy następującą rodzinę węzłów K_k , $k \geq 3$. Korzystając z własności kolorowań wykażemy że dla różnych k , diagramy przedstawiają różne węzły.



Macierz kolorowania ma postać:

$$A_{k+} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & k-2 & k-1 & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ \vdots \\ c_{k-2} \\ c_{k-1} \\ c_k \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Rozważmy macierz A , powstałą po usunięciu ostatniej kolumny i ostatniego wiersza. Za pomocą operacji wierszowych i kolumnowych, macierz zostanie sprowadzona do postaci diagonalnej.

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dodając do pierwszej kolumny, podwojoną drugą kolumnę, zamieniając pierwszą i drugą kolumnę miejscami, oraz dodając do drugiego wiersza podwojony pierwszy wiersz otrzymujemy.

$$A_k^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Niech W będzie macierzą $n \times n$, taką że na głównej przekątnej znajdują się 2, oraz bezpośrednio nad i pod główną przekątną znajdują się -1.

$$W_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Wtedy istnieje ciąg operacji:

- Zamiana pierwszej i drugiej kolumny
- Dodanie do drugiej kolumny $2m + 1$ krotności pierwszej kolumny.
- Odjęcie pierwszego wiersza od trzeciego wiersza

Przekształca macierz H_1 w macierz H_2 :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 2m+1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -2m+1 & & & & \\ 0 & & W_n & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2m+3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2m-1 & & & & \\ 0 & 0 & & W_{n-1} & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Macierz A_k^1 ma postać:

$$A_k^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & & & & \\ 0 & 0 & & W_{k-3} & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Powtarzając ciąg operacji powyżej mamy:

$$A_k^i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2i+1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -2i+1 & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & W_{k-2-i} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Stąd macierz A_k może zostać przekształcona do postaci diagonalnej takiej że na głównej przekątnej znajdują się elementy $\{-1, -1, \dots, -1, 2k-3\}$. Stąd $|\det(L_k)| = 2k-3$. Ponieważ wyznacznik diagramu jest niezmiennikiem węzła to dla każdego k , diagram przedstawia różne węzły.

Przykład 2: Niech K'_k będą tymi węzłami z poprzedniego przykładu że, wyznacznik diagramu jest pewną potęgą 3. Czy dla pewnego $k \geq 9$, K_k jest sumą spójną pewnej, większej od 1, liczby trójlistników?

Z poprzedniego twierdzenia wyznacznik spłotu węzłów, jest iloczynem wyznaczników diagramów. Zatem spłot n trójlistników ma wyznacznik 3^n . Wobec tego istnieje węzeł K'_k , że wyznacznik jego diagramu jest równy wyznacznikowi spłotu trójlistników. Z twierdzenia wiadomo również że struktura macierzy diagonalnej jest niezmiennikiem węzła. Macierz diagonalna odpowiadająca L_k , ma na głównej przekątnej wartości $\{1, 1, \dots, 1, 3^n\}$, zaś macierz diagonalna odpowiadająca diagramowi spłotu trójlistników ma wartości $\{1, \dots, 1, 3, \dots, 3\}$. Ponadto wartości w obu macierzach diagonalnych spełniają warunek $d_i | d_{i+1}$, więc macierze diagonalne tej postaci są jedyne. Stąd żaden spłot trójlistników nie jest węzłem postaci K_k .

3 Wielomiany Alexandra

Wiele wskazuje na to, że niebawem teoria węzłów będzie przeżywać drugą młodość. Na początku chciano ją wykorzystać do opisywania mikroświata. Jak się okazało, nie odpowiadała ona fizycznym własnościom rzeczywistości, jednak został rozwinięty aparat matematyczny. Jak wiadomo DNA wszystkich żywych organizmów jest poskręcane, a dodatkowo DNA bakterii ma strukturę spłotu węzłów. Całkiem niedawno odkryto, że w momencie kiedy bakteria chce się podzielić musi przeciąć nic DNA wzdłuż (taka nic nie ma wolnych końców) i wtedy mogą powstawać supły. Dzięki takim supłom replikacja bakterii byłaby niemożliwa, ale pod wpływem enzymu zwanego topoizomerazą bakteria jest w stanie rozsypać węzły. Biolodzy wspólnie z matematykami badają topologiczne własności takich struktur i mechanizmy, które za tym stoją, aby je zakłócić i tym samym uniemożliwić rozmnażanie się bakteriom.

3.1 Wielomian Laurenta

Formalne wprowadzenie wielomianów Alexandra można zrealizować na kilka sposobów. Jednym z nich jest wykorzystanie do tego pojęcia wielomianów HOMFLY - uogólnionych wielomianów Jonesa. Innym sposobem jest użycie formalizmów topologii algebraicznej. Wtedy pewne cięcia i sklejanie powierzchni Seiferta determinują wielomian Alexandra. To właśnie ta metodologia pozwoliła po raz pierwszy udowodnić prawdziwość twierdzeń Alexandra.

Poniżej wprowadzimy pojęcie wielomianów Alexandra elementarnie, skupiając się na procedurze ich wyznaczania i pokażemy niezależność od ruchów Reidemeistera. Dodatkowo zdefiniujemy je jako pewną funkcję węzła. Jednak żeby zachować formalizm wpierw zdefiniujemy pojęcie wielomianów Laurenta.

Definicja 3.1. Wielomian Laurenta zmiennej X jest symbolem postaci:

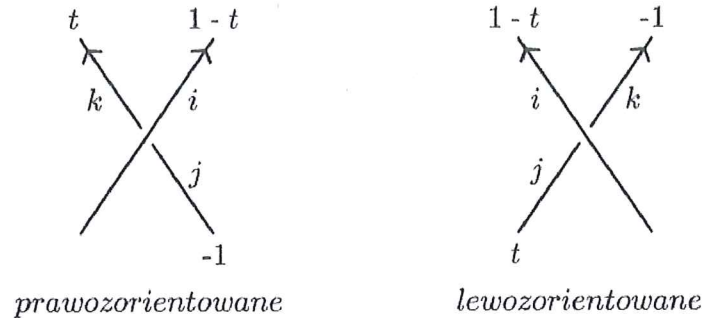
$$f = a_r X^r + a_{r+1} X^{r+1} + \dots + a_s X^s$$

gdzie $r \leq s$ ($r, s \in \mathbb{Z}$, dopuszczalne są wartości ujemne) oraz $a_r \dots a_s \in \mathbb{Z}$. Jeżeli wartość $a_r = 0$ to jako f przyjmujemy $a_{r+1} X^{r+1} + \dots + a_s X^s$. Podobnie gdy $a_s = 0$. Wielomian ten podlega zwykłym działaniom dodawania i mnożenia wielomianów. Zbiór wszystkich wielomianów Laurenta zmiennej X oznaczany jest jako $\mathbb{Z}[X, X^{-1}]$. Aby podkreślić od jakiej zmiennej zależy wielomian f czasami będziemy pisać $f(X)$.

Wielomian Alexandra, który zdefiniujemy poniżej będzie wielomianem Laurenta zmiennej t , tzn będzie elementem zbioru $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Piszemy $f(t) \stackrel{\circ}{=} g(t)$ jeżeli $f(t) = \pm t^m g(t)$ dla pewnego $m \in \mathbb{Z}$.

3.2 Macierz skrzyżowań

Aby obliczyć wielomian Alexandra $\Delta_L(t)$ węzła L (czasem będziemy pisali $\Delta(L)$), wpierw ustalamy dla niego zorientowany diagram D bez krzywych zamkniętych. Następnie etykietujemy D , tzn przypisujemy pewne unikalne wartości (np.: liczby lub litery) dla łuków i skrzyżowań. W węźle występują dwa rodzaje skrzyżowań: prawozorientowane i lewozorientowane.

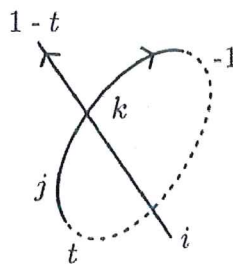


Orientację skrzyżowania wyznacza kierunek nadrzędnego łuku. Dla pierwszego skrzyżowania z Rysunku 1. łuk przechodzący nad przechodzi ze strony lewej do prawej, czyli jest prawozorientowany, analogicznie dla skrzyżowania lewozorientowanego.

Definicja 3.2. Zdefiniujemy macierz A_+ wymiaru $n \times n$, gdzie n jest liczbą skrzyżowań (i łuków - zobacz dowód Lematu 3.13) według poniższej procedury. Powtórzymy ją dla każdego skrzyżowania l w węźle:

1. Jeśli skrzyżowanie l jest prawozorientowane i łuk i przechodzi nad łukami j , k (Rysunek 1.), to w wierszu l wpisujemy $1 - t$ w kolumnie i , -1 w kolumnie j oraz t w kolumnie k
2. Jeśli skrzyżowanie l jest lewozorientowane i łuk i przechodzi nad łukami j , k (Rysunek 1.), to w wierszu l wpisujemy $1 - t$ w kolumnie i , t w kolumnie j oraz -1 w kolumnie k

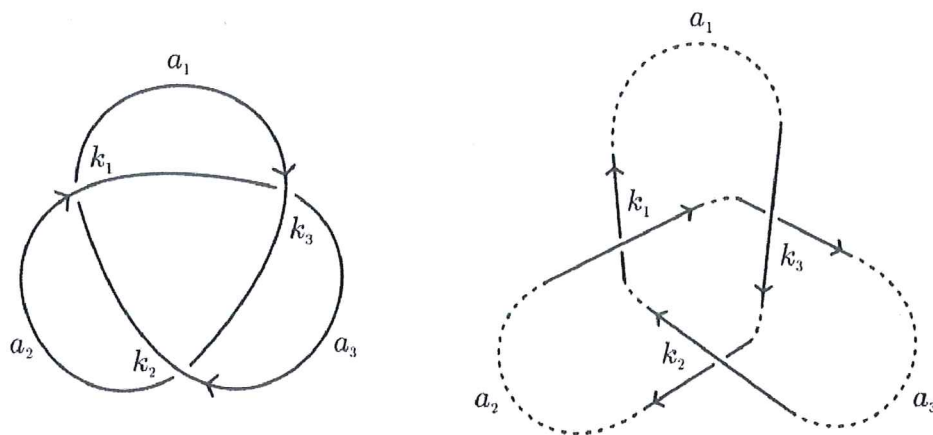
Wszystkie pozostałe wyrazy w wierszu l są równe 0. Może się zdarzyć przypadek, kiedy jakieś i , j , k są tym samym łukiem. Wtedy we właściwej kolumnie wpisujemy sumę wyrazów opisanych powyżej. Dla przykładu (Rysunek 2.), jeżeli $j = k$ dla jakiegoś lewozorientowanego skrzyżowania, to wpisujemy $-1 + t$ w kolumnie j ($= k$).



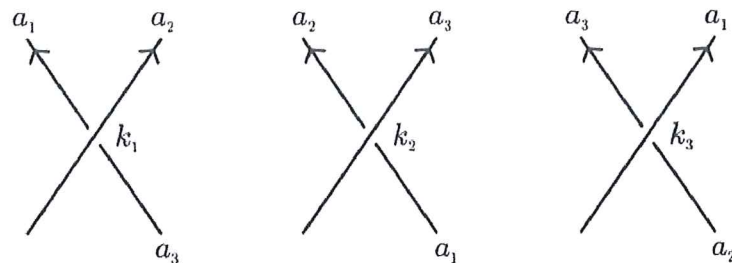
Wniosek 3.3. Jeżeli przyjmiemy $t = -1$ to dostaniemy macierz standardowych równań kolorujących.

Dowód. Dowód polega na porównaniu definicji Δ_L i $\det(L)$. □

Przykład 3.4. Pokażemy bardzo elementarnie na przykładzie trójliscia jak wyznaczyć macierz. Nadajemy etykiety dla skrzyżowań i łuków. Następnie rozpoznajemy orientację skrzyżowań. Narysujemy zatem rozpatrywany węzeł w taki sposób, by każde skrzyżowanie odpowiadało jednemu z Rysunku 1.



Przyjrzyjmy się teraz samym skrzyżowaniom. Wielomiany przyporządkujemy zgodnie z podaną procedurą.



Wtedy odpowiadająca jemu macierz wygląda następująco:

$$A_+ = \begin{pmatrix} t & 1-t & -1 \\ -1 & t & 1-t \\ 1-t & -1 & t \end{pmatrix}$$

3.3 Macierz i wielomian Alexandera

Definicja 3.5. Macierz A wymiaru $(n-1) \times (n-1)$ powstała poprzez usunięcie dowolnego wiersza i dowolnej kolumny z macierzy A_+ nazywamy macierzą Alexandera węzła L . Wyznacznik macierzy Alexandera jest nazywany wielomianem Alexandera węzła L i oznaczany przez $\Delta_L(t)$ ($\Delta(L)$). Wyznacznik macierzy 0×0 definiujemy jako 1.

Jeżeli nie zostanie powiedziane inaczej macierz Aleksandra A będzie minorem $A_+^{(1,1)}$.

Przykład 3.6. Wielomian Alexandera dla przykładu - trójliscia wynosi $\Delta_3(t) = t^2 - t + 1$. Aby się przekonać obliczymy wyznacznik macierzy $A_+^{(3,1)}$:

$$\Delta_3(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & -1 \\ t & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 - (-t) = 1 + t^2 - 2t + t = t^2 - t + 1$$

Wniosek 3.7. Wielomian Alexandera nie zależy od tego, który wiersz i którą kolumnę usuwamy.

Dowód. Pokażemy, że wyznacznik macierzy powstałej przez usunięcie j -kolumny oraz i -wiersza trzyma w relacji $\stackrel{\circ}{=}$ wyznacznik minora $(1, 1)$.

$$\det A^{(1,1)} = \det(A_2^{(1)}, A_3^{(1)}, \dots, A_n^{(1)})$$

Rozważmy wyznacznik macierzy $\det A^{(1,j)} = \det(A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_{j-1}^{(1)}, A_{j+1}^{(1)}, \dots, A_n^{(1)})$. Korzystając z tego, że suma wierszy oraz kolumn wynosi 0, możemy do $A_1^{(1)}$ dodać pozostałe kolumny otrzymując $\det A^{(1,j)} = \det(-A_j^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_{j-1}^{(1)}, A_{j+1}^{(1)}, \dots, A_n^{(1)})$. Odpowiednia liczba transpozycji kolumn i wyciągnięcie -1 z $A_j^{(1)}$ daje

$$\det A^{(1,j)} = (-1)^{j+1} \det A^{(1,1)}$$

Podobnie postępujemy z wierszami i ostatecznie

$$\det A^{(i,j)} = (-1)^{(i+1+j+1)} \det A^{(1,1)} = (-1)^{(i+j)} \det A^{(1,1)} \stackrel{\circ}{=} \det A^{(1,1)}$$

□

Przykład 3.8. Obliczając wyznacznik macierzy $A_+^{(1,2)}$ dla trójkąta z przykładu powyżej dostaniemy $\Delta'_3(t) = -(t^2 - t + 1)$, czyli $-\Delta_3(t)$.

Podczas wyznaczania wielomianu Alexandra dokonaliśmy wyborów, które mają wpływ na postać wielomianu, tj: wybór diagramu, etykietowanie łuków i skrzyżowań. Różne wybory mogą prowadzić do różnych wielomianów Alexandra.

Twierdzenie 3.9. Klasa równoważności relacji $\stackrel{\circ}{=}$ wielomianów Alexandra $\Delta_L(t)$ jest dobrze zdefiniowanym niezmiennikiem zorientowanych węzłów, tzn relacja $\Delta_L^1(t) \stackrel{\circ}{=} \Delta_L^2(t)$ jest zawsze utrzymana.

Dowód. Twierdzenie to jest analogiczne do tego, że wyznacznik (zobacz rodział kolorowań) jest niezmiennikiem węzła. Ten fakt opiera się na zależności pomiędzy wyznacznikiem, a grupą kolorowań. Moglibyśmy powyższe twierdzenie szybko udowodnić przytaczając zależność pomiędzy wielomianem Alexandra, a obiektem zwanym modułem Alexandra, tzn modułem pierścienia $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Nie chcemy się zagłębiać w teorię modułów, więc powyższe twierdzenie udowodnimy sprawdzając, że po wykonaniu ruchów Reidemeistera wielomian pozostaje w relacji $\stackrel{\circ}{=}$.

Przy dowodzeniu za pomocą ruchów Reidemeistera patrzymy jak zmienia się wyznacznik po wykonaniu ruchu.

1. I ruch Reidemeistera

Można założyć bez straty ogólności, że ruch jest wykonywany pomiędzy skrzyżowaniami x i y na k -łuku. Macierz A_+ jest wymiaru $n \times n$. Macierz A uzyskamy usuwając pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę.

$$A_+ = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n-1} & k_1 \\ A_{2,1} & \cdots & A_{2,n-1} & k_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{x,1} & \cdots & A_{x,n-1} & k_x \\ A_{y,1} & \cdots & A_{y,n-1} & k_y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_{2,2} & \cdots & A_{2,n-1} & k_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{x,2} & \cdots & A_{x,n-1} & k_x \\ A_{y,2} & \cdots & A_{y,n-1} & k_y \end{pmatrix}$$

Wykonanie I ruchu Reidemeistera dodaje nowe skrzyżowanie (dodajemy jako ostatni wiersz), co wiąże się ze zmianą etykiet łuków. Pewna część kolumny k-łuku pozostanie bez zmian (oznaczymy ją przez l), pozostała część tej kolumny przejdzie na kolumnę łuku oznaczonego jako m . By nie ustalać kolejności etykietowania zauważamy zależność

$$(*) \quad \forall i \in I \quad k_i = l_i + m_i,$$

przy czym dokładnie jeden ze składników sumy jest równy 0, a I jest zbiorem etykiet skrzyżowań. Ruch ten powiększy wymiar macierzy do $n + 1$.

$$A'_+ = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n-1} & l_1 & m_1 \\ A_{2,1} & \cdots & A_{2,n-1} & l_2 & m_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ A_{n-2,1} & \cdots & A_{n-2,n-1} & l_{n-2} & m_{n-2} \\ A_{x,1} & \cdots & A_{x,n-1} & k_x & 0 \\ A_{y,1} & \cdots & A_{y,n-1} & 0 & k_y \\ 0 & \cdots & 0 & p(t) & -p(t) \end{pmatrix}$$

gdzie $p(t), q(t) \in \{-1, 1, -t, t\}$ oraz $p(t) + q(t) = \pm(t-1)$. Następnie m -kolumnę dodajemy do l -kolumny. Zgodnie z $(*)$ dostajemy macierz, która po wykreśleniu pierwszej kolumny i pierwszego wiersza wygląda następująco:

$$A' = \begin{pmatrix} A_{2,2} & \cdots & A_{2,n-1} & k_2 & m_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ A_{n-2,2} & \cdots & A_{n-2,n-1} & k_{n-2} & m_{n-2} \\ A_{x,2} & \cdots & A_{x,n-1} & k_x & 0 \\ A_{y,2} & \cdots & A_{y,n-1} & k_y & k_y \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -p(t) \end{pmatrix}$$

Stosując rozwinięcie Laplace'a względem ostatniego wiersza otrzymujemy:

$$\det A = \Delta_L^1(t) \stackrel{\circ}{=} \Delta_L^2(t) = \det A' = \pm p(t) \det A$$

2. II ruch Reidemeistera

Ruch ten jest wykonywany na l -łuku, pomiędzy skrzyżowaniami u i v oraz k -łuku, pomiędzy skrzyżowaniami x i y . Łukiem górnym jest k -łuk. Usuwamy pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę otrzymując macierz A :

$$A = \begin{pmatrix} A_{2,2} & \cdots & A_{2,n-2} & k_2 & l_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ A_{n-4,2} & \cdots & A_{n-4,n-2} & k_{n-4} & l_{n-4} \\ A_{x,2} & \cdots & A_{x,n-2} & k_x & 0 \\ A_{y,2} & \cdots & A_{y,n-2} & k_y & 0 \\ A_{u,2} & \cdots & A_{u,n-2} & 0 & l_u \\ A_{v,2} & \cdots & A_{v,n-2} & 0 & l_v \end{pmatrix}$$

Po wykonaniu ruchu Reidemestera wymiar macierzy powiększy się o 2. Zatem macierz Alexandra przyjmuje postać:

$$A' = \begin{pmatrix} A_{2,2} & \cdots & A_{2,n-2} & k_2 & m_2 & o_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & & \vdots \\ A_{n-4,2} & \cdots & A_{n-4,n-2} & k_{n-4} & m_{n-4} & o_{n-4} & 0 \\ A_{x,2} & \cdots & A_{x,n-2} & k_x & 0 & 0 & 0 \\ A_{y,2} & \cdots & A_{y,n-2} & k_y & 0 & 0 & 0 \\ A_{u,2} & \cdots & A_{u,n-2} & 0 & l_u & 0 & 0 \\ A_{v,2} & \cdots & A_{v,n-2} & 0 & 0 & l_v & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -p(t) - q(t) & p(t) & 0 & q(t) \\ 0 & \cdots & 0 & -p(t) - q(t) & 0 & p(t) & q(t) \end{pmatrix}$$

gdzie dzięki (*) zachodzi $l = m + o$. Wykonamy kolejno operacje macierzowe: od ostatniego wiersza odejmiemy wiersz przedostatni, do m -kolumny dodamy o -kolumnę, rozwinimy względem ostatniego wiersza otrzymując:

$$\det A' = \pm p(t) \det \begin{pmatrix} A_{2,2} & \cdots & A_{2,n-2} & k_2 & l_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n-4,2} & \cdots & A_{n-4,n-2} & k_{n-4} & l_{n-4} & 0 \\ A_{x,2} & \cdots & A_{x,n-2} & k_x & 0 & 0 \\ A_{y,2} & \cdots & A_{y,n-2} & k_y & 0 & 0 \\ A_{u,2} & \cdots & A_{u,n-2} & 0 & l_u & 0 \\ A_{v,2} & \cdots & A_{v,n-2} & 0 & l_v & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -p(t) - q(t) & p(t) & q(t) \end{pmatrix}$$

Rozwijamy względem ostatniej kolumny i mamy:

$$\det A = \Delta_L^1(t) \stackrel{\circ}{=} \Delta_L^2(t) = \det A' = \pm p(t)q(t) \det A$$

3. III ruch Reidemeistera

Ruch ten nie zmienia ilości skrzyżowań i łuków, zatem na mocy faktów z algebry liniowej:

- (a) zamiana miejscami dwóch dowolnych kolumn lub wierszy macierzy zachowuje wartość bezwzględną jej wyznacznika, lecz zmienia jego znak
- (b) dodając lub odejmując od dowolnego wiersza/kolumny inny wiersz/kolumnę lub kombinacje liniowe innych wierszy/kolumn nie zmieniamy wartości wyznacznika

zachodzi $\Delta_L^2 = \pm \Delta_L^2$, zatem wielomiany są w relacji $\stackrel{\circ}{=}$.

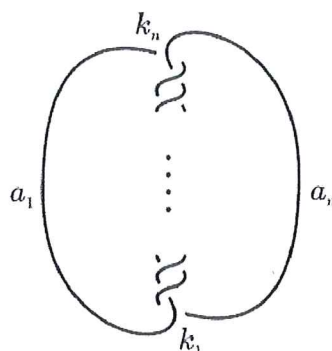
Aby dowód był kompletny potrzeba sprawdzić jeszcze jeden, trudny krok. Mianowicie, efekt zmiany orientacji. To pokaże, że wielomian Alexandra odwróconego węzła L jest uzyskany z wielomianu Alexandra węzła L przez zamianę t na t^{-1} , pomnożenie przez właściwą potęgę t i być może pomnożenie przez -1 . Argument, który za tym stoi wymaga znajomości topologii algebraicznej, tj. powierzchni Seiferta, zatem ten fakt przyjmiemy na wiarę. (Alexander nie był w stanie znaleźć dowodu; pierwszy poprawny dowód podał Seifert). $\square$

Wniosek 3.10. Jeżeli dla dwóch węzłów wielomiany Alexandra są różne, to na pewno te węzły nie są równoważne. Niestety nie możemy powiedzieć odwrotnie. Istnieją dwa różne węzły, dla których wielomiany będą w relacji $\equiv$.

Przykład 3.11. Rozważmy trudniejszy przykład. Niech to będzie $(2, n)$ -torus, który jest pokazany na Rysunku 5. Wielomian Alexandra tak opisanego diagramu dany jest przez wyznacznik minora $(n-1) \times (n-1)$ macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1-t & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1-t & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & 1-t & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t & 1-t \end{pmatrix}$$

Aby wyznaczyć go dokładnie potrzeba dość szczegółowego argumentu indukcyjnego (wyznacznik wynosi $\frac{(t^n-1)}{(t+1)}$). Bez wyliczania łatwo możemy stwierdzić, że dla różnych, dodatnich n wielomiany Alexandra są również różne.



Zauważmy wpierw, że współczynnikiem przy wyrazie najniższego stopnia - wyrazie wolnym jest wyznacznik macierzy uzyskanej przez podstawienie $t = 0$. Wtedy wynik to 1. Współczynnik przy wyrazie najwyższego stopnia jest wyznacznikiem macierzy zawierającej jedynie t wyrażen w powyższej macierzy, tzn przez usunięcie wszystkich ± 1 . Ostatecznie wyznacznik wynosi $t^n - 1$.

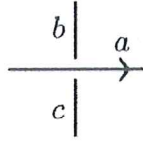
Stąd wielomian Alexandra dla węzła typu $(2, n)$ -torus jest stopnia dokładnie $n - 1$. W szczególności węzły te tworzą niekończącą rodzinę rozłącznych węzłów, z czego każdy jest rozróżniany przez wielomian Alexandra.

Twierdzenie 3.12. Niech L będzie zorientowany węzłem.

1. $\Delta_{mL}(t) = \Delta_L(t^{-1})$
2. $\Delta_{rL}(t) = \Delta_L(t^{-1})$

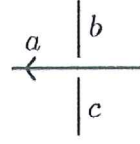
Dowód. Aby udowodnić 1) ustalmy diagram D węzła L i odbijmy go względem pionowej osi symetrii. Otrzymamy diagram mD węzła mL . Weźmy dowolne skrzyżowanie diagramu D i rozważmy odpowiadające temu skrzyżowanie w mD .

diagram D



$$a + tb - ta - c = 0$$

odbicie mD



$$a + tc - ta - b = 0$$

Współczynniki równania po lewo definiują macierz, której wyznacznik wynosi $\Delta_L(t)$ i jeżeli zastąpimy t przez t^{-1} dostaniemy macierz P , której wyznacznikiem jest $\Delta_L(t^{-1})$.

Podobnie współczynniki równania po prawej stronie wyznaczają macierz Q , której wyznacznik to $\Delta_{mL}(t)$. Teraz zauważmy, że równanie po lewej z t zastąpionym przez t^{-1} jest dokładnie równaniem po prawej stronie pomnożonym przez $-t^{-1}$. Wtedy $P = -t^{-1}Q$ oraz

$$\Delta_L(t^{-1}) = \det(P) = (-t)^{-m} \det(Q) = (-t^{-1})^m \Delta_{mL}(t) \stackrel{*}{=} \Delta_{mL}(t)$$

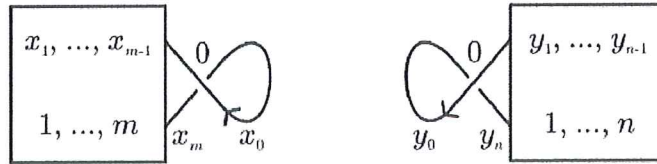
jest spełnione.

Dowód 2) jest analogiczny. □

3.4 Suma spójna

Twierdzenie 3.13. Niech J i K będą zorientowanymi węzłami. Wtedy $\Delta_{J\#K}(t) \stackrel{*}{=} \Delta_J(t)\Delta_K(t)$

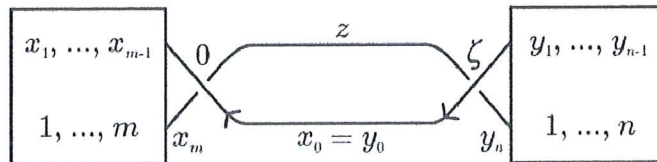
Dowód. Ustalmy diagramy dla węzłów J i K jak pokazano poniżej. Bez straty ogólności możemy poetyki-etować łuki i skrzyżowania zgodnie ze wskazanymi na Rysunku 7.



Oznaczmy przez A i B macierze powstałe z wielomianów równania kolorującego dla J i K . Usuńmy pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę w każdym przypadku. Wtedy

$$\Delta_J(t) = \det(A), \quad \Delta_K(t) = \det(B)$$

Otrzymaliśmy poniższy diagram dla $J\#K$.



Mamy następujące łuki: $x_0 = y_0, x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m, z$, oraz skrzyżowania: $0, 1, \dots, m$ z węzła J , następnie $1, \dots, n$ z węzła K oraz ζ . Równania w węźle $J \# K$ w skrzyżowaniach $1, \dots, m$ są dokładnie takie jak w węźle J , a dla skrzyżowań $1, \dots, n$ takie jak w K . Dla skrzyżowania ζ równanie to ma postać $(1-t)y_0 + tz - y_n = 0$. To pokazuje, że jest $\Delta_{J \# K}(t)$ wyznacznikiem macierzy

$$\begin{pmatrix} A & \cdots & A & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ A & \cdots & A & & & \\ & & & B & \cdots & B \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & B & \cdots & B \\ & & & & & -1 & t \end{pmatrix}$$

Tutaj również usuwamy pierwszy wiersz i kolumnę. Wtedy spełnione jest równanie:

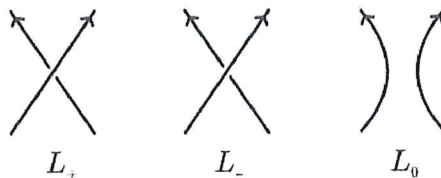
$$\Delta_{J \# K}(t) = t\Delta_J(t)\Delta_K(t) \stackrel{\bullet}{=} \Delta_J(t)\Delta_K(t)$$

□

3.5 Równoważna definicja

Definicja 3.14. Jak wspomniano wcześniej wielomiany Alexandra można wprowadzić na kilka sposobów. W tej pozycji chodziło o to, by zrobić to elementarnie. Innym sposobem jest skonstruowanie funkcji $\Delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{Z}(t^{\pm 1/2})$ takiej, że dla dwóch równoważnych węzłów L_1, L_2 mamy równość $\Delta_{L_1} = \Delta_{L_2}$ oraz spełniającą:

1. $\Delta(\bigcirc) = 1$
2. $\Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) = 0$, gdzie



gdzie $\mathbb{L}$ oznacza zbiór wszystkich węzłów. Zobaczmy kilka przykładów:

Przykład 3.15. Znajdziemy wielomian Alexandra rozłącznej sumy dwóch niewęzłów, tak jak $\Delta(\bigcirc \bigcirc)$. Oznaczmy ten węzeł jako L_0 i skorzystamy z własności 2).

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) \\ 0 &= \Delta(\bigcirc \bigcirc) - \Delta(\bigcirc \bigcirc) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) \\ 0 &= \Delta(\bigcirc) - \Delta(\bigcirc) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) \\ 0 &= (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) \end{aligned}$$

i stąd otrzymujemy, że $\Delta(L_0) = 0$.

Przykład 3.16. Znajdziemy wielomian Alexandra węzła Hopfa, czyli $\Delta(\bigcirc)$. Oznaczymy ten węzeł jako L_+ i skorzystamy z własności 2) na górnym skrzyżowaniu oraz z pierwszego przykładu.

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) \\ 0 &= \Delta(L_+) - \Delta(\bigcirc) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(\bigcirc) \\ 0 &= \Delta(L_+) - \Delta(L_-) + (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(\bigcirc) \\ 0 &= (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) \end{aligned}$$

i stąd otrzymujemy, że $\Delta(\bigcirc) = t^{1/2} - t^{-1/2}$.

4 Wielomian Jonesa

Przed wprowadzeniem kolejnego wielomianowego niezmiennika przyjrzymy się ich historii. Znamy już wielomian J. Alexandra, który został odkryty około roku 1928. W 1969 J. Conway znalazł sposób na wyznaczenie wielomianu Alexandra dla dowolnego spłotu przy użyciu tak zwanej relacji kłębiaste¹. Jest to równanie wiążące wielomian spłotu z wielomianami spłotów o zmienionym jednym skrzyżowaniu w diagramie spłotu wyjściowego. Relacja kłębiasta okazała się kluczem do sukcesu.

Vaughan Jones, matematyk nowozelandzki, odkrył w 1984 nowy wielomian dla spłotów jako produkt uboczny podczas pracy nad algebrami operatorowymi. Odkrycie Jonesa było przełomowe, a już cztery miesiące później ogłoszono znalezienie nowego niezmiennika: wielomianu HOMFLY, którego nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk odkrywców, to jest: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, Yetter.

Aby lepiej zrozumieć wielomian Jonesa przyjrzymy się najpierw prostszej konstrukcji, nawiasowi Kauffmana. Później zajmiemy się węzłami alternującymi.

4.1 Nawias Kauffmana

Zacniemy od zdefiniowania nawiasu Kauffmana. Przypomnijmy, wielomian Laurenta zmiennej X to formalny symbol $f = a_r X^r + \dots + a_s X^s$, gdzie $r, s, a_r, \dots, a_s$ są całkowite i $r \leq s$.

Poszukujemy niezmiennika dla spłotów o kilku prostych własnościach. Przede wszystkim żądamy, by niewęzłowi przypisany był wielomian 1: $\langle \bigcirc \rangle = 1$. Po drugie chcemy móc wyznaczać nawiasy znając je dla prostszych spłotów, co zapiszemy symbolicznie $\langle \bigtimes \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + B \langle \bigtimes \rangle$. Zależy nam wreszcie na tym, by móc dodać do spłotu trywialną składową: $\langle L \cup \bigcirc \rangle = C \langle L \rangle$.

Prosty rachunek pokazuje wpływ drugiego ruchu Reidemeistera na nawias:

$$\langle \bigcirc \rangle = (A^2 + ABC + B^2) \langle \bigtimes \rangle + BA \langle \rangle \langle \rangle \stackrel{?}{=} \langle \rangle \langle \rangle.$$

Aby zachodziła ostatnia równość wystarczy (choć wcale nie trzeba) przyjąć $B = A^{-1}$, co wymusza na nas $C = -A^2 - A^{-2}$. W ten sposób odkryliśmy następującą definicję.

Definicja 4.1. Nawias Kauffmana $\langle D \rangle$ dla diagramu spłotu D to wielomian Laurenta zmiennej A , który jest niezmienniczy ze względu na gładkie deformacje diagramu, a przy tym spełnia trzy aksjomaty:

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2. $\langle D \cup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle$
3. $\langle \bigtimes \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \bigtimes \rangle$

¹skein relation

Tutaj $\bigcirc$ oznacza standardowy diagram dla niewęzła, $D \sqcup \bigcirc$ jest diagramem, który powstaje z D przez dodanie nieprzecinającej go krzywej zamkniętej, zaś trzy symbole $\times$, $\rangle \langle$ oraz $\times$ odnoszą się do diagramów, które są identyczne wszędzie poza małym obszarem. Diagramy $\rangle \langle$ oraz $\times$ nazywa się odpowiednio dodatnim (prawym) i ujemnym (lewym) wygładzeniem $\times$.

Lemat 4.2. Nawias Kauffmana dowolnego diagramu można wyznaczyć w skończenie wielu krokach.

Dowód. Jeżeli diagram D ma n skrzyżowań, to nieustanne stosowanie aksjomatu trzeciego pozwala na zapisanie $\langle D \rangle$ jako sumy 2^n składników, z których każdy jest po prostu zamkniętą krzywą i ma trywialny nawias ($\langle \bigcirc \rangle = 1$). Nawias sumy wyznacza się korzystając z drugiego aksjomatu. $\square$

Przedstawimy teraz wpływ ruchów Reidemeistera na nawias Kauffmana.

Lemat 4.3. Pierwszy ruch Reidemeistera zmienia nawias Kauffmana zgodnie z poniższą regułą. Pozostałe ruchy Reidemeistera nie zmieniają nawiasu.

$$\langle \text{R1} \rangle = -A^{-3} \langle \text{I} \rangle \cdot \langle \text{R1} \rangle = \langle \text{I} \rangle \langle \text{I} \rangle \cdot \langle \text{R1} \rangle = \langle \text{R1} \rangle.$$

Dowód. Pierwszy ruch Reidemeistera:

$$\langle \text{R1} \rangle \stackrel{K3}{=} A \langle \text{R1} \rangle + A^{-1} \langle \text{R1} \rangle \stackrel{K2}{=} A \langle \text{I} \rangle + A^{-1}(-A^{-2} - A^2) \langle \text{I} \rangle = -A^{-3} \langle \text{I} \rangle$$

Pierwsza równość wynika z K3, druga z K2, trzecia jest oczywista. Dla drugiego ruchu:

$$\begin{aligned} \langle \text{R2} \rangle &\stackrel{K3}{=} A \langle \text{R2} \rangle + A^{-1} \langle \text{R2} \rangle \stackrel{K1}{=} -A^{-2} \langle \text{R2} \rangle + A^{-1} \langle \text{R2} \rangle \\ &\stackrel{K3}{=} -A^{-2} \langle \text{R2} \rangle + A^{-1} A \langle \text{I} \rangle + A^{-1} A^{-1} \langle \text{R2} \rangle = \langle \text{I} \rangle \langle \text{I} \rangle \end{aligned}$$

Dla trzeciego ruchu:

$$\begin{aligned} \langle \text{R3} \rangle &\stackrel{K3}{=} A \langle \text{R3} \rangle + A^{-1} \langle \text{R3} \rangle \stackrel{R2}{=} A \langle \text{R3} \rangle + A^{-1} \langle \text{R3} \rangle \\ &\stackrel{R2}{=} A \langle \text{R3} \rangle + A^{-1} \langle \text{R3} \rangle \stackrel{K3}{=} \langle \text{R3} \rangle \end{aligned}$$

korzystaliśmy tu z własności drugiego ruchu. $\square$

Okazało się, że użycie najprostszego, I ruchu Reidemeistera, „psuje” nawias! W akcie desperacji moglibyśmy zmienić definicję, zaniechamy tego i przejdziemy do kolejnego składnika w przepisie na wielomian Jonesa.

4.2 Spin

Przypomnijmy, że znak skrzyżowania na diagramie to liczba 1 lub -1 : $\text{sign} \times = +1$, $\text{sign} \times = -1$.

Definicja 4.4. Niech D będzie diagramem zorientowanego splotu lub węzła. **Spinem** D jest $w(D) = \sum_c \text{sign } c$, gdzie sumowanie przebiega po wszystkich skrzyżowaniach.

Przykład 4.5. Spinem trójlitnika w takiej wersji jest $+3$:



Lemat 4.6. Tylko 1 ruch Reidemeistera zmienia spin: $w(\text{p}) = w(\text{l}) - 1$, pozostałe nie mają wpływu. Spin nie zależy od orientacji.

Dowód. Proste ćwiczenie. □

4.3 Wielomian Jonesa

Definicja 4.7. Wielomian Jonesa zorientowanego splotu to wielomian Laurenta $V(L) \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$ określony przez

$$V(L) = \left[(-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle \right]_{t^{1/2} = A^{-2}},$$

gdzie D to dowolny diagram dla L .

Twierdzenie 4.8. Wielomian Jonesa jest niezmiennikiem zorientowanych splotów.

Dowód. Wystarczy pokazać niezmienniczość $(-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle$ na ruchy Reidemeistera. Ale

$$(-A)^{-3w(\text{p})} \langle \text{p} \rangle = (-A)^{-3w(\text{l})+3} (-A)^{-3} \langle \text{l} \rangle = (-A)^{-3w(\text{l})} \langle \text{l} \rangle. \quad \square$$

Wielomian Jonesa jest naprawdę potężnym narzędziem. Pozwala bowiem odróżnić dowolne dwa węzły pierwsze o co najwyżej dziewięciu skrzyżowaniach.

Hipoteza 4.9. Nie istnieje nietrywialny węzeł, którego wielomian Jonesa nie odróżnia od niewęzła.

4.4 Relacja kłębiasta

Dotychczas wyznaczyliśmy wielomian Jonesa jedynie dla trywialnych splotów. Spowodowane jest to tym, że chociaż nawias Kauffmana jest przydatny przy dowodzeniu różnych własności, to zupełnie nie nadaje się do obliczeń. Dużo lepszym narzędziem jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.10 (relacja kłębiasta). Wielomian Jonesa spełnia równość $V(\bigcirc) = 1$ oraz relację

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0,$$

gdzie L_+ , L_- , L_0 to zorientowane sploty, które różnią się jedynie na małym obszarze:

Dowód. Wyrażmy wielomian Jonesa przez nawias Kauffmana i spin. Chcemy pokazać, że

$$A^4(-A)^{-3w(L_+)} \langle \text{X} \rangle - A^4(-A)^{-3w(L_-)} \langle \text{X} \rangle + (A^2 - A^{-2})(-A)^{-3w(L_0)} \langle \text{X} \rangle = 0.$$

Ale $w(L_{\pm}) = w(L_0) \pm 1$, zatem to jest równoważne z $-A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle + (A^2 - A^{-2}) \langle \text{X} \rangle = 0$. Z definicji nawiasu Kauffmana wnioskujemy, że $\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle$ i $\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle$. Pierwsze równanie przemnożmy przez A , drugie przez A^{-1} , a następnie dodajmy je do siebie. Wtedy otrzymamy $A \langle \text{X} \rangle - A^{-1} \langle \text{X} \rangle = A^2 \langle \text{X} \rangle - A^{-2} \langle \text{X} \rangle$. □

Przykład 4.11. $V(\bigcirc) = -t^{5/2} - t^{1/2}$ (splot Hopfa), $V(\text{trójlitnik}) = -t^4 + t^3 + t$ (trójlitnik).

4.5 Odwrotności, lustra i sumy

Twierdzenie 4.12. Niech L będzie zorientowanym splotem. $V(rL) = V(L)$, $V(mL)(t) = V(L)(t^{-1})$.

Wniosek 4.13. Wielomian Jonesa nie zależy od orientacji węzła (ale nie splotu!).

Dowód. Każdy węzeł ma tylko dwie orientacje, splot może mieć ich 2^n , gdzie n to liczba składowych. $\square$

Wniosek 4.14. Trójlisnik nie jest równoważny ze swoim lustrem.

Dowód. W zależności od orientacji wielomianem trójlisnika jest ... lub ... $\square$

Twierdzenie 4.15. Niech L, M będą zorientowanymi splotami, zaś J, K : zorientowanymi węzłami.

$$1. V(L \sqcup M) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})V(L)V(M),$$

$$2. V(J \# K) = V(J)V(K).$$

Dowód. Wybierzmy diagramy D, E dla (odpowiednio) L, M . Po podstawieniu $t^{1/2} = A^{-2}$ widzimy, że chcemy pokazać $(-A)^{-3w(D \sqcup E)} \langle D \sqcup E \rangle = (-A^2 - A^{-2})(-A)^{-3(w(D) + w(E))} \langle D \rangle \langle E \rangle$.

Oczywiście $w(D \sqcup E) = w(D) + w(E)$, więc wystarczy udowodnić, że

$$\langle D \sqcup E \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle \langle E \rangle.$$

Oznaczmy przez $f_1(D)$, $f_2(D)$ lewą i prawą stronę ostatniego równania. Są to wielomiany Laurenta, które zależą tylko od D . Aksjomaty Kauffmana pozwalają na pokazanie, że obie funkcje mają następujące własności: $f_1(\bigcirc) = (-A^2 - A^{-2}) \langle E \rangle$, $f_1(D \sqcup \bigcirc) = (-A^2 - A^{-2}) f_1(D)$, $f_1(\times) = A f_1(\searrow) + A^{-1} f_1(\swarrow)$. To pozwala na wyznaczenie ich wartości dla dowolnego D , zatem $f_1 \equiv f_2$, co kończy dowód. $\square$

Dowód. Narysujmy J, K jako $\boxed{J} \rightarrow \boxed{K}$. Rozpatrzmy sploty $\boxed{J} \times \boxed{K}$, $\boxed{J} \searrow \boxed{K}$, $\boxed{J} \swarrow \boxed{K}$. Relacja kłębiasta może zostać użyta do pokazania, że

$$t^{-1}V(J \# K) - tV(J \# K) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(J \sqcup K) = 0.$$

Ale $V(J \sqcup K) = (-t^{1/2} - t^{-1/2})V(J)V(K)$, co upraszcza się do $V(J \# K) = V(J)V(K)$ i kończy dowód. $\square$

4.6 Rozpiętość i wielomian Jonesa

Twierdzenie 4.16. Niech L posiada zredukowany, spójny, alternujący diagram o n skrzyżowaniach. Wtedy każdy diagram ma co najmniej n skrzyżowań.

To bardzo ważny rezultat, którego prawdziwość przypuszczał już P. G. Tait w XIX wieku. Nikt nie był w stanie podać dowodu przed pojawieniem się wielomianu Jonesa w latach osiemdziesiątych. Wyjaśnimy teraz użyte tu przymiotniki.

Definicja 4.17. Diagram jest alternujący, gdy podczas poruszania się wzdłuż splotu mijamy skrzyżowania na zmianę z góry oraz z dołu. Diagram jest zredukowany, gdy nie zawiera usuwalnych skrzyżowań. Diagram jest spójny, gdy nie można go podzielić na dwie niepuste części, które nie spotykają się na żadnym skrzyżowaniu.



Przykładowo diagram $\bigcirc \bigcirc$ nie jest spójny, ale $\bigcirc \bigcirc$ już tak.

W dowodzie przywołanego wyżej twierdzenia użyjemy rozpiętości wielomianu Jonesa.

Definicja 4.18. Niech f będzie wielomianem Laurenta zmiennej X . Wtedy $M(f)$ [$m(f)$] to najwyższa [najniższa] potęga pojawiająca się w f . Rozpiętość to $\text{span } f = M(f) - m(f)$.

Zajmiemy się teraz nawiasem Kauffmana. Znajdziemy wzór, który pozwala na wyznaczenie nawiasu dowolnego splotu o n skrzyżowaniach (na diagramie) przez dodanie 2^n wyrazów. Wzór ten okaże się użyteczny przy dowodzeniu późniejszych twierdzeń.

Definicja 4.19. Niech D będzie diagramem splotu.

1. Stan D to funkcja s ze zbioru skrzyżowań D w $\{-1, +1\}$.
2. Dla ustalonego stanu s dla D przez sD rozumiemy diagram powstały przez wygładzenie wszystkich skrzyżowań zgodnie z ich nowym znakiem (± 1), wtedy $|s|$ to suma wartości s .
3. Diagram dla sD jest sumą zamkniętych krzywych, ich liczbę oznaczamy przez $|sD|$.

Twierdzenie 4.20 (o sumowaniu stanów). Niech D będzie diagramem splotu. Wtedy

$$\langle D \rangle = \sum_s (-A^2 - A^{-2})^{|sD|-1} A^{|s|},$$

gdzie sumujemy po wszystkich stanach s dla D .

Dowód. Oznaczmy prawą stronę dowodzonej równości przez $\langle D \rangle$. Pokażemy, że spełnia ona $[\bigcirc] = 1$, $[D \sqcup \bigcirc] = (-A^{-2} - A^2)[D]$ oraz $[\text{X}] = A[\bigcirc] + A^{-1}[\text{X}]$. Stąd wynika już, że $\langle D \rangle = \langle D \rangle$.

Niewązł $\bigcirc$ ma tylko jeden stan s z $|s| = 0$ i $|s\bigcirc| = 1$.

Zauważmy, że $D \sqcup \bigcirc$ i D mają te same skrzyżowania, więc możemy utożsamiać stany s dla D ze stanami u dla $D \sqcup \bigcirc$. Wtedy $|u| = |s|$ oraz $|u(D \sqcup \bigcirc)| = |sD| + 1$. Zatem

$$[D \sqcup \bigcirc] = \sum_u (-A^2 - A^{-2})^{|u(D \sqcup \bigcirc)|-1} A^{|u|} = \sum_s (-A^2 - A^{-2})^{|sD|} A^{|s|} = (-A^2 - A^{-2})[D].$$

Pozostała trzecia własność. Z definicji $A[\bigcirc] = \sum_u (-A^2 - A^{-2})^{|u\bigcirc|-1} A^{|u|+1}$, gdzie u przebiega wszystkie stany $\bigcirc$. Ale $\bigcirc$ to X ze skrzyżowaniem (powiedzmy, c) wygładzonym dodatnio, co daje bijekcję między stanami u dla $\bigcirc$ i s dla X , dla których $s(c) = +1$. Wtedy $|s\text{X}| = |u\bigcirc|$ i $|s| = |u| + 1$ oraz

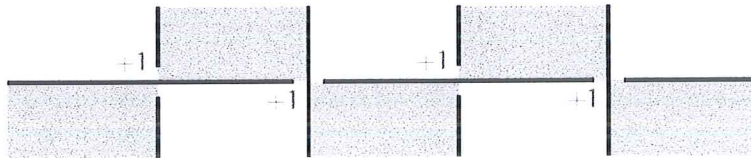
$$A[\bigcirc] = \sum_u (-A^2 - A^{-2})^{|u\bigcirc|-1} A^{|u|+1} = \sum_{s(c)=1} (-A^2 - A^{-2})^{|s\text{X}|-1} A^{|s|},$$

podobne rozumowanie pokazuje, że $A^{-1}[\text{X}] = \sum_{s(c)=-1} (-A^2 - A^{-2})^{|s\text{X}|-1} A^{|s|}$. Teraz wystarczy dodać do siebie dwa ostatnie równania. $\square$

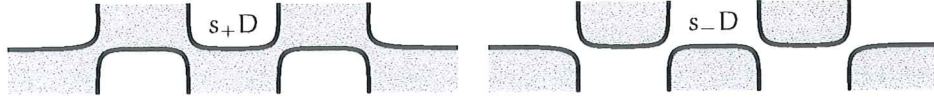
Zbadamy teraz dwa najprostsze stany dowolnego diagramu.

Definicja 4.21. Stan, który przypisuje znak $+1$ [-1] każdemu skrzyżowaniu, nazywamy s_+ [s_-].

Niech D będzie alternującym, zredukowanym diagramem spójnym. Wszystkie skrzyżowania mają ten sam znak. Wybierzmy dla niego uszachowanie.



Zamieniając białe i czarne w razie potrzeby możemy założyć, że wszystkie skrzyżowania są dodatnie (+1). Takie uszachowienie nazywamy *standardowym*. Porównajmy wyglądy s_+D z s_-D :



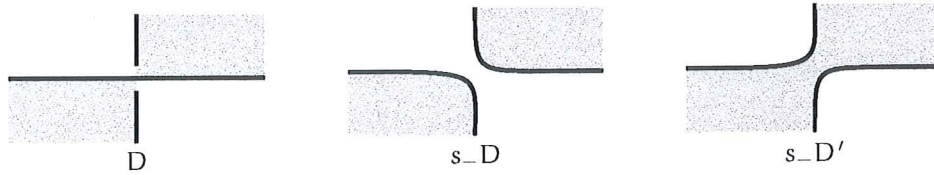
Zamknięte krzywe tworzące s_+D są brzegami białych obszarów uszachowienia, podczas gdy te tworzące s_-D stanowią brzeg czarnych obszarów. Zauważmy, że na każdym skrzyżowaniu są cztery różne czarne i białe obszary (nie mogą się spotkać w innych miejscach), gdyż diagram był zredukowany.

Lemat 4.22. Niech D będzie spójnym diagramem splotu o n skrzyżowaniach. Wtedy $|s_+D| + |s_-D| \leq n + 2$, z równością dla zredukowanego i alternującego D .

Dowód. Skorzystamy z indukcji względem n . Łatwo widzieć prawdziwość lematu dla $n = 0$. Załóżmy, że jest on prawdziwy dla wszystkich diagramów o $n - 1$ skrzyżowaniach, następnie ustalmy diagram D o n skrzyżowaniach.

Wybermy skrzyżowanie z D . Można je wygładzić na dwa sposoby, jeden z nich daje spójny diagram D' . Bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to dodatnie wygładzenie. Wtedy zachodzi $|s_+D'| = |s_+D|$, ale $|s_-D'| = |s_-D| \pm 1$, ponieważ s_-D' powstaje z s_-D przez zastąpienie pewnej części $\searrow \swarrow$ przez $\swarrow \searrow$. To rozrywa jedną krzywą na dwa kawałki lub scala dwie krzywe w jedną. Teraz $|s_+D| + |s_-D| = |s_+D'| + |s_-D'| \pm 1 \leq (n - 1) + 2 \pm 1 \leq n + 2$ (pierwsza nierówność wynika z założenia indukcyjnego).

Założmy, że D jest spójny, alternujący i zredukowany. Musimy pokazać, że ostatnie dwie nierówności tak naprawdę są równościami. Pierwsza wynika z tego, że D' jest spójny, alternujący i zredukowany. Z drugiej strony $|s_-D'| = |s_-D| - 1$, ponieważ przejście od s_-D do s_-D' skleja dwa czarne obszary. To pokazuje drugą równość i kończy dowód.



Lemat 4.23. Niech D będzie diagramem splotu o n skrzyżowaniach. Wtedy

1. $M\langle D \rangle \leq n + 2|s_+D| - 2$
2. $m\langle D \rangle \geq -n - 2|s_-D| + 2$

z równością, jeżeli D jest alternujący, zredukowany i spójny.

Dowód. Udowodnimy tylko pierwszą część, druga jest do niej podobna. Dla stanu s diagramu D niech $\langle D | s \rangle := (-A^{-2} - A^2)^{|sD|-1} A^{|s|}$. Wzór sumujący stany przybiera postać $\langle D \rangle = \sum_s \langle D | s \rangle$.

Zauważmy, że $M\langle D | s \rangle = 2|sD| + |s| - 2$, a więc w szczególności $M\langle D | s_+ \rangle = 2|s_+D| + n - 2$. Gdyby udało się nam pokazać, że $M\langle D | s \rangle \leq M\langle D | s_+ \rangle$ dla wszystkich innych stanów s , dowód nierówności byłby zakończony. Ale możemy znaleźć ciąg $s_+ = s_0, s_1, \dots, s_r = s$, w którym s_{i+1} powstaje z s_i przez pojedynczą zmianę $+1$ na -1 .

Teraz $|s_{i+1}| = |s_i| - 2$, podczas gdy $|s_{i+1}D| = |s_iD| \pm 1$, ponieważ $s_{i+1}D$ uzyskujemy z s_iD przez połączenie dwóch zamkniętych krzywych lub podział jednej zamkniętej krzywej na dwie części. Zatem

$$M\langle D | s_{i+1} \rangle = 2|s_{i+1}D| + |s_{i+1}| - 2 = (2|s_iD| + |s_i| - 2) + (\pm 2 - 2) \leq M\langle D | s_i \rangle.$$

Teraz widać już, że $M\langle D | s \rangle = M\langle D | s_+ \rangle \leq \dots \leq M\langle D | s_0 \rangle = M\langle D | s_+ \rangle$.

Pokażemy teraz, że jeśli D jest zredukowany, alternujący i spójny, to nierówność zamienia się w równość. Będzie to wynikało z $M\langle D | s \rangle < M\langle D | s_+ \rangle$ dla $s \neq s_+$, jeżeli tylko powołamy się na powyższy argument. Wystarczy ograniczyć się do tych s , które powstają z s_+ przez zmianę pojedynczego stanu $+1$ na -1 . Ale to już jest oczywiste, gdyż sD otrzymujemy przez sklejenie dwóch białych obszarów s_+D . $\square$

Możemy wreszcie zająć się rozpiętością wielomianu Jonesa.

Twierdzenie 4.24. Niech L będzie zorientowanym splotem o spójnym diagramie D z n skrzyżowaniami. Wtedy $\text{span}(V(L)) \leq n$, z równością dla zredukowanego i alternującego D .

Dowód. Pokażemy prawdziwość innego, równoważnego stwierdzenia: $\text{span}\langle D \rangle \leq 4n$ z równością dla zredukowanego i alternującego D . Dwa poprzednie lematy mówią, że

$$\begin{aligned} \text{span}\langle D \rangle &= M\langle D \rangle - m\langle D \rangle \leq (2|s_+D| + n - 2) + (2|s_-D| + n - 2) \\ &= 2(|s_+D| + |s_-D|) + 2n - 4 \leq 2(n + 2) + 2n - 4 = 4n. \end{aligned} \quad \square$$

Jesteśmy już w stanie podać dowód twierdzenia 4.16 wspomnianego na początku sekcji.

Dowód. Założenia mówią nam, że $\text{span}(V(L)) = n$. Gdyby istniał diagram o mniejszej liczbie skrzyżowań, mielibyśmy $\text{span}(V(L)) < n$, co prowadzi do sprzeczności. $\square$

Wyznaczanie wielomianu Jonesa dla splotu jest uciążliwe, jednak czasami możemy oszacować jego rozpiętość korzystając z następujących nierówności:

Wniosek 4.25. Niech L będzie zorientowanym splotem ze spójnym diagramem D o n skrzyżowaniach. Wtedy

$$\frac{3w(D) - 2|s_+D| + 2 - n}{4} \leq m(V(L) \text{ oraz } M(V(L))) \leq \frac{3w(D) + 2|s_-D| + n - 2}{4},$$

z równością dla zredukowanego i alternującego D .

Dowód. Proste ćwiczenie. $\square$

4.7 Wielomian HOMFLY

Po tym, jak Jones przedstawił światu swój wielomian w 1984 roku, matematycy zaczęli szukać jego uogólnienia zależnego nie od jednej, lecz dwóch zmiennych. Pierwszym takim niezmiennikiem węzłów okazał się wielomian (Laurenta) HOMFLY.

Definicja 4.26. Wielomian HOMFLY zorientowanego splotu to wielomian Laurenta zależny od m i l , który spełnia dwa aksjomaty: $P(\bigcirc) = 1$ oraz $lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$ (przy oznaczeniach z twierdzenia 4.10).

Pierwszym pytaniem, jakie nasuwa się przy takiej definicji, jest: czy wielomian HOMFLY można wyznaczyć w skończenie wielu krokach dla dowolnego splotu? Podczas wyznaczania nawiasu Kauffmana było to oczywiste, ponieważ z każdym krokiem liczba skrzyżowań ulegała zmniejszeniu.

Pokażemy najpierw, że w dowolnym rzucie można odwrócić pewne skrzyżowania tak, by uzyskać diagram niewęzła. Wystarczy ograniczyć się do węzłów.

Ustalmy diagram węzła i wybierzmy jakiś początkowy punkt na nim, różny od skrzyżowania wraz z kierunkiem, wzdłuż którego będziemy przemierzać węzeł. Za każdym razem, kiedy odwiedzamy nowe skrzyżowanie, zmieniamy je w razie potrzeby na takie, przez które przemierzamy się górnym łukiem. Skrzyżowań już odwiedzonych nie zmieniamy wcale. Po powrocie do punktu wybranego na początku uzyskamy diagram niewęzła.

Wyobraźmy sobie nasz węzeł w trójwymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$, przy czym oś z skierowana jest z płaszczyzny, w której leży diagram, w naszą stronę. Umieścimy początkowy punkt tak, by jego trzecią współrzędną była $z = 1$. Teraz, kiedy przemierzamy węzeł, zmniejszamy stopniowo tę współrzędną, aż osiągniemy wartość 0 tuż przed punktem, z którego wyruszyliśmy.

Połączmy oba punkty (początkowy oraz ten, w którym osiągamy współrzędną $z = 0$) pionowym odcinkiem. Zauważmy, że kiedy patrzymy na węzeł w kierunku osi z , nie widzimy żadnych skrzyżowań. Oznacza to, że dostaliśmy niewęzeł.

Twierdzenie 4.27. Wielomian HOMFLY z definicji [4.26] dla zorientowanych splotów można wyznaczyć w skończonej liczbie krokach.

Dowód. Niech L będzie węzłem (lub splotem), którego wielomian HOMFLY próbujemy wyznaczyć. Ustalmy jego dowolny diagram i wybierzmy jedno ze skrzyżowań, które należy odwrócić, by uzyskać niewęzeł. Początkowy diagram odpowiada L_+ lub L_- , relacja kłębiasta pozwala na uzyskanie wielomianu wyjściowego splotu zależnego od wielomianu splotu z diagramem, na którym jest mniej skrzyżowań oraz splotu, który jest „jedno skrzyżowanie bliżej” niewęzła. Powtarzając tę procedurę dojdziemy w pewnym momencie do samych trywialnych splotów. $\square$

Twierdzenie 4.28. Wielomian HOMFLY dla sum:

1. $P(L_1 \sqcup L_2) = -(l + l^{-1})m^{-1}P(L_1)P(L_2)$.
2. $P(L_1 \# L_2) = P(L_1)P(L_2)$.

Dowód. Dowód tego twierdzenia jest analogiczny do dowodu [4.15] $\square$

Wielomian HOMFLY jest dużo mocniejszy od wielomianów Jonesa czy Alexandra – są one jego szczególnymi przypadkami.

Twierdzenie 4.29. Dla dowolnego zorientowanego węzła zachodzą równości:

- $V(t) = P(l = it^{-1}, m = i(t^{-1/2} - t^{1/2}))$,
- $\Delta(t) = P(l = i, m = i(t^{1/2} - t^{-1/2}))$.

Zaletą wielomianu HOMFLY jest to, że często wykrywa chiralność (węzeł chiralny nie jest równoważny swemu lustrzanemu odbiciu), ale nie odróżnia enancjomerów węzłów 09-042, 10-048, 10-071, 10-091, 10-104, oraz 10-125.

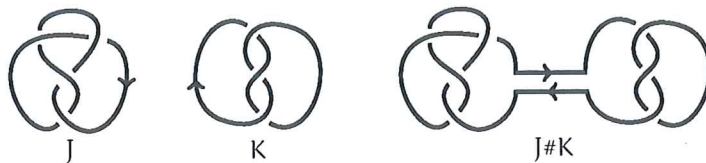
Okazuje się, że istnieje nieskończenie wiele parami różnych węzłów o tym samym wielomianie (co elementarnie pokazał Kanenobu w 1986 roku w pracy „Infinitely many knots with the same polynomial invariant”). M. B. Thistlethwaite wyznaczył wielomiany HOMFLY dla tych, które mają mniej niż 14 skrzyżowań.

4.8 Węzły pierwsze

Liczby pierwsze znane z teorii liczb mają swój odpowiednik wśród węzłów. Odpowiednik ten jest ściśle związany z operacją sumy spójnej, którą teraz zdefiniujemy.

Definicja 4.30. Niech J i K będą zorientowanymi węzłami. Aby otrzymać ich sumę spójną, rozdzielamy je płaszczyzną i wybieramy gładką ścieżkę $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ z punktu $\gamma(0)$ w J do $\gamma(1)$ w K , która nie przecina żadnego z diagramów.

Usuujemy krótkie łuki przy $\gamma(0)$ i $\gamma(1)$, po czym łączymy węzły ścieżką równoległą do γ .



Operacja sumy spójnej określona jest jedynie dla zorientowanych węzłów, ponieważ bez orientacji istnieje drugi, być może nierównoważny sposób na połączenie diagramów. Nie ma ona też sensu dla splotów, nawet zorientowanych, gdyż nie istnieje dla nich kanoniczny sposób na wybór, które składowe należałoby ze sobą połączyć.

Twierdzenie 4.31. Niech J, K będą zorientowanymi węzłami. Ich suma spójna jest dobrze określona i zależy jedynie od klas równoważności, a nie samych węzłów.

Dowód. (Szkic) Załóżmy, że mamy dane węzły J, K oraz ścieżki γ, δ , których używamy do stworzenia sumy $J\#K$. Wykonujemy następujące kroki.

1. Kurczymy K .
2. Przesuwamy K wzdłuż γ tak, by leżało blisko $\gamma(0)$.
3. Przesuwamy K wzdłuż J od $\gamma(0)$ do $\delta(0)$.
4. Odwracamy dwa pierwsze kroki z δ w miejscu γ . □

Twierdzenie 4.32. Suma spójna jest działaniem łącznym i przemennym. Niewęzeł $\bigcirc$ jest jego elementem neutralnym.

Dowód. Przedstawmy węzły I, J, K w następujący sposób:



Tworzymy sumy $I\#(-)$ przy użyciu γ , $(-)\#K$ przy użyciu δ . Wtedy $(I\#J)\#K$ oraz $I\#(J\#K)$ są dane przez



a przez to równoważne.

Do pokazania przemienności wystarczy obserwacja, że jeżeli $J\#K$ powstaje przy użyciu łuku γ , to $K\#J$ otrzymujemy biorąc odwrotność γ (ten sam łuk o przeciwnej orientacji).

Przedstawmy wreszcie K i $\bigcirc$ tak, jak po lewej stronie i stwórzmy sumę $K\#\bigcirc$ łukiem γ . Wtedy $K\#\bigcirc$ jest równoważny z prawym węzłem, a ten z samym K , co kończy dowód.



Możemy przejść do definicji węzłów pierwszych.

Definicja 4.33. *Zorientowany węzeł J jest pierwszy, jeżeli nie jest niewęzłem i nie można zapisać go jako sumę spójną dwóch nietrywialnych węzłów.*

Tabela węzłów zawiera wszystkie węzły pierwsze, przy czym lustra i odwrotności są w niej pominięte. Jest ona uporządkowana według indeksu krzyżującego: najmniejszej liczby skrzyżowań, jaką można osiągnąć na diagramie węzła. Na końcu tego dokumentu przedstawione są węzły o mniej niż ośmiu skrzyżowaniach. Atlas węzłów

- http://katlas.math.toronto.edu/wiki/The_Rolfsen_Knot_Table

podaje więcej węzłów: o mniej niż jedenastu skrzyżowaniach. Pozwala także na sprawdzenie różnych niezmienników.

W tym miejscu pojawia się pytanie, czy niewęzeł nie jest być może złożony. Gdyby tak rzeczywiście było, każdy węzeł okazałby się złożony, jako suma spójna siebie z niewęzłem. Na szczęście przy pomocy powierzchni (Seiferta) można pokazać, że niewęzeł nie powstaje z dwóch nietrywialnych węzłów przez wzięcie sumy spójnej.

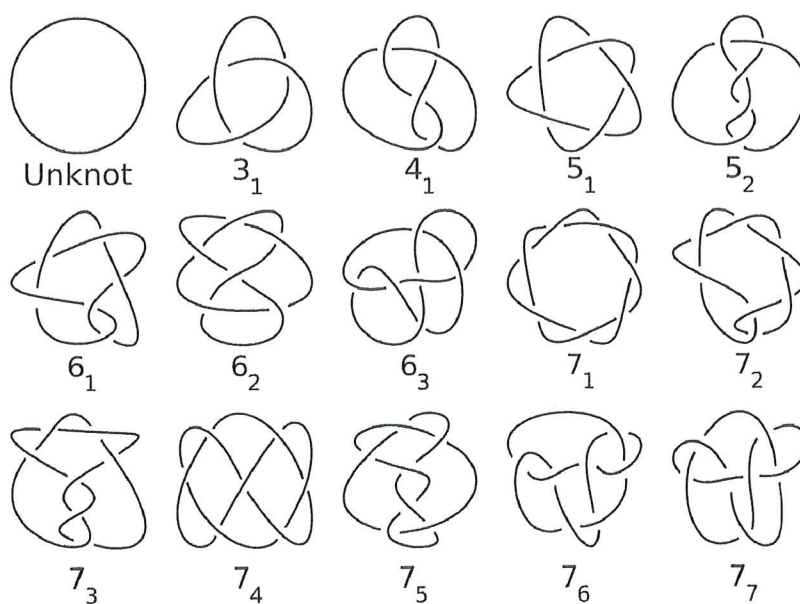
Ze względu na niedostatecznie rozwinięty aparat matematyczny nie możemy podać dowodu następującego faktu, analogonu zasadniczego twierdzenia arytmetyki.

Twierdzenie 4.34 (Schubert, 1949). *Każdy węzeł rozkłada się jednoznacznie na węzły pierwsze (z dokładnością do kolejności składników).*

Czy węzłów pierwszych jest nieskończenie wiele? Tak, potrafimy nawet oszacować ich liczbę. W roku 1987 C. Ernst wraz z D. Sumnersem w oparciu na wynikach Kauffmana, Murasugiego oraz Thistlethwaite'a dotyczących węzłów alternujących pokazali, że różnych węzłów pierwszych o n skrzyżowaniach jest co najmniej $\frac{1}{3}(2^{n-2} - 1)$ dla $n \geq 4$, przy czym węzły lustrzane traktowane są jako różne. Niedawno D. Welsh pokazał, że liczba takich węzłów jest ograniczona z góry przez funkcję wykładniczą od n .

W roku 1985 M. Scharleman rozwiązał otwarty od ponad stu lat problem wiążący pierwszość z liczbą rozsypującą² jeżeli odwrócenie dokładnie jednego skrzyżowania wystarczy do zmiany węzła w niewęzeł, to jest on pierwszy.

²unknotting number



Rysunek 1: Niewęzeł i węzły pierwsze o mniej niż 8 skrzyżowaniach.