

Uniwersytet Wrocławski

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyczny

specjalność: matematyka nauczycielska

Alicja Smolińska

Środek ciężkości figury mierzalnej

Praca magisterska

napisana pod kierunkiem

prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2013

Spis treści

Wstęp	5
 1. Środek ciężkości układu punktów z wagami.	
1.1 Średnia ważona n liczb z wagami.	7
1.2 Środek ciężkości dla n punktów z wagami.	7
1.3 Współrzędne punktu będącego środkiem ciężkości układu n punktów z wagami.	7
1.4 Twierdzenia o środku ciężkości układu punktów z wagami.	9
 2. Środek ciężkości trójkąta i jego własności.	
2.1 Środek ciężkości trójkąta.	13
2.2 Podział trójkąta na mniejsze niezachodzące na siebie trójkąty.	13
2.3 Podział czworokąta wypukłego na dwa trójkąty.	17
 3. Środek ciężkości zorientowanego trójkąta i jego własności.	
3.1 Obieg trójkąta.	18
3.2 Środek ciężkości zorientowanego trójkąta.	18
3.3 Triangulacja trójkąta.	24
3.4 Środek ciężkości trójkąta z triangulacją.	24
 4. Środek ciężkości wielokąta.	
4.1 Definicja środka ciężkości wielokąta.	27
4.2 Niezależność środka ciężkości wielokąta od triangulacji.	27
4.3 Zachowanie środka ciężkości wielokąta przy podziale go na wielokąty.	29
4.4 Położenie środka ciężkości wielokąta.	29
 5. Środek ciężkości figury mierzalnej.	
5.1 Figura mierzalna.	32
5.2 Ciąg środków ciężkości wielokątów przybliżających figurę mierzalną.	32
5.3 Definicja środka ciężkości figury mierzalnej.	40
 Bibliografia	42

Wstęp

Z pojęciem środka ciężkości spotykamy się często w życiu codziennym i rozumiemy je bardzo intuicyjnie. Formalnie pojawia się ono zazwyczaj w różnych problemach technicznych. Wiele pozycji z dziedziny fizyki podaje sposób na wyznaczenie środka ciężkości, wykorzystujący rachunek całkowy, np. *Fizyka dla inżynierów* autorstwa Jerzego Massalskiego. Ale czy umiejętność liczenia całek jest konieczna, aby wyznaczyć środek ciężkości figury? Pojęcie środka ciężkości figur nie jest na tyle trudne, żeby nie można było można opisać go ściśle metodami elementarnymi i taki właśnie jest cel tej pracy.

W pierwszym rozdziale wprowadzam własności środka ciężkości układu punktów, którym przyporządkowane zostały wagi. W dwóch kolejnych rozdziałach zajmuję się środkiem ciężkości trójkąta. Analizuję, czy dzieląc trójkąt na mniejsze trójkąty i wyznaczając środek ciężkości ze środków ciężkości małych trójkątów z wagami równymi ich polom, otrzymam zawsze ten sam punkt. Następnie omawiam, w jaki sposób wyznaczyć środek ciężkości wielokąta, co jest ostatnim krokiem przed udzieleniem odpowiedzi na pytanie: *Jak wyznaczyć środek ciężkości figury mierzalnej?*

Zaprezentowany w pracy sposób, w jaki można wyznaczyć środek ciężkości wielokątów, wykorzystuje elementarną geometrię, głównie działania na wektorach. Temat dotyczący środków ciężkości wielokątów może być więc omawiany z uczniami szkół ponadgimnazjalnych na dodatkowych zajęciach z matematyki. W ostatnim rozdziale środek ciężkości został zdefiniowany również dla figur mierzalnych. Pojawiła się w nim granica ciągu punktów, która może być dla uczniów czymś nowym, więc warto ich wcześniej zapoznać z tym pojęciem.

1. Środek ciężkości układu punktów z wagami.

Zanim przejdziemy do zdefiniowania czym jest środek ciężkości układu punktów z wagami, zapoznamy się z pojęciem średniej ważonej liczb.

1.1. Średnia ważona n liczb z wagami.

1.1.1. Definicja. Średnią ważoną liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ z odpowiadającymi im wagami $w_1, w_2, \dots, w_n$, zakładając dodatkowo, że $w_1 + w_2 + \dots + w_n \neq 0$, (dopuszczamy wagi ujemne oraz zerowe) nazywamy liczbę: $\hat{S}_w((x_1; w_1), (x_2; w_2), \dots, (x_n; w_n)) = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \dots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$.

1.2. Środek ciężkości dla n punktów z wagami.

1.2.1. Definicja. Niech $A_1, A_2, \dots, A_n$ będą punktami na płaszczyźnie, a $w_1, w_2, \dots, w_n$ niech będą odpowiadającymi im wagami niekoniecznie dodatnimi (dopuszczamy wagi ujemne i zerowe), ale takimi, że: $w_1 + w_2 + \dots + w_n \neq 0$. Środkiem ciężkości tego układu punktów z wagami nazywamy punkt S spełniający równanie wektorowe: $w_1 \cdot \overrightarrow{SA_1} + w_2 \cdot \overrightarrow{SA_2} + \dots + w_n \cdot \overrightarrow{SA_n} = \vec{0}$.

Punktowi S będziemy przypisywali wagę w_s , równą sumie wag punktów z układu. Symboliczny zapis środka ciężkości układu punktów wygląda zatem następująco: $(S; w_s) = \hat{S}_c((A_1; w_1), \dots, (A_n; w_n))$, $w_s = w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

1.3. Współrzędne punktu będącego środkiem ciężkości układu n punktów z wagami.

Korzystając z równania wektorowego podanego w Definicji 1.2.1 dla środka ciężkości układu punktów, wyznaczymy teraz współrzędne punktu S.

Oznaczmy współrzędne punktu S jako $S = (x_s; y_s)$, wówczas równanie z Definicji 1.2.1 przyjmuje kolejno następujące postaci:

$$\begin{aligned} w_1 \cdot [x_1 - x_s; y_1 - y_s] + w_2 \cdot [x_2 - x_s; y_2 - y_s] + \dots + w_n \cdot [x_n - x_s; y_n - y_s] &= \vec{0}, \\ [w_1 \cdot x_1 - w_1 \cdot x_s; w_1 \cdot y_1 - w_1 \cdot x_s] + [w_2 \cdot x_2 - w_2 \cdot x_s; w_2 \cdot y_s - w_2 \cdot y_s] + \\ + \dots + [w_n \cdot x_n - w_n \cdot x_s; w_n \cdot y_n - w_n \cdot x_s] &= \vec{0}, \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_n \cdot x_n - x_s \cdot (w_1 + w_2 + \dots + w_n) \\ w_1 \cdot y_1 + w_2 \cdot y_2 + \dots + w_n \cdot y_n - y_s \cdot (w_1 + w_2 + \dots + w_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_n \cdot x_n = x_s \cdot (w_1 + w_2 + \dots + w_n),$$

$$w_1 \cdot y_1 + w_2 \cdot y_2 + \dots + w_n \cdot y_n = y_s \cdot (w_1 + w_2 + \dots + w_n),$$

Dzieląc obie strony powyższych równości otrzymamy współrzędne punktu

$$S=(x_s; y_s)$$

$$x_s = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}, \quad y_s = \frac{w_1 \cdot y_1 + w_2 \cdot y_2 + \dots + w_n \cdot y_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

Z przeprowadzonych obliczeń otrzymujemy poniższe wnioski.

1.3.1. Wniosek. *W dowolnym układzie kartezjańskim współrzędne środka ciężkości układu punktów z wagami są średnimi ważonymi odpowiednich współrzędnych wyjściowych punktów, z takimi samymi wagami.*

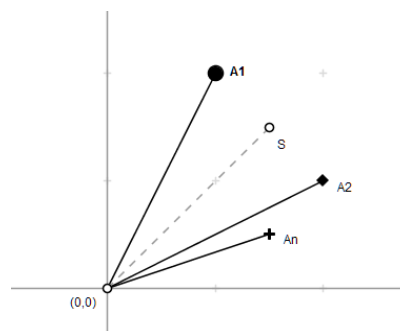
1.3.2. Wniosek. *Jeżeli $w_1 + w_2 + \dots + w_n \neq 0$ to środek ciężkości (S, w_s) układu punktów $A_1, A_2, \dots, A_n$ z wagami $w_1, w_2, \dots, w_n$ istnieje i jest jednoznacznie wyznaczony.*

1.3.3. Wektor wodzący środka ciężkości.

Niech $O = (0; 0)$ będzie początkiem układu współrzędnych i niech S będzie środkiem ciężkości układu punktów z wagami $(A_1; w_1), (A_2; w_2), \dots, (A_n; w_n)$.

Dla $k=1,2,\dots,n$ mamy zależność $\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA_k} = \overrightarrow{OA_k}$, skąd otrzymujemy równość: $\overrightarrow{SA_k} = \overrightarrow{OA_k} - \overrightarrow{OS}$. (*)

Korzystając z Definicji 1.2.1 i równości (*) otrzymujemy poniższy ciąg równości dla wektorów wodzących $\overrightarrow{OA_k}$ uśrednianych punktów oraz dla wektora wodzącego $\overrightarrow{OS}$ ich środka ciężkości.



$$\begin{aligned} w_1 \cdot \overrightarrow{SA_1} + w_2 \cdot \overrightarrow{SA_2} + \dots + w_n \cdot \overrightarrow{SA_n} &= \vec{0} \\ w_1 \cdot [\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OS}] + w_2 \cdot [\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OS}] + \dots + w_n \cdot [\overrightarrow{OA_n} - \overrightarrow{OS}] &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$w_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + w_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \dots + w_n \cdot \overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OS} \cdot (w_1 + w_2 + \dots + w_n)$$

Wektor wodzący punktu będącego środkiem ciężkości danego układu punktów z wagami przyjmuje postać:

$$\overrightarrow{OS} = \frac{w_1 \cdot \overrightarrow{OA_1} + w_2 \cdot \overrightarrow{OA_2} + \dots + w_n \cdot \overrightarrow{OA_n}}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}. \quad (1.3.3)$$

1.4. Twierdzenia o środku ciężkości układu punktów z wagami.

1.4.1. Twierdzenie. Środek ciężkości układu punktów $(A_1; w_1), \dots, (A_n; w_n)$, w którym punkt A_i ma wagę $w_i = 0$ jest równy środkowi ciężkości układu punktów: $(A_1; w_1), (A_2; w_2), \dots, (A_{i-1}; w_{i-1}), (A_{i+1}; w_{i+1}), \dots, (A_n; w_n)$.

Dowód: Wprowadźmy oznaczenia:

$$(S; w_s) = \dot{S}_c((A_1; w_1), \dots, (A_{i-1}; w_{i-1}), (A_i; w_i), (A_{i+1}; w_{i+1}), \dots, (A_n; w_n)),$$

$$(S_1; w_{s_1}) = \dot{S}_c((A_1; w_1), \dots, (A_{i-1}; w_{i-1}), (A_{i+1}; w_{i+1}), \dots, (A_n; w_n)).$$

Na podstawie 1.3 współrzędne środka ciężkości całego układu punktów przedstawiają się następująco:

$$S = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_{i-1} \cdot x_{i-1} + 0 \cdot x_i + w_{i+1} \cdot x_{i+1} + \dots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_{i-1} + 0 + w_{i+1} + w_n} \\ \frac{w_1 \cdot y_1 + w_2 \cdot y_2 + \dots + w_{i-1} \cdot y_{i-1} + 0 \cdot y_i + w_{i+1} \cdot y_{i+1} + \dots + w_n \cdot y_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_{i-1} + 0 + w_{i+1} + w_n} \end{pmatrix}$$

oraz $w_s = w_1 + w_2 + \dots + w_{i-1} + 0 + w_{i+1} + \dots + w_n$. Z kolei współrzędne środka ciężkości wyjściowego układu punktów z pominięciem punktu A_i korzystając z 1.3 możemy zapisać jako:

$$S_1 = \begin{pmatrix} x_{s_1} \\ y_{s_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_{i-1} \cdot x_{i-1} + w_{i+1} \cdot x_{i+1} + \dots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_{i-1} + w_{i+1} + w_n} \\ \frac{w_1 \cdot y_1 + w_2 \cdot y_2 + \dots + w_{i-1} \cdot y_{i-1} + w_{i+1} \cdot y_{i+1} + \dots + w_n \cdot y_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_{i-1} + w_{i+1} + w_n} \end{pmatrix}$$

oraz $w_{s_1} = w_1 + w_2 + \dots + w_{i-1} + w_{i+1} + \dots + w_n$. Zatem $(S; w_s) = (S_1; w_{s_1})$.

$$\begin{aligned}
&= w_1 \cdot (\overrightarrow{SS_1} + \overrightarrow{S_1A_1}) + w_2 \cdot (\overrightarrow{SS_1} + \overrightarrow{S_1A_2}) + \dots + w_k \cdot (\overrightarrow{SS_1} + \overrightarrow{S_1A_k}) + \dots + \\
&\quad + w_{k+1} \cdot \overrightarrow{SA_{k+1}} + \dots + w_n \cdot \overrightarrow{SA_n} = \\
&= w_1 \cdot \overrightarrow{SA_1} + w_2 \cdot \overrightarrow{SA_2} + \dots + w_k \cdot \overrightarrow{SA_k} + w_{k+1} \cdot \overrightarrow{SA_{k+1}} + \dots + w_n \cdot \overrightarrow{SA_n} = \\
&= / \text{korzystając z (*)} / = \vec{0}, \\
&\text{co kończy dowód.}
\end{aligned}$$

1.4.4. Twierdzenie. Twierdzenie 1.4.3 zachodzi także dla podziału danego układu punktów na g podzbiorów.

Dowód: Niech $(S; w_s) = \acute{S}_c((A_1; w_1), (A_2; w_2), \dots, (A_n; w_n))$ będzie środkiem ciężkości dowolnego układu punktów z wagami. Korzystając z Definicji 1.2.1 zachodzi równość: $w_1 \cdot \overrightarrow{SA_1} + w_2 \cdot \overrightarrow{SA_2} + \dots + w_n \cdot \overrightarrow{SA_n} = \vec{0}$. (■)

Rozważmy podział na g podzbiorów i odpowiednie środki ciężkości:

$$\begin{aligned}
(S_1; \mu_1) &= \acute{S}_c((A_1; w_1), \dots, (A_{k_1}; w_{k_1})); & (\mu_1 &= w_1 + \dots + w_{k_1} \neq 0), \\
(S_2; \mu_2) &= \acute{S}_c((A_{k_1+1}; w_{k_1+1}), \dots, (A_{k_2}; w_{k_2})); & (\mu_2 &= w_{k_1+1} + \dots + w_{k_2} \neq 0), \\
(S_3; \mu_3) &= \acute{S}_c((A_{k_2+1}; w_{k_2+1}), \dots, (A_{k_3}; w_{k_3})); & (\mu_3 &= w_{k_2+1} + \dots + w_{k_3} \neq 0), \\
&\dots \\
(S_g; \mu_g) &= \acute{S}_c((A_{k_{g-1}+1}; w_{k_{g-1}+1}), \dots, (A_{k_g}; w_{k_g})); & (\mu_g &= w_{k_{g-1}+1} + \dots + w_{k_g} \neq 0), \\
&&& A_{k_g} = A_n
\end{aligned}$$

$(S_1; \mu_1), (S_2; \mu_2), \dots, (S_g; \mu_g)$ są środkami ciężkości odpowiednich grup, zatem na podstawie Definicji 1.2.1 zachodzą równości:

$$w_1 \cdot \overrightarrow{S_1A_1} + \dots + w_{k_1} \cdot \overrightarrow{S_1A_{k_1}} = \vec{0} \quad (1)$$

$$w_{k_1+1} \cdot \overrightarrow{S_2A_{k_1+1}} + \dots + w_{k_2} \cdot \overrightarrow{S_2A_{k_2}} = \vec{0} \quad (2)$$

$$w_{k_2+1} \cdot \overrightarrow{S_3A_{k_2+1}} + \dots + w_{k_3} \cdot \overrightarrow{S_3A_{k_3}} = \vec{0} \quad (3)$$

...

$$w_{k_{g-1}} \cdot \overrightarrow{S_gA_{k_{g-1}}} + \dots + w_{k_g} \cdot \overrightarrow{S_gA_{k_g}} = \vec{0} \quad (g)$$

Należy pokazać, że $\mu_1 \cdot \overrightarrow{SS_1} + \mu_2 \cdot \overrightarrow{SS_2} + \dots + \mu_g \cdot \overrightarrow{SS_g} = \vec{0}$

Korzystając z równości (1)-(g) otrzymujemy następujący ciąg równości:

$$\begin{aligned}
& \mu_1 \cdot \overrightarrow{SS_1} + \mu_2 \cdot \overrightarrow{SS_2} + \dots + \mu_g \cdot \overrightarrow{SS_g} = \\
& = \left(w_1 + \dots + w_{k_1} \right) \overrightarrow{SS_1} + \left(w_{k_1+1} + \dots + w_{k_2} \right) \overrightarrow{SS_2} + \dots + \left(w_{k_{g-1}+1} + \dots + w_{k_g} \right) \overrightarrow{SS_g} + \\
& \quad \text{(wektor zerowy z (1))} \quad \text{(wektor zerowy z (2))} \\
& + \left(w_1 \cdot \overrightarrow{S_1 A_1} + \dots + w_{k_1} \cdot \overrightarrow{S_1 A_{k_1}} \right) + \left(w_{k_1+1} \cdot \overrightarrow{S_2 A_{k_1+1}} + \dots + w_{k_2} \cdot \overrightarrow{S_2 A_{k_2}} \right) + \dots + \\
& \quad \text{(wektor zerowy z (4))} \\
& + \left(w_{k_{g-1}+1} \cdot \overrightarrow{S_g A_{k_{g-1}+1}} + \dots + w_{k_g} \cdot \overrightarrow{S_g A_{k_g}} \right) = \\
& = \left(w_1 \cdot \overrightarrow{SS_1} + \dots + w_{k_1} \cdot \overrightarrow{SS_1} \right) + \left(w_{k_1+1} \cdot \overrightarrow{SS_2} + \dots + w_{k_2} \cdot \overrightarrow{SS_2} \right) + \\
& + \left(w_{k_{g-1}+1} \cdot \overrightarrow{SS_g} + \dots + w_{k_g} \cdot \overrightarrow{SS_g} \right) + \left(w_1 \cdot \overrightarrow{S_1 A_1} + \dots + w_{k_1} \cdot \overrightarrow{S_1 A_{k_1}} \right) + \\
& + \left(w_{k_1+1} \cdot \overrightarrow{S_2 A_{k_1+1}} + \dots + w_{k_2} \cdot \overrightarrow{S_2 A_{k_2}} \right) + \dots + \left(w_{k_{g-1}+1} \cdot \overrightarrow{S_g A_{k_{g-1}+1}} + \dots + w_{k_g} \cdot \overrightarrow{S_g A_{k_g}} \right) = \\
& = w_1 \cdot \left(\overrightarrow{SS_1} + \overrightarrow{S_1 A_1} \right) + \dots + w_{k_1} \cdot \left(\overrightarrow{SS_1} + \overrightarrow{S_1 A_{k_1}} \right) + w_{k_1+1} \cdot \left(\overrightarrow{SS_2} + \overrightarrow{S_2 A_{k_1+1}} \right) + \dots + \\
& + \left(w_{k_2} \cdot \overrightarrow{SS_2} + w_{k_2} \cdot \overrightarrow{S_2 A_{k_2}} \right) + \dots + \left(w_{k_{g-1}+1} \cdot \overrightarrow{SS_g} + w_{k_{g-1}+1} \cdot \overrightarrow{S_g A_{k_{g-1}+1}} \right) + \dots + \\
& + \left(w_{k_g} \cdot \overrightarrow{SS_g} + w_{k_g} \cdot \overrightarrow{S_g A_{k_g}} \right) = \\
& = w_1 \cdot \overrightarrow{SA_1} + \dots + w_{k_1} \cdot \overrightarrow{SA_{k_1}} + w_{k_1+1} \cdot \overrightarrow{SA_{k_1+1}} + \dots + w_{k_2} \cdot \overrightarrow{SA_{k_2}} + \dots + \\
& + w_{k_{g-1}+1} \cdot \overrightarrow{SA_{k_{g-1}+1}} + \dots + w_{k_g} \cdot \overrightarrow{SA_{k_g}} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Ostatnia równość to po prostu równość (■).

2. Środek ciężkości trójkąta i jego własności.

2.1. Środek ciężkości trójkąta.

Trójkąt wyznaczony jest przez trzy punkty, będące jego wierzchołkami. Punktom tym przypisujemy równe wagi.

2.1.1. Definicja. Środkiem ciężkości trójkąta nazywamy punkt, którego współrzędne są średnimi ważonymi odpowiednich współrzędnych wierzchołków z takimi samymi wagami.

Wprowadźmy oznaczenia:

A, B, C - punkty będące wierzchołkami trójkąta, którym odpowiada ta sama waga $w \neq 0$.

Współrzędne wierzchołków trójkąta ABC wynoszą odpowiednio: $A = (x_a; y_a); B = (x_b; y_b); C = (x_c; y_c)$.

Wówczas współrzędne punktu S będącego środkiem ciężkości trójkąta ABC wynoszą:

$$\begin{aligned} S &= (x_s; y_s) = \\ &= \left(\hat{S}_w((x_a; w), (x_b; w), (x_c; w)); \hat{S}_w((y_a; w), (y_b; w), (y_c; w)) \right) = \\ &= \text{/korzystając z Definicji 1.1.1/} = \left(\frac{x_a \cdot w + x_b \cdot w + x_c \cdot w}{w + w + w}; \frac{y_a \cdot w + y_b \cdot w + y_c \cdot w}{w + w + w} \right) = \\ &= \left(\frac{w(x_a + x_b + x_c)}{3w}; \frac{w(y_a + y_b + y_c)}{3w} \right) = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}; \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right). \end{aligned}$$

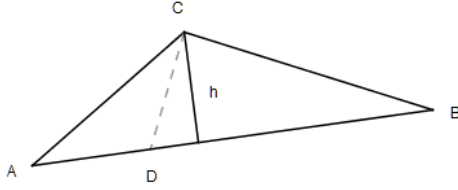
2.1.2. Wniosek. Możemy powiedzieć, że współrzędne punktu, który jest środkiem ciężkości trójkąta są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych jego wierzchołków.

2.2. Podział trójkąta na mniejsze niezachodzące na siebie trójkąty.

Dla dowolnego trójkąta XYZ oznaczmy przez S_{XYZ} punkt będący jego środkiem ciężkości, zaś przez P_{XYZ} pole tego trójkąta.

2.2.1. Lemat. Przy podziale trójkąta ABC na dwa mniejsze trójkąty przy pomocy punktu D znajdującego się na boku AB trójkąta (rys.) zachodzi równość:

$$(S_{ABC}; P_{ABC}) = \dot{S}_c((S_{ADC}; P_{ADC}), (S_{DBC}; P_{DBC}))$$



Dowód: Trójkąt ABC możemy umieścić w układzie współrzędnych tak, aby bok AB znajdował się na dodatniej półosi OX . Wtedy drugie współrzędne wierzchołków A, D, B są równe zero, zatem możemy zapisać, że:

$$S_{ABC} = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right) = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{0 + 0 + y_c}{3} \right) = \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_c}{3} \right).$$

Niech $(S, w) = \dot{S}_c((S_{ADC}; P_{ADC}), (S_{DBC}; P_{DBC}))$. Korzystając z 1.3.3 wektor wiodący punktu będącego środkiem ciężkości dla tych dwóch trójkątów jest równy: $\overrightarrow{OS} = \frac{P_{ADC} \cdot \overrightarrow{OS_{ADC}} + P_{DBC} \cdot \overrightarrow{OS_{DBC}}}{P_{ADC} + P_{DBC}}$. (2.2.1)

Pole trójkąta ADC po umieszczeniu trójkąta w układzie współrzędnych tak, jak przyjęliśmy powyżej zapiszemy jako: $P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot (x_d - x_a) \cdot h$. Analogicznie $P_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot (x_b - x_d) \cdot h$, $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (x_b - x_a) \cdot h$, gdzie h jest wysokością opuszczoną na bok AB . Wstawiając te wielkości do wzoru 2.2.1 otrzymujemy:

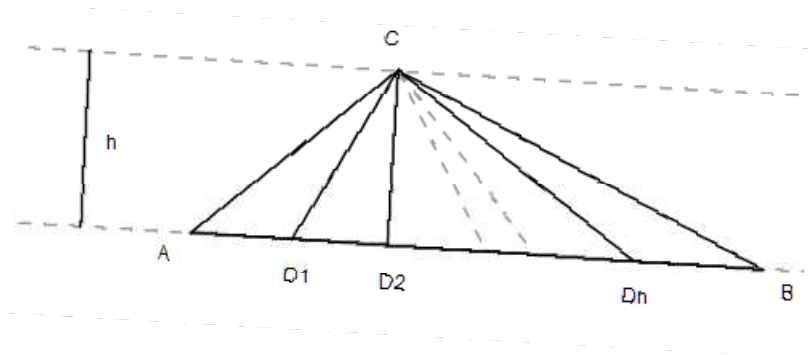
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x_d - x_a)h \cdot \left[\frac{x_a + x_d + x_c}{3}, \frac{y_a + y_d + y_c}{3} \right] + \frac{1}{2}(x_b - x_d)h \cdot \left[\frac{x_d + x_b + x_c}{3}, \frac{y_d + y_b + y_c}{3} \right]}{\frac{1}{2} \cdot (x_d - x_a)h + \frac{1}{2} \cdot (x_b - x_d)h} = \\ &= \frac{\left[\frac{x_a x_d + x_d^2 + x_d x_c - x_a^2 - x_a x_d - x_a x_c}{3}, \frac{x_d y_a + x_d y_d + x_d y_c - x_a y_a - x_a y_d - x_a y_c}{3} \right]}{(x_b - x_a)} + \\ &+ \frac{\left[\frac{x_b x_d + x_b^2 + x_b x_c - x_d^2 - x_d x_b - x_d x_c}{3}, \frac{x_b y_d + x_b y_b + x_b y_c - x_d y_d - x_d y_b - x_d y_c}{3} \right]}{(x_b - x_a)} = \\ &= \left[\frac{-x_a^2 - x_a x_c + x_b^2 + x_b x_c}{3 \cdot (x_b - x_a)}, \frac{x_d y_a - x_a y_a - x_a y_d - x_a y_c + x_b y_d + x_b y_b + x_b y_c - x_d y_b}{3 \cdot (x_b - x_a)} \right] = \\ &= / \text{Korzystając z umieszczenia boku } AB \text{ na dodatniej półosi } OX \ y_a=0, y_b=0, y_d=0 \ / = \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{(x_b - x_a) \cdot (x_b + x_a) + x_c \cdot (x_b - x_a)}{3 \cdot (x_b - x_a)}; \frac{y_c \cdot (x_b - x_a)}{3 \cdot (x_b - x_a)} \right] = \left[\frac{x_a + x_b + x_c}{3}; \frac{y_c}{3} \right]$$

Stąd wynika, że (S, w) jest środkiem ciężkości ΔABC , co kończy dowód Lematu 2.2.1.

2.2.2. Lemat . Przy podziale trójkąta na $n+1$ mniejszych trójkątów przy pomocy punktów $D_1, D_2, \dots, D_n$ znajdujących się na jednym z boków trójkąta (rysunek poniżej) zachodzi równość:

$$(S_{ABC}; P_{ABC}) = \acute{S}_c \left((S_{AD_1C}; P_{AD_1C}), (S_{D_1D_2C}; P_{D_1D_2C}), \dots, (S_{D_nBC}; P_{D_nBC}) \right)$$



Dowód: Korzystając z Lematu 2.2.1. otrzymujemy kolejno równości:

$$\acute{S}_c \left((S_{AD_1C}; P_{AD_1C}), (S_{D_1D_2C}; P_{D_1D_2C}) \right) = (S_{AD_2C}; P_{AD_1C} + P_{D_1D_2C}) = (S_{AD_2C}; P_{AD_2C})$$

$$\acute{S}_c \left((S_{AD_2C}; P_{AD_2C}), (S_{D_2D_3C}; P_{D_2D_3C}) \right) = (S_{AD_3C}; P_{AD_3C})$$

...

$$\acute{S}_c \left((S_{AD_nC}; P_{AD_nC}), (S_{D_nBC}; P_{D_nBC}) \right) = (S_{ABC}; P_{ABC})$$

Dzięki powyższym równościom otrzymujemy:

$$\acute{S}_c \left((S_{AD_1C}; P_{AD_1C}), (S_{D_1D_2C}; P_{D_1D_2C}), \dots, (S_{D_nBC}; P_{D_nBC}) \right) = /korzystając z$$

Twierdzenia 1.4.3 o grupowaniu /=

$$= \acute{S}_c \left(\acute{S}_c \left((S_{AD_1C}; P_{AD_1C}), (S_{D_1D_2C}; P_{D_1D_2C}) \right), (S_{D_2D_3C}; P_{D_2D_3C}), \dots, (S_{D_nBC}; P_{D_nBC}) \right) =$$

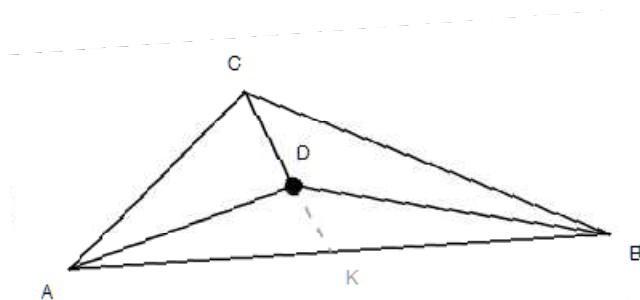
/korzystając z Lematu 2.2.1/=

$$= \acute{S}_c \left((S_{AD_2C}; P_{AD_2C}), (S_{D_2D_3C}; P_{D_2D_3C}), \dots, (S_{D_nBC}; P_{D_nBC}) \right) = \dots = (S_{ABC}; P_{ABC}),$$

co kończy dowód Lematu 2.2.2.

2.2.3. Lemat. Przy podziale trójkąta na trzy mniejsze trójkąty przy pomocy punktu D znajdującego się wewnątrz trójkąta (rys.) zachodzi równość:

$$(S_{ABC}; P_{ABC}) = \acute{S}_c((S_{ABD}; P_{ABD}), (S_{BCD}; P_{BCD}), (S_{ACD}; P_{ACD}))$$



Dowód: Z Lematu 2.2.1 dla trójkąta ABC i punktu K zachodzi równość:

$$\acute{S}_c((S_{AKC}; P_{AKC}), (S_{KBC}; P_{KBC})) = (S_{ABC}; P_{ABC}).$$

Z Lematu 2.2.1 dla trójkąta AKC i punktu D zachodzi równość:

$$\acute{S}_c((S_{AKD}; P_{AKD}), (S_{ADC}; P_{ADC})) = (S_{AKC}; P_{AKC}).$$

Z Lematu 2.2.1 dla trójkąta CBK i punktu D zachodzi równość:

$$\acute{S}_c((S_{KBD}; P_{KBD}), (S_{BDC}; P_{BDC})) = (S_{KBC}; P_{KBC}).$$

Z Lematu 2.2.1 dla trójkąta ABD i punktu K zachodzi równość:

$$\acute{S}_c((S_{AKD}; P_{AKD}), (S_{BKD}; P_{BKD})) = (S_{ABD}; P_{ABD}).$$

Wykorzystując powyższe równości otrzymujemy dalsze równości:

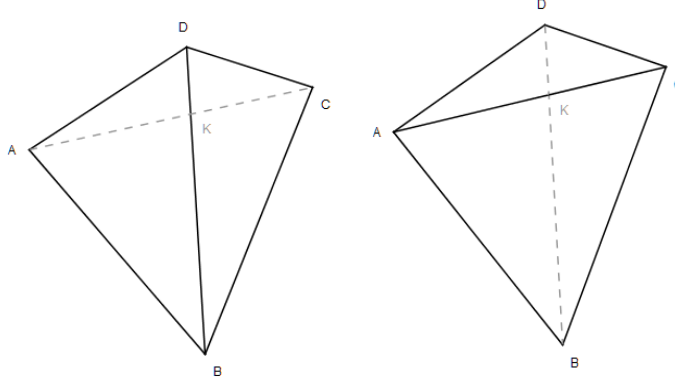
$$\begin{aligned} (S_{ABC}; P_{ABC}) &= \acute{S}_c((S_{AKC}; P_{AKC}), (S_{KBC}; P_{KBC})) = \\ &= \acute{S}_c[\acute{S}_c((S_{AKD}; P_{AKD}), (S_{ADC}; P_{ADC})), ((S_{KBD}; P_{KBD}), (S_{BDC}; P_{BDC})) \acute{S}_c] = \\ &= / \text{korzystając z Twierdzenia 1.4.4 dla dwóch grup} / = \\ &= \acute{S}_c[(S_{AKD}; P_{AKD}), (S_{ADC}; P_{ADC}), (S_{KBD}; P_{KBD}), (S_{BDC}; P_{BDC})] = \\ &= \acute{S}_c[(S_{ABD}; P_{ABD}), (S_{ADC}; P_{ADC}), (S_{BDC}; P_{BDC})], \end{aligned}$$

co kończy dowód Lematu 2.2.3.

2.3. Podział czworokąta wypukłego na dwa trójkąty.

2.3.1. Lemat. Dla dwóch podziałów wypukłego czworokąta $ABCD$ na dwa trójkąty za pomocą jednej z jego przekątnych otrzymujemy równość:

$$\acute{S}_c((S_{ACB}; P_{ACB}), (S_{ADC}; P_{ADC})) = \acute{S}_c((S_{ABD}; P_{ABD}), (S_{BDC}; P_{BDC}))$$



Dowód: Z Lematu 2.2.1 dla trójkąta ABD i punktu K zachodzi równość:

$$\acute{S}_c((S_{ABK}; P_{ABK}), (S_{AKD}; P_{AKD})) = (S_{ABD}; P_{ABD}).$$

Z Lematu 2.2.1 dla trójkąta BCD i punktu K zachodzi równość:

$$\acute{S}_c((S_{CDK}; P_{CDK}), (S_{BCK}; P_{BCK})) = (S_{BCD}; P_{BCD}).$$

Z Lematu 2.2.1 dla trójkąta ACD i punktu K zachodzi równość:

$$\acute{S}_c((S_{ADK}; P_{ADK}), (S_{CDK}; P_{CDK})) = (S_{ACD}; P_{ACD}).$$

Z Lematu 2.2.1 dla trójkąta ABC i punktu K zachodzi równość:

$$\acute{S}_c((S_{AKB}; P_{AKB}), (S_{BCK}; P_{BCK})) = (S_{ACB}; P_{ACB}).$$

Należy pokazać, że

$$\acute{S}_c((S_{ACB}; P_{ACB}), (S_{ACD}; P_{ACD})) = \acute{S}_c((S_{ABD}; P_{ABD}), (S_{BDC}; P_{BDC})).$$

Wykorzystując powyższe równości otrzymujemy dalsze równości:

$$\begin{aligned} & \acute{S}_c((S_{ACB}; P_{ACB}), (S_{ACD}; P_{ACD})) = \\ & \acute{S}_c[\acute{S}_c((S_{AKB}; P_{AKB}), (S_{BCK}; P_{BCK})), \acute{S}_c((S_{ADK}; P_{ADK}), (S_{CDK}; P_{CDK}))] = \\ & = / \text{korzystając z Twierdzenia 1.4.4 dla dwóch grup} / = \\ & = \acute{S}_c[(S_{AKB}; P_{AKB}), (S_{BCK}; P_{BCK}), (S_{ADK}; P_{ADK}), (S_{CDK}; P_{CDK})] = \\ & = \acute{S}_c[(S_{ABD}; P_{ABD}), (S_{BCK}; P_{BCK}), (S_{CDK}; P_{CDK})] = \acute{S}_c[(S_{ABD}; P_{ABD}), (S_{BCD}; P_{BCD})], \end{aligned}$$

co kończy dowód Lematu 2.3.1.

3. Środek ciężkości zorientowanego trójkąta i jego własności.

3.1. Obieg trójkąta

3.1.1. Definicja. *Obiegiem trójkąta* nazywamy kierunek ruchu po obwodzie trójkąta. W każdym trójkącie są dwa obiegi, jeden zgodny z ruchem wskazówek zegara zwany *obiegiem ujemnym*, a drugi przeciwny do ruchu wskazówek zegara, zwany *obiegiem dodatnim*.

Obieg trójkąta można opisać za pomocą uporządkowania jego wierzchołków, np. obieg ABC oznacza kierunek ruchu od wierzchołka A do B, następnie od B do C i od C do A. Ten sam obieg wyznacza uporządkowanie BCA oraz CAB. Obieg przeciwny wyznaczony jest przez uporządkowania ACB, CBA lub BAC.

3.1.2. Zorientowany trójkąt.

Trójkąt wraz z przyjętym obiegiem będzie nazywany *zorientowanym trójkątem*. Jeśli wybrany obieg będzie wyznaczony przez uporządkowanie ABC, to taki zorientowany trójkąt będziemy oznaczać przez $\Delta_z ABC$.

3.2. Środek ciężkości zorientowanego trójkąta.

3.2.1. Definicja. *Środkiem ciężkości zorientowanego trójkąta* $\acute{S}_c(\Delta_z ABC)$ nazywamy parę $((S_{ABC}), w(\Delta_z ABC))$, gdzie S_{ABC} jest zwykłym środkiem ciężkości trójkąta ABC, a $w(\Delta_z ABC)$ to waga przypisana środkowi ciężkości, która jest równa polu trójkąta, gdy ma on orientację dodatnią, bądź liczbie przeciwnej do wartości pola, gdy trójkąt ma orientację ujemną.

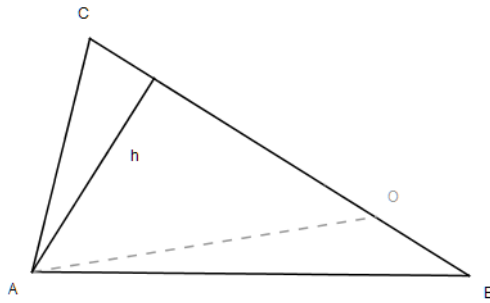
Pojęcie trójkąta zorientowanego $\Delta_z ABC$ oraz jego środka ciężkości sztucznie rozszerzamy na przypadek „trójkątów zdegenerowanych”, tzn. na przypadek gdy punkty ABC niekoniecznie są niewspółliniowe, a nawet niekoniecznie są różne. W takich przypadkach $\acute{S}_c(\Delta_z ABC)$ jest równy punktowi, którego współrzędne, to średnie arytmetyczne odpowiednich współrzędnych punktów A, B i C. Takiemu punktowi przypisujemy wagę 0.

3.2.2. Twierdzenie. Dla trójkąta ABC i dowolnego punktu O na płaszczyźnie zachodzi równość:

$$\dot{S}_c(\Delta_z ABC) = \dot{S}_c(\dot{S}_c(\Delta_z OAB); \dot{S}_c(\Delta_z OBC); \dot{S}_c(\Delta_z OCA)).$$

Dowód: Dowód twierdzenia zostanie przeprowadzony osobno dla pięciu przypadków położenia punktu O względem punktów A, B, C .

Przypadek 1. Rozważmy przypadek Twierdzenia 3.2.2, w którym punkt O leży na jednym z boków trójkąta ABC . Sytuację przedstawia rysunek.



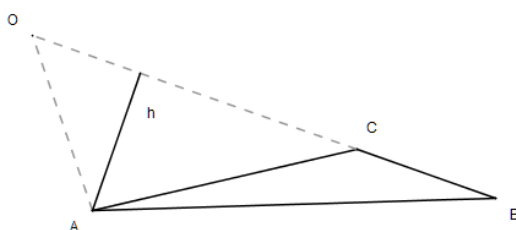
Jeżeli przyjmiemy, że trójkąt $\Delta_z ABC$ ma orientację dodatnią, to trójkąty OAB i OCA także są zorientowane dodatnio, jeżeli zaś przyjąlibyśmy, że trójkąt ABC ma orientację ujemną, to trójkąty OAB i OCA także będą zorientowane ujemnie.

Punkty O, B, C są współliniowe, trójkąt OBC jest zdegenerowany do odcinka, zatem jego środkiem ciężkości będzie punkt, któremu przypiszemy wagę $= 0$.

Na podstawie Twierdzenia 1.4.1 środek ciężkości trzech punktów, z których jeden ma wagę równą 0, możemy zastąpić środkiem ciężkości pozostałych dwóch punktów, a wtedy korzystając z Lematu 2.2.1 dla wyjściowego trójkąta ABC zorientowanego dodatnio otrzymujemy: $(S_{ABC}; P_{ABC}) = \dot{S}_c((S_{OAB}; P_{OAB}), (S_{OCA}; P_{OCA}))$, natomiast dla wyjściowego trójkąta zorientowanego ujemnie środek ciężkości układu dwóch punktów oznaczony jako (S, w) , którego waga jest równa $-P_{OAB} + (-P_{OCA})$ spełnia równanie 1.3.3

$$\overrightarrow{OS} = \frac{-P_{OAB} \cdot \overrightarrow{OS_{OAB}} - P_{OCA} \cdot \overrightarrow{OS_{OCA}}}{-P_{OAB} - P_{OCA}} = \frac{P_{OAB} \cdot \overrightarrow{OS_{OAB}} + P_{OCA} \cdot \overrightarrow{OS_{OCA}}}{P_{OAB} + P_{OCA}}$$

Przypadek 2. Rozważmy przypadek Twierdzenia 3.2.2, w którym to punkt O znajduje się poza trójkątem ABC , ale na przedłużeniu jednego z boków. Sytuację przedstawia rysunek poniżej.



Trójkąt OBC tak, jak w poprzednim lemacie, jest zdegenerowany do odcinka, zatem jego środkiem ciężkości będzie punkt, któremu przypiszemy wagę 0. Chcemy pokazać, że zachodzi poniższa równość:

a uwzględniając powyższą uwagę wystarczy pokazać, że:

$$\dot{S}_c(\Delta_z ABC) = \dot{S}_c\left(\dot{S}_c(\Delta_z OAB); \dot{S}_c(\Delta_z OCA)\right).$$

$$P_{ABC} \cdot \overrightarrow{S_{ABO} S_{ABC}} + P_{OAC} \cdot \overrightarrow{S_{ABO} S_{OAC}} = \vec{0}.$$

20

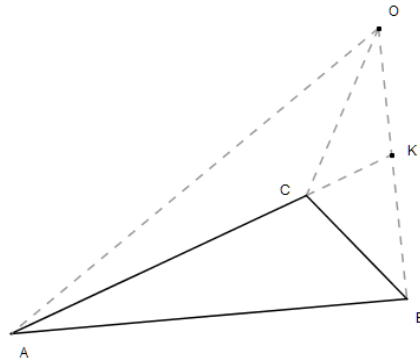
$$\begin{aligned}
(P_{OAB} - P_{OAC}) \cdot \overrightarrow{S_{ABO} S_{ABC}} + P_{OAC} \cdot \overrightarrow{S_{ABO} S_{OAC}} &= \vec{0}, \\
P_{OAB} \cdot \overrightarrow{S_{ABO} S_{ABC}} - P_{OAC} \cdot \overrightarrow{S_{ABO} S_{ABC}} + P_{OAC} \cdot \overrightarrow{S_{ABO} S_{OAC}} &= \vec{0}, \\
P_{OAB} \cdot \overrightarrow{S_{ABO} S_{ABC}} + P_{OAC} \cdot \overrightarrow{S_{ABC} S_{ABO}} + P_{OAC} \cdot \overrightarrow{S_{ABO} S_{OAC}} &= \vec{0}, \\
P_{OAB} \cdot \overrightarrow{S_{ABO} S_{ABC}} + P_{OAC} \cdot (\overrightarrow{S_{ABC} S_{ABO}} + \overrightarrow{S_{ABO} S_{OAC}}) &= \vec{0}, \\
P_{OAB} \cdot \overrightarrow{S_{ABO} S_{ABC}} + P_{OAC} \cdot \overrightarrow{S_{ABC} S_{OAC}} &= \vec{0}, \\
-P_{OAB} \cdot \overrightarrow{S_{ABC} S_{OAB}} + P_{OAC} \cdot \overrightarrow{S_{ABC} S_{OAC}} &= \vec{0}. \quad (*)
\end{aligned}$$

Ostatnią równość możemy interpretować następująco: punkt S_{ABC} jest środkiem ciężkości układu punktów $(S_{ABO}, -P_{OAB}), (S_{OAC}, P_{OAC})$. Waga punktu S_{ABC} jest równa $-P_{OAB} + P_{OCA}$, czyli liczbie przeciwnej do wartości pola trójkąta ABC, zatem pokazaliśmy, że zachodzi Przypadek 2 Twierdzenia 3.2.2 dla trójkąta ABC o obiegu ujemnym.

Po przemnożeniu równości (*) obustronnie przez (-1) otrzymujemy:

$P_{OAB} \cdot \overrightarrow{S_{ABC} S_{OAB}} - P_{OAC} \cdot \overrightarrow{S_{ABC} S_{OAC}} = \vec{0}$, co oznacza, że S_{ABC} jest środkiem ciężkości układu punktów $(S_{OAB}, P_{OAB}), (S_{OAC}, -P_{OAC})$. Waga punktu S_{ABC} jest równa $P_{OAB} - P_{OCA}$, czyli polu trójkąta ABC, zatem pokazaliśmy, że zachodzi Przypadek 2 Twierdzenia 3.2.2 dla ABC o obiegu dodatnim.

Przypadek 3. Rozważmy kolejny przypadek, w którym punkt O leży poza trójkątem ABC w taki sposób, że jeden z wierzchołków trójkąta ABC leży wewnątrz trójkąta utworzonego przez punkt O oraz pozostałe 2 wierzchołki trójkąta ABC. Takie położenie punktu O przedstawia rysunek poniżej.



Należy pokazać, że prawdziwa jest równość:

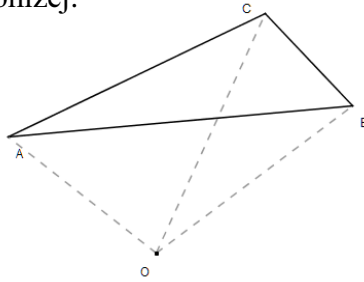
$$\acute{S}_c(\Delta_{zABC}) = \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_{zOAB}); \acute{S}_c(\Delta_{zOBC}); \acute{S}_c(\Delta_{zOCA})).$$

Lewą stronę równości możemy przedstawić jako:

$$\begin{aligned}
 \acute{S}_c(\Delta_{zABC}) &= \text{/korzystając z Przypadku 2 dla trójkąta } ABC \text{ i punktu } A'/ = \\
 &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_{zABA'}), \acute{S}_c(\Delta_{zBCA'})) = \text{/korzystając z Przypadku 2 dla trójkąta } \\
 &BCA' \text{ i punktu } O/ = \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_{zABA'}), \acute{S}_c(\Delta_{zBCO}), \acute{S}_c(\Delta_{zCA'O})) = \\
 &= \text{/korzystając z Przypadku 2 dla trójkąta } CA'O \text{ i punktu } A/ = \\
 &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_{zABA'}), \acute{S}_c(\Delta_{zBCO}), \acute{S}_c(\Delta_{zAA'O}), \acute{S}_c(\Delta_{zOCA})) = \text{/korzystając z} \\
 &\text{Twierdzenia 1.4.4 o grupowaniu i z Przypadku 1 dla trójkątów } ABA' \text{ i } AA'O/ = \\
 &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_{zABO}), \acute{S}_c(\Delta_{zBCO}), \acute{S}_c(\Delta_{zOCA})) = \\
 &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_{zOAB}), \acute{S}_c(\Delta_{zOBC}), \acute{S}_c(\Delta_{zOCA})),
 \end{aligned}$$

co jest prawą stroną oczekiwanej równości.

Przypadek 4. Punkt O leży na zewnątrz trójkąta ABC w taki sposób, że punkty O, A, B, C tworzą czworokąt wypukły. Takie położenie punktu O przedstawia rysunek poniżej.



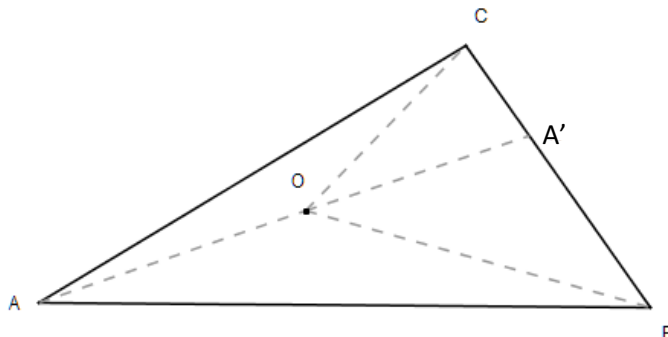
Należy pokazać, że prawdziwa jest równość:

$$\acute{S}_c(\Delta_{zABC}) = \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_{zOAB}); \acute{S}_c(\Delta_{zOBC}); \acute{S}_c(\Delta_{zOCA})).$$

Lewą stronę równości możemy przedstawić jako:

$$\begin{aligned}
 \acute{S}_c(\Delta_{zABC}) &= \text{na podstawie Przypadku 1 dla trójkąta } ABC \text{ i punktu } D/ = \\
 &\acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_{zADC}), \acute{S}_c(\Delta_{zDBC})) = \text{/na podstawie Przypadku 1 dla trójkąta } ADC \\
 &\text{i punktu } O/ = \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_{zOCA}), \acute{S}_c(\Delta_{zOAD}), \acute{S}_c(\Delta_{zDBC})) = \\
 &= \text{/na podstawie Przypadku 1 dla trójkąta } DBC \text{ i punktu } O/ = \\
 &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_{zOCA}), \acute{S}_c(\Delta_{zOAD}), \acute{S}_c(\Delta_{zOBC}), \acute{S}_c(\Delta_{zODB})) = \text{/korzystając z} \\
 &\text{Twierdzenia 1.4.4 o grupowaniu i z Przypadku 1 dla trójkątów } OAD \text{ i } ODB/ \\
 &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_{zOCA}), \acute{S}_c(\Delta_{zOAB}), \acute{S}_c(\Delta_{zOBC})), \text{ a to jest prawa strona} \\
 &\text{oczekiwanej równości.}
 \end{aligned}$$

Przypadek 5. *Pozostał jeszcze do rozpatrzenia przypadek gdy punkt O położony jest wewnątrz trójkąta.*



Tak, jak poprzednio chcemy pokazać, że:

$$\acute{S}_c(\Delta_z ABC) = \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z OAB); \acute{S}_c(\Delta_z OBC); \acute{S}_c(\Delta_z OCA)).$$

Wychodząc od lewej strony powyższej równości i korzystając z Przypadku 1 dla trójkąta ABC i punktu A' otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \acute{S}_c(\Delta_z ABC) &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z ABA'); \acute{S}_c(\Delta_z AA'C)) = / \text{korzystając z Przypadku 1} \\ &\text{dla trójkąta } ABA' \text{ i punktu } O / = \\ &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z OAB); \acute{S}_c(\Delta_z OBA'); \acute{S}_c(\Delta_z AA'C)) = / \text{korzystając z Przypadku 1} \\ &\text{dla trójkąta } AA'C \text{ i punktu } O / = \\ &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z OAB); \acute{S}_c(\Delta_z OBA'); \acute{S}_c(\Delta_z OCA); \acute{S}_c(\Delta_z OA'C)) = \\ &= / \text{korzystając z Twierdzenia 1.4.4 o grupowaniu i z Przypadku 1 dla trójkątów} \\ &\text{OBA' i OA'C} / = \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z OAB); \acute{S}_c(\Delta_z OBA'); \acute{S}_c(\Delta_z OCA); \acute{S}_c(\Delta_z OA'C)) = \\ &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z OAB); \acute{S}_c(\Delta_z OBC); \acute{S}_c(\Delta_z OCA)), \end{aligned}$$

zatem dla punktu O położonego wewnątrz trójkąta także zachodzi teza Twierdzenia 3.2.2.

Po przeanalizowaniu (w pięciu powyższych przypadkach) wszystkich możliwych położań punktu O względem trójkąta ABC, udowodniliśmy Twierdzenie 3.2.2.

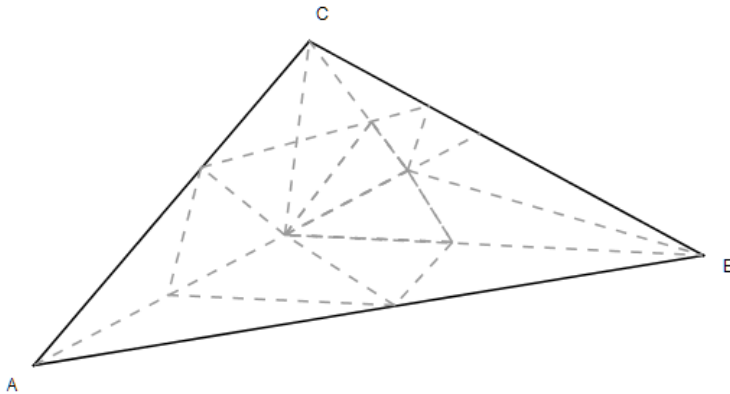
3.3. Triangulacja trójkąta.

3.3.1. Definicja. *Triangulacją trójkąta nazywamy taki podział trójkąta na mniejsze niezachodzące na siebie trójkąty, w którym gdy dwa trójkąty mają niepustą część wspólną, to jest to wierzchołek lub cały bok, będący bokiem zarówno jednego, jak i drugiego trójkąta.*

3.4. Środek ciężkości trójkąta z triangulacją.

3.4.1. Twierdzenie. *Niech dany będzie podział trójkąta T na k trójkątów $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ będący triangulacją. Wówczas środek ciężkości trójkąta T pokrywa się ze środkiem ciężkości układu środków ciężkości trójkątów podziału, z wagami równymi polom tych trójkątów.*

Dowód: W dowodzie wykorzystamy zorientowane środki ciężkości i Twierdzenie 3.2.2.



Rozważmy dodatnią orientację trójkąta ABC i założmy (bez straty ogólności), że jest ona zadana przez uporządkowanie A, B, C. Dla każdego trójkąta Δ_i z triangulacji trójkąta ABC, rozważmy jego orientację dodatnią i oznaczmy tak zorientowany trójkąt przez Δ_i^+ . Aby udowodnić Twierdzenie 3.4.1 wystarczy pokazać następującą równość dla środków ciężkości trójkątów zorientowanych: $\hat{S}_c(\Delta_z ABC) = \hat{S}_c(\hat{S}_c(\Delta_1^+); \hat{S}_c(\Delta_2^+); \dots; \hat{S}_c(\Delta_n^+))$ (■)

Wierzchołki trójkątów Δ_i oznaczamy A_i, B_i, C_i tak, aby obieg każdego z trójkątów wyznaczony przez uporządkowanie $A_i B_i C_i$ był dodatni. Na płaszczyźnie obieram dowolny punkt O. Na podstawie Twierdzenia 3.2.2 wiemy, że dla każdego trójkąta Δ_i zachodzi równość:

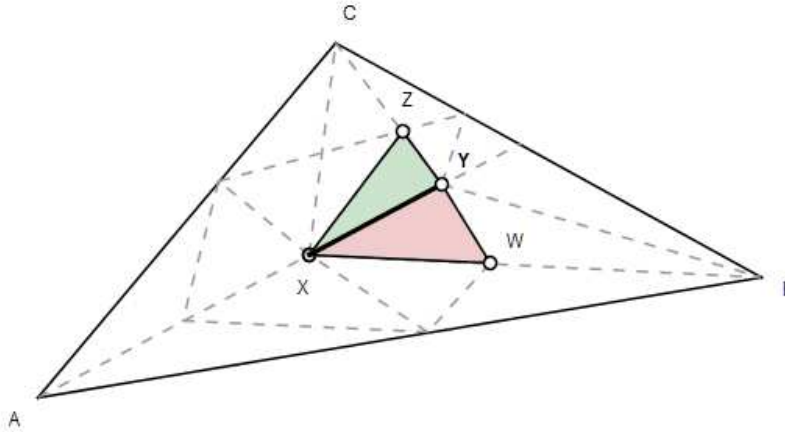
$$\acute{S}_c(\Delta_z A_i B_i C_i) = \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z O A_i B_i); \acute{S}_c(\Delta_z O B_i C_i); \acute{S}_c(\Delta_z O C_i A_i)). \quad (1)$$

Wychodząc od prawej strony równości (■) otrzymujemy poniższe równości:

$$\begin{aligned} \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_1^+); \acute{S}_c(\Delta_2^+); \dots; \acute{S}_c(\Delta_n^+)) &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z A_1 B_1 C_1); \dots; \acute{S}_c(\Delta_z A_n B_n C_n)) = \\ &= \text{/korzystając z (1)/} = \acute{S}_c\left[\acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z O A_1 B_1); \acute{S}_c(\Delta_z O B_1 C_1); \acute{S}_c(\Delta_z O C_1 A_1)); \right. \\ &\quad \left. \dots; \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z O A_n B_n); \acute{S}_c(\Delta_z O B_n C_n); \acute{S}_c(\Delta_z O C_n A_n))\right] = \\ &= \text{/korzystając z Twierdzenia 1.4.4 o grupowaniu/} = \\ &\acute{S}_c[\acute{S}_c(\Delta_z O A_1 B_1); \acute{S}_c(\Delta_z O B_1 C_1); \acute{S}_c(\Delta_z O C_1 A_1); \dots \acute{S}_c(\Delta_z O A_n B_n); \acute{S}_c(\Delta_z O B_n C_n); \acute{S}_c(\Delta_z O C_n A_n)] \end{aligned}$$

Oznaczmy przez (2) ostatnie wyrażenie w powyższym ciągu równości.

Przyjrzyjmy się teraz triangulacji trójkąta ABC, a dokładniej dwóm trójkątom podziału, które mają wspólny bok, będący wewnętrznym odcinkiem podziału trójkąta ABC. Sytuację obrazuje poniższy rysunek.



Dla dowolnie obranego punktu O na płaszczyźnie wiemy (na podstawie Twierdzenia 3.2.2.), że zachodzą równości:

$$\acute{S}_c(\Delta_z XYZ) = \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z OXY); \acute{S}_c(\Delta_z OYZ); \acute{S}_c(\Delta_z OZX)), \quad (3)$$

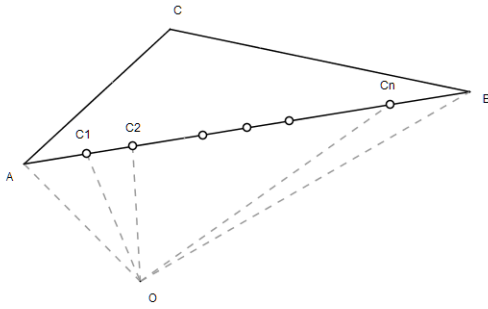
$$\acute{S}_c(\Delta_z XWY) = \acute{S}_c(\acute{S}_c(\Delta_z OXW); \acute{S}_c(\Delta_z OWY); \acute{S}_c(\Delta_z OYX)). \quad (4)$$

$\acute{S}_c(\Delta_z OXY)$ w (3) i $\acute{S}_c(\Delta_z OYX)$ w (4) to punkty o takich samych współrzędnych, ale odpowiadające im wagi są liczbami przeciwnymi (obieg jednego trójkąta jest dodatni, a drugiego ujemny).

Korzystając z powyższego rozumowania zauważamy, że środek ciężkości układu punktów oznaczony (2) można zapisać prościej, gdyż korzystając z Twierdzenia 1.4.2 możemy pominąć wszystkie pary punktów

o takich samych współrzędnych, ale przeciwnych wagach, które mają postać jak para $\acute{S}_c(\Delta_z OXY)$, $\acute{S}_c(\Delta_z OYX)$ powyżej. Po pominięciu wspomnianych punktów w (2) pozostaną jedynie punkty będące środkami ciężkości trójkątów, których dwa wierzchołki są końcami krawędzi podziału trójkąta ABC, która zawiera się w boku trójkąta ABC.

Wprowadźmy teraz nowe oznaczenia dla wierzchołków triangulacji, które znajdują się na bokach trójkąta ABC, gdyż w (2) pozostaną już tylko środki ciężkości trójkątów, których jeden z boków należy do boków trójkąta ABC. Wierzchołki leżące na boku naprzeciw wierzchołka A oznaczmy $A_1, \dots, A_n$, zgodnie z dodatnim obiegiem trójkąta ABC. Dla pozostałych boków wprowadzimy analogiczne oznaczenia wierzchołków, jak to zostało przedstawione na poniższym rysunku.



Korzystając z Twierdzeń 1.4 o grupowaniu i powyższego rozumowania wyrażenie (2) przyjmie teraz postać:

$$\begin{aligned} & \acute{S}_c \left(\acute{S}_c \left(\acute{S}_c(\Delta_z OAC_1); \dots; \acute{S}_c(\Delta_z OC_n B) \right); \acute{S}_c \left(\acute{S}_c(\Delta_z OBA_1); \dots; \acute{S}_c(\Delta_z OA_n C) \right); \right. \\ & \left. \acute{S}_c \left(\acute{S}_c(\Delta_z OCB_1); \dots; \acute{S}_c(\Delta_z OB_n A) \right) \right). \quad (5) \end{aligned}$$

Na podstawie Lematu 2.3.2 i Przypadku 1 do dowodu Twierdzenia 3.2.2 zachodzą równości:

$$\begin{aligned} \acute{S}_c(\Delta_z OAB) &= \acute{S}_c \left(\acute{S}_c(\Delta_z OAC_1); \acute{S}_c(\Delta_z OC_1 C_2); \dots; \acute{S}_c(\Delta_z OC_n B) \right), \\ \acute{S}_c(\Delta_z OBC) &= \acute{S}_c \left(\acute{S}_c(\Delta_z OBA_1); \acute{S}_c(\Delta_z OA_1 A_2); \dots; \acute{S}_c(\Delta_z OA_n C) \right), \\ \acute{S}_c(\Delta_z OCA) &= \acute{S}_c \left(\acute{S}_c(\Delta_z OCB_1); \acute{S}_c(\Delta_z OB_1 B_2); \dots; \acute{S}_c(\Delta_z OB_n A) \right). \end{aligned}$$

Zatem środek ciężkości układu punktów w (5) możemy zapisać jako

$$\begin{aligned} & \acute{S}_c \left(\acute{S}_c(\Delta_z OAB); \acute{S}_c(\Delta_z OBC); \acute{S}_c(\Delta_z OCA) \right) = /korzystając z Twierdzenia 3.2.2/= \\ & = \acute{S}_c(\Delta_z ABC), \end{aligned}$$

co kończy dowód Twierdzenia 3.4.1.

4. Środek ciężkości wielokąta

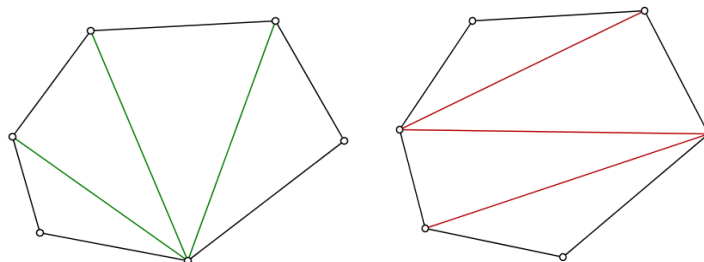
4.1. Definicja środka ciężkości wielokąta.

4.1.1. Definicja. Środkiem ciężkości wielokąta nazywamy punkt będący środkiem ciężkości układu punktów, które są środkami ciężkości trójkątów z triangulacji wielokąta, gdzie punktom tym przypisujemy wagi równe polom trójkątów podziału.

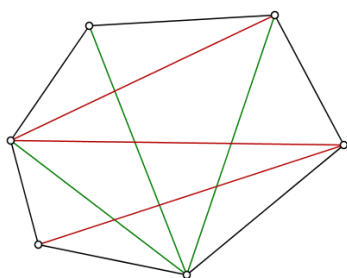
4.2. Niezależność środka ciężkości wielokąta od triangulacji.

4.2.1. Twierdzenie. Środek ciężkości wielokąta nie zależy od triangulacji.

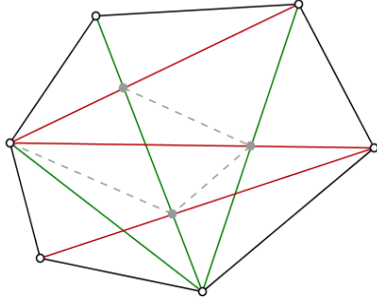
Dowód: Rozważmy dwie różne triangulacje wielokąta W . Pierwszą oznaczmy M i będzie to podział na m trójkątów: $\Delta_1^M, \Delta_2^M, \dots, \Delta_m^M$, a druga N , to podział na n trójkątów: $\Delta_1^N, \Delta_2^N, \dots, \Delta_n^N$.



Nałożmy teraz podział M na N . Otrzymaliśmy podział wyjściowego wielokąta W na wielokąty wypukłe, które nie muszą być trójkątami.



Każdy powstały w ten sposób wielokąt dzielimy na trójkąty, nie wprowadzając nowych wierzchołków, a wykorzystując te z powyższego podziału na wielokąty wypukłe. Powstały w ten sposób podział P wielokąta na trójkąty będziemy nazywali wspólnym podpodziałem. Zwróćmy uwagę, że ten wspólny podpodział też jest triangulacją.



Możemy zapisać czym jest środek ciężkości wielokąta W z uwzględnieniem odpowiednich podziałów. Środek ciężkości wielokąta W z podziałem M zapiszemy symbolicznie z wykorzystaniem Definicji 4.1.1 jako:

$$\begin{aligned} \hat{S}_c(W^M) &= \hat{S}_c(\hat{S}_c(\Delta_i^M): i = 1, \dots, m), \text{ analogicznie dla podziału } N \text{ otrzymujemy:} \\ \hat{S}_c(W^N) &= \hat{S}_c(\hat{S}_c(\Delta_j^N): j = 1, \dots, n), \text{ a dla podpodziału } P: \hat{S}_c(W^P) = \\ &= \hat{S}_c(\hat{S}_c(\Delta_k^P): k = 1, \dots, p). \end{aligned}$$

Każdy z trójkątów podziału M rozkłada się na trójkąty z podpodziału P , dlatego też możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \hat{S}_c(W^P) &= \hat{S}_c(\hat{S}_c(\Delta_k^P): k = 1, \dots, p) = \text{/korzystając z Twierdzenia 1.4.4} \\ \text{o grupowaniu /} &= \hat{S}_c(\hat{S}_c(\hat{S}_c(\Delta_k^P): \Delta_k^P \subset \Delta_i^M): i = 1, \dots, m) = \text{/korzystając} \\ \text{z Twierdzenia 3.4.1/} &= \hat{S}_c(\hat{S}_c(\Delta_i^M): i = 1, \dots, m) = \hat{S}_c(W^M) \end{aligned}$$

Podobne rozumowanie przeprowadzone dla podpodziału P i podziału N daje równość: $\hat{S}_c(W^P) = \hat{S}_c(\hat{S}_c(\Delta_k^P): k = 1, \dots, p) = \hat{S}_c(W^N)$.

Zatem środek ciężkości wielokąta z triangulacją N jest równy środkowi ciężkości układu punktów z podpodziału P wielokąta. Taka sama sytuacja zachodzi też dla triangulacji N i podpodziału P

Korzystając z przechodniości relacji równości otrzymujemy, że środek ciężkości wielokąta z triangulacją M pokrywa się ze środkiem ciężkości wielokąta z triangulacją N . Wybrane triangulacje były dowolne, więc środek ciężkości wielokąta nie zależy od jego podziału na trójkąty.

4.3. Zachowanie środka ciężkości wielokąta przy podziale go na wielokąty.

4.3.1. Twierdzenie. Środek ciężkości wielokąta W jest równy środkowi ciężkości punktów będących środkami ciężkości niezachodzących na siebie wielokątów podziału wielokąta W , z wagami równymi polom tych wielokątów.

Dowód: Niech wielokąt W będzie podzielony na niezachodzące na siebie wielokąty $W_1, W_2, \dots, W_n$. Każdy z tych wielokątów może zostać podzielony na niezachodzące trójkąty. Wielokąt W_i został podzielony (bez wprowadzania nowych wierzchołków) na k_i niezachodzących trójkątów: $\Delta_1^i, \Delta_2^i, \dots, \Delta_{k_i}^i$. Podział wielokąta W na trójkąty nazywać będziemy podziałem P i oznaczać W^P . Na podstawie Definicji 4.1.1 środek ciężkości wielokąta W jest środkiem ciężkości punktów będących środkami ciężkości trójkątów podziału, z wagami równymi ich polom.

$$\begin{aligned} \dot{S}_c(W^P) &= \\ \dot{S}_c \left(\dot{S}_c(\Delta_1^1, P_{\Delta_1^1}), \dot{S}_c(\Delta_2^1, P_{\Delta_2^1}), \dots, \dot{S}_c(\Delta_{k_1}^1, P_{\Delta_{k_1}^1}), \dots, \dot{S}_c(\Delta_1^n, P_{\Delta_1^n}), \dot{S}_c(\Delta_2^n, P_{\Delta_2^n}), \dots, \dot{S}_c(\Delta_{k_n}^n, P_{\Delta_{k_n}^n}) \right) &= \\ /korzystając z Twierdzenia 1.4.4 o grupowaniu/= \\ \dot{S}_c \left[\dot{S}_c \left(\dot{S}_c(\Delta_1^1, P_{\Delta_1^1}), \dot{S}_c(\Delta_2^1, P_{\Delta_2^1}), \dots, \dot{S}_c(\Delta_{k_1}^1, P_{\Delta_{k_1}^1}) \right), \dots, \dot{S}_c \left(\dot{S}_c(\Delta_1^n, P_{\Delta_1^n}), \dot{S}_c(\Delta_2^n, P_{\Delta_2^n}), \dots, \dot{S}_c(\Delta_{k_n}^n, P_{\Delta_{k_n}^n}) \right) \right] &= \\ =/korzystając z Definicji 4.1.1 dla trójkątów $\Delta_1^i, \Delta_2^i, \dots, \Delta_{k_i}^i$ /= \\ = \dot{S}_c \left(\dot{S}_c(W_1, P_{W_1}), \dots, \dot{S}_c(W_n, P_{W_n}) \right), \text{ co kończy dowód.} \end{aligned}$$

4.4. Położenie środka ciężkości wielokąta.

4.4.1. Twierdzenie. Jeżeli wielokąt W zawiera się w prostokącie P , to punkt będący środkiem ciężkości wielokąta W także zawiera się w prostokącie P .

Dowód: Aby udowodnić powyższe twierdzenie pokażemy najpierw następujący fakt pomocniczy.

4.4.2. Fakt Średnia ważona liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ z odpowiadającymi im dodatnimi wagami $w_1, w_2, \dots, w_n$ należy do przedziału $[\min(x_1, x_2, \dots, x_n); \max(x_1, x_2, \dots, x_n)]$.

Dowód: Załóżmy bez straty ogólności, że liczby $x_1, x_2, \dots, x_n$ są uporządkowane niemalejąco: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Wówczas ich średnia ważona na podstawie Definicji 1.1.1 wyraża się wzorem:

$$\hat{S}_w((x_1; w_1), (x_2; w_2), \dots, (x_n; w_n)) = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \dots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

Oszacujmy tą wartość od góry i od dołu.

$$\begin{aligned} \hat{S}_w((x_1; w_1), \dots, (x_n; w_n)) &= \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \dots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \leq \\ &\leq \frac{x_n \cdot w_1 + x_n \cdot w_2 + \dots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{x_n \cdot (w_1 + w_2 + \dots + w_n)}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = x_n \end{aligned}$$

Podobnie otrzymujemy oszacowanie:

$$\begin{aligned} \hat{S}_w((x_1; w_1), \dots, (x_n; w_n)) &= \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \dots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \geq \\ &\geq \frac{x_1 \cdot w_1 + x_1 \cdot w_2 + \dots + x_1 \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{x_1 \cdot (w_1 + w_2 + \dots + w_n)}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = x_1 \end{aligned}$$

Średnia ważona od dołu jest ograniczona przez najmniejszą, a od góry przez największą z danych liczb, co kończy dowód faktu pomocniczego.

Wracamy do dowodu Twierdzenia 4.4.1.

Zastanowimy się teraz nad położeniem punktu będącego środkiem ciężkości trójkąta. Na podstawie Definicji 2.1.1 współrzędne środka ciężkości $S=(x_S; y_S)$ trójkąta ABC są średnimi ważonymi odpowiednich współrzędnych wierzchołków z takimi samymi wagami. Po uwzględnieniu powyższego rozumowania wiemy, że

$$x_S \in [\min(x_A, x_B, x_C); \max(x_A, x_B, x_C)], \quad (1)$$

$$y_S \in [\min(y_A, y_B, y_C); \max(y_A, y_B, y_C)], \quad (2)$$

z czego wynika, że środek ciężkości trójkąta zawiera się w prostokącie ograniczonym prostymi pionowymi o równaniach:

$$x = \min(x_A, x_B, x_C), \quad x = \max(x_A, x_B, x_C)$$

i prostymi poziomymi o równaniach:

$$y = \min(y_A, y_B, y_C), \quad y = \max(y_A, y_B, y_C).$$

Wykorzystując Definicję 4.1.1 zbadamy teraz położenie środka ciężkości wielokąta W. Niech wielokąt W zawiera się w prostokącie P. Układ współrzędnych dobieramy tak, aby jego osie były równoległe do boków prostokąta P. Załóżmy, że w tym układzie punkty należące do prostokąta spełniają warunki: $\{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Aby wyznaczyć środek ciężkości wielokąta W dzielimy go na trójkąty $\Delta_1, \dots, \Delta_m$. Środkiem ciężkości Δ_i niech będzie punkt o współrzędnych (x_i, y_i) . Każdy z trójkątów Δ_i zawiera się w wielokącie W, czyli zawiera się też w prostokącie P. Korzystając dodatkowo z (1) i (2) dochodzimy do wniosku, że

współrzędne środków ciężkości trójkątów Δ_i spełniają następujące nierówności: $a \leq x_i \leq b$, $c \leq y_i \leq d$. Na podstawie Definicji 4.1.1, aby znaleźć środek ciężkości wielokąta W (punkt $S = (x_S, y_S)$), należy wyznaczyć średnie ważone odpowiednich współrzędnych punktów, będących środkami ciężkości trójkątów $\Delta_1, \dots, \Delta_m$. Korzystając z Faktu 4.2.2 otrzymujemy, że skoro dla każdego i współrzędna x_i należy do przedziału $[a, b]$, to ich średnia ważona, oznaczona x_S z wagami równymi polom trójkątów Δ_i , także należy do przedziału $[a, b]$. Dla drugiej współrzędnej analogicznie otrzymujemy, że y_S należy do przedziału $[c, d]$. Ostatecznie środek ciężkości wielokąta W zawiera się w prostokącie P , co kończy dowód Twierdzenia 4.4.1

5. Środek ciężkości figury mierzalnej.

Zanim przejdziemy do sposobu wyznaczania środka ciężkości figury mierzalnej, przypomnijmy najpierw definicję figury mierzalnej w sensie Jordana. Więcej informacji dotyczących miary Jordana można znaleźć w książce Lesława Szcherby *O mierze Jordana*.

5.1. Figura mierzalna.

5.1.1. Definicja. Figurę F nazywamy *figurą mierzalną*, jeżeli można znaleźć dla niej dwa ciągi wielokątów W_n i Z_n , dla których granice ciągów ich pól są równe, przy czym ciąg W_n to ciąg wielokątów przybliżających figurę F od wewnątrz, taki że $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_n \subset F$, a ciąg Z_n to ciąg wielokątów przybliżający figurę F od zewnątrz, taki że $F \subset \dots \subset Z_n \subset Z_{n-1} \subset \dots \subset Z_1$. Pole figury mierzalnej jest równe granicy ciągu pól wielokątów przybliżających figurę F od wewnątrz, nie zależy ono od wyboru ciągu wielokątów.

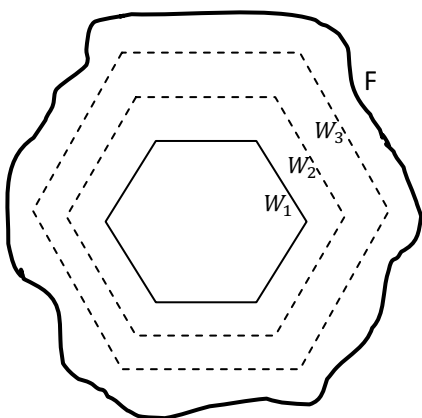
Sformułujemy teraz twierdzenie, które umożliwi precyzyjne i jednoznaczne określenie pojęcia środka ciężkości figury mierzalnej.

5.2. Ciąg środków ciężkości wielokątów przybliżających figurę mierzalną.

5.2.1. Twierdzenie. Ciąg S_n środków ciężkości wielokątów W_n przybliżających od wewnątrz figurę mierzalną F ma granicę, która nie zależy od wyboru ciągu wielokątów.

Dowód: Aby udowodnić powyższe twierdzenie pokażemy najpierw, że zarówno ciąg S_n punktów będących środkami ciężkości wielokątów W_n , jak i ciąg C_n punktów będących środkami ciężkości wielokątów Z_n jest zbieżny.

Figura F jest figurą mierzalną, o polu równym f . Rozważymy najpierw ciąg wielokątów W_i przybliżających figurę F od wewnątrz $W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_n \subset F$. Wielokąt W_i ma pole równe p_i oraz $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = f$, gdzie f jest polem figury mierzalnej F . Przez S_i będziemy oznaczali punkt będący środkiem ciężkości wielokąta W_i . Wprowadźmy jeszcze pojęcie narostu oznaczanego N_i , jako $N_i = W_{i+1} \setminus \text{int}(W_i)$, gdzie int oznacza wnętrze.



Oznaczmy punkt będący środkiem ciężkości wielokąta N_i przez O_i . Symboliczny zapis środków ciężkości poszczególnych figur prezentujemy poniżej:

$$\begin{aligned}
 \acute{S}_c(W_1) &= (S_1; p_1), & \acute{S}_c(N_1) &= (O_1; p_2 - p_1) \\
 \acute{S}_c(W_2) &= (S_2; p_2), & \acute{S}_c(N_2) &= (O_2; p_3 - p_2) \\
 &\dots & &\dots \\
 \acute{S}_c(W_i) &= (S_i; p_i) = ((x_{S_i}, y_{S_i}); p_i), & \acute{S}_c(N_i) &= (O_i; p_{i+1} - p_i) = ((x_{O_i}, y_{O_i}); p_{i+1} - p_i)
 \end{aligned}$$

Wyznamy teraz współrzędne punktu S_2 będącego środkiem ciężkości wielokąta W_2 w zależności od współrzędnych punktów środka ciężkości wielokątów W_1 i N_1 , korzystając z tego, że $W_2 = W_1 \cup N_1$:

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \acute{S}_c(W_2) = \text{/korzystając z Twierdzenia 4.3.1/} \\
 &= \acute{S}_c(\acute{S}_c(W_1); \acute{S}_c(N_1)) = \acute{S}_c[(S_1; p_1); (O_1; p_2 - p_1)] = \\
 &= \left(\frac{x_{S_1} \cdot p_1 + x_{O_1} \cdot (p_2 - p_1)}{p_1 + p_2 - p_1}; \frac{y_{S_1} \cdot p_1 + y_{O_1} \cdot (p_2 - p_1)}{p_1 + p_2 - p_1} \right) = \\
 &= \left(\frac{x_{S_1} \cdot p_1 + x_{O_1} \cdot (p_2 - p_1)}{p_2}; \frac{y_{S_1} \cdot p_1 + y_{O_1} \cdot (p_2 - p_1)}{p_2} \right).
 \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymujemy współrzędne punktu S_n , który jest środkiem ciężkości n -tego wielokąta przybliżającego figurę mierzalną F od wewnątrz, uwzględniając, że $W_n = W_{n-1} \cup N_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \acute{S}_c(W_n) = \text{/korzystając z Twierdzenia 4.3.1/} = \\
 &= (\acute{S}_c(W_{n-1}), \acute{S}_c(N_{n-1})) = \acute{S}_c[(S_{n-1}; p_{n-1}); (O_{n-1}; p_n - p_{n-1})] = \\
 &= \left(\frac{x_{S_{n-1}} \cdot p_{n-1} + x_{O_{n-1}} \cdot (p_n - p_{n-1})}{p_n}; \frac{y_{S_{n-1}} \cdot p_{n-1} + y_{O_{n-1}} \cdot (p_n - p_{n-1})}{p_n} \right) =
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{x_{S_{n-1}} \cdot p_{n-1}}{p_n} + \frac{x_{O_{n-1}} \cdot (p_n - p_{n-1})}{p_n}; \frac{y_{S_{n-1}} \cdot p_{n-1}}{p_n} + \frac{y_{O_{n-1}} \cdot (p_n - p_{n-1})}{p_n} \right),$$

a także współrzędne punktu będącego środkiem ciężkości wielokąta W_{n+1} :

$$S_{n+1} = \left(\frac{x_{S_n} \cdot p_n}{p_{n+1}} + \frac{x_{O_n} \cdot (p_{n+1} - p_n)}{p_{n+1}}; \frac{y_{S_n} \cdot p_n}{p_{n+1}} + \frac{y_{O_n} \cdot (p_{n+1} - p_n)}{p_{n+1}} \right).$$

Figura mierzalna F zawiera się w prostokącie P o bokach równoległych do osi obranego układu współrzędnych. Możemy opisać go następująco:

$$P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Skoro wielokąty $W_1, W_2, \dots, W_n, N_1, N_2, \dots, N_n$ zawierają się w figurze F , to zawierają się także w prostokącie P , zatem na podstawie Twierdzenia 4.4.1 punkty będące ich środkami ciężkości należą do prostokąta P . Możemy więc powiedzieć, że dla punktów $G_1 = (x_{G_1}; y_{G_1})$ i $G_2 = (x_{G_2}; y_{G_2})$ będących środkami ciężkości dowolnych wielokątów zawartych w P , zachodzi następujące oszacowanie dla odpowiednich współrzędnych: $|x_{G_1} - x_{G_2}| \leq b - a$, a także analogicznie dla drugich współrzędnych punktów: $|y_{G_1} - y_{G_2}| \leq d - c$. Dwie powyższe nierówności oznaczmy (*).

Zapiszmy teraz oszacowanie odległości środków ciężkości dwóch kolejnych wielokątów przybliżających od wewnątrz figurę mierzalną F .

$$\begin{aligned} |S_{n+1} S_n| &\leq |x_{S_{n+1}} - x_{S_n}| + |y_{S_{n+1}} - y_{S_n}| = \\ &= \left| \frac{x_{S_n} \cdot p_n}{p_{n+1}} - x_{S_n} + \frac{x_{O_n} \cdot (p_{n+1} - p_n)}{p_{n+1}} \right| + \left| \frac{y_{S_n} \cdot p_n}{p_{n+1}} - y_{S_n} + \frac{y_{O_n} \cdot (p_{n+1} - p_n)}{p_{n+1}} \right| = \\ &= \left| x_{S_n} \cdot \left(\frac{p_n}{p_{n+1}} - 1 \right) + \frac{x_{O_n} \cdot (p_{n+1} - p_n)}{p_{n+1}} \right| + \left| y_{S_n} \cdot \left(\frac{p_n}{p_{n+1}} - 1 \right) + \frac{y_{O_n} \cdot (p_{n+1} - p_n)}{p_{n+1}} \right| = \\ &= \left| \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} \cdot (x_{O_n} - x_{S_n}) \right| + \left| \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} \cdot (y_{O_n} - y_{S_n}) \right| = \\ &= \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} |x_{O_n} - x_{S_n}| + \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} |y_{O_n} - y_{S_n}| = / \text{korzystając z Twierdzenia 4.1.1} \\ \text{i oszacowań (*)} &\leq \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} \cdot (b - a) + \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} \cdot (d - c) = \\ &= \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} \cdot (b - a + d - c) = \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} \cdot A \end{aligned} \tag{1}$$

Stała A będzie odpowiadała sumie długości boków prostokąta P ,
 $A = b - a + d - c$.

Ciąg p_n jest rosnący i zbieżny do f , ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$, wtedy $\exists_N$ takie, że

$$\forall_{n > N} \quad p_n \geq f - \varepsilon \quad (2)$$

oraz $\exists_{N_0 > N}$ takie, że

$$\forall_{n, m > N_0} \quad |p_m - p_n| < \frac{f - \varepsilon}{A} \cdot \varepsilon. \quad (3)$$

Niech $m > n > N_0$, wtedy $m = n + k$, dostajemy oszacowanie:

$$\begin{aligned} |S_{n+k} S_n| &\leq |S_{n+k} S_{n+k-1}| + \dots + |S_{n+1} S_n| = \sum_{i=0}^{k-1} |S_{n+i+1} S_{n+i}| \leq \\ &\leq / \text{korzystając z (1)} / \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p_{n+i+1} - p_{n+i}}{p_{n+i+1}} \cdot A \leq / \text{korzystając z (2)} / \leq \\ &\leq A \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p_{n+i+1} - p_{n+i}}{f - \varepsilon} = \frac{A}{f - \varepsilon} \cdot (p_{n+k} - p_{n+k-1} + p_{n+k-1} - \dots + p_{n+1} - p_n) = \\ &= \frac{A}{f - \varepsilon} \cdot (p_{n+k} - p_n) = \\ &= \frac{A}{f - \varepsilon} \cdot (p_m - p_n) \leq / \text{korzystając z (3)} / \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

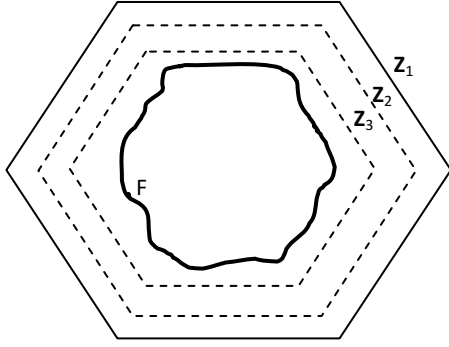
Zatem $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_0} \forall_{n, m > N_0} |S_{n+1} - S_n| < \varepsilon$, czyli ciąg S_n jest ciągiem Cauchy'ego, więc jest zbieżny.

Pokazaliśmy, że ciąg punktów będących środkami ciężkości wielokątów W_n ma granicę.

Teraz pokażemy, że ciąg C_n środków ciężkości wielokątów przybliżających od zewnątrz figurę F także ma granicę.

Rozważmy ciąg wielokątów Z_i przybliżających figurę F od wewnątrz $F \subset \dots \subset Z_n \subset Z_{n-1} \subset \dots \subset Z_1$, wielokąt Z_i ma pole równe q_i oraz $\lim_{i \rightarrow \infty} q_i = f$, gdzie f , tak jak poprzednio jest polem figury mierzalnej F . Przez C_i będziemy oznaczali punkt będący środkiem ciężkości wielokąta Z_i . Wprowadźmy jeszcze pojęcie narostu oznaczanego K_i , jako $K_i = Z_i \setminus \text{int } Z_{i+1}$, gdzie int oznacza wnętrze.

Oznaczmy punkt będący środkiem ciężkości wielokąta K_i przez R_i . Symboliczny zapis środków ciężkości poszczególnych figur prezentujemy poniżej:



$$\dot{S}_c(Z_1) = (C_1; q_1),$$

$$\dot{S}_c(K_1) = (R_1; q_1 - q_2)$$

$$\dot{S}_c(Z_2) = (C_2; q_1),$$

$$\dot{S}_c(K_2) = (R_2; q_2 - q_3)$$

...

...

$$\dot{S}_c(Z_i) = (C_i; q_i) = ((x_{C_i}; y_{C_i}); q_i) \quad \dot{S}_c(K_i) = (R_i; q_i - q_{i+1}) = ((x_{R_i}; y_{R_i}); q_i - q_{i+1})$$

Wyznamy teraz współrzędne punktu C_1 (będącego środkiem ciężkości wielokąta Z_1), w zależności od współrzędnych punktów będących środkami ciężkości wielokątów Z_2 i K_1 , korzystając z tego, że $Z_1 = Z_2 \cup K_1$

$$\begin{aligned} C_1 &= \dot{S}_c(Z_1) = \text{korzystając z Twierdzenia 4.3.1} = \\ &= \dot{S}_c(\dot{S}_c(Z_2); \dot{S}_c(K_1)) = \dot{S}_c[(C_2; q_1); (R_1; q_1 - q_2)] = \\ &= \left(\frac{x_{C_2} \cdot q_2 + x_{R_2} \cdot (q_1 - q_2)}{q_2 + q_1 - q_2}; \frac{y_{C_2} \cdot q_2 + y_{R_2} \cdot (q_1 - q_2)}{q_2 + q_1 - q_2} \right) = \left(\frac{x_{C_2} \cdot q_2 + x_{R_2} \cdot (q_1 - q_2)}{q_1}; \frac{y_{C_2} \cdot q_2 + y_{R_2} \cdot (q_1 - q_2)}{q_1} \right). \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymujemy współrzędne punktu C_n , który jest środkiem ciężkości n -tego wielokąta przybliżającego figurę mierzalną F od zewnątrz, uwzględniając, że $Z_n = Z_{n+1} \cup K_n$.

$$\begin{aligned} C_n &= \dot{S}_c(Z_n) = \dot{S}_c(\dot{S}_c(Z_{n+1}); \dot{S}_c(K_n)) = \dot{S}_c(\dot{S}_c(C_{n+1}; q_{n+1}); \dot{S}_c(R_n; q_n - q_{n+1})) = \\ &= \left(\frac{x_{C_{n+1}} \cdot q_{n+1} + x_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_{n+1} + q_n - q_{n+1}}; \frac{y_{C_{n+1}} \cdot q_{n+1} + y_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_{n+1} + q_n - q_{n+1}} \right) = \\ &= \left(\frac{x_{C_{n+1}} \cdot q_{n+1}}{q_n} + \frac{x_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_n}; \frac{y_{C_{n+1}} \cdot q_{n+1}}{q_n} + \frac{y_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_n} \right), \end{aligned}$$

a także postać współrzędnych środka ciężkości wielokąta C_{n+1} :

$$C_{n+1} = \dot{S}_c(Z_{n+1}) = \left(\frac{x_{C_{n+2}} \cdot q_{n+2}}{q_{n+1}} + \frac{x_{R_{n+1}} \cdot (q_{n+1} - q_{n+2})}{q_{n+1}}; \frac{y_{C_{n+2}} \cdot q_{n+2}}{q_{n+1}} + \frac{y_{R_{n+1}} \cdot (q_{n+1} - q_{n+2})}{q_{n+1}} \right).$$

Wielokąt Z_1 zawiera się w prostokącie T , o bokach równoległych do osi obranego układu współrzędnych. Możemy go opisać następująco:

$$T = \{(x, y) : e \leq x \leq f, g \leq y \leq h\}.$$

Wielokąty $Z_2, \dots, Z_n, K_1, K_2, \dots, K_n$ zawierają się w wielokącie Z_1 , czyli zawierają się także w prostokącie T , zatem na podstawie Twierdzenia 4.4.1 punkty będące ich środkami ciężkości należą do prostokąta T . Możemy więc powiedzieć że dla punktów $H_1 = (x_{H_1}; y_{H_1})$ i $H_2 = (x_{H_2}; y_{H_2})$ będących środkami ciężkości dowolnych wielokątów zawartych w T , zachodzi następujące oszacowanie dla odpowiednich współrzędnych: $|x_{H_1} - x_{H_2}| \leq f - e$, a także analogicznie dla drugich współrzędnych punktów: $|y_{H_1} - y_{H_2}| \leq h - g$. Dwie powyższe nierówności oznaczmy(**).

Zapiszmy teraz oszacowanie odległości punktów będących środkami ciężkości dwóch kolejnych wielokątów przybliżających od zewnątrz figurę mierzalną F .

$$\begin{aligned}
|C_n C_{n+1}| &\leq |x_{C_n} - x_{C_{n+1}}| + |y_{C_n} - y_{C_{n+1}}| = \\
&= \left| \frac{x_{C_{n+1}} \cdot q_{n+1}}{q_n} - x_{C_{n+1}} + \frac{x_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_n} \right| + \left| \frac{y_{C_{n+1}} \cdot q_{n+1}}{q_n} - y_{C_{n+1}} + \frac{y_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_n} \right| = \\
&= \left| x_{C_{n+1}} \cdot \left(\frac{q_{n+1}}{q_n} - 1 \right) + \frac{x_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_n} \right| + \left| y_{C_{n+1}} \cdot \left(\frac{q_{n+1}}{q_n} - 1 \right) + \frac{y_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_n} \right| = \\
&= \left| x_{C_{n+1}} \cdot \left(\frac{q_{n+1} - q_n}{q_n} \right) + \frac{x_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_n} \right| + \left| y_{C_{n+1}} \cdot \left(\frac{q_{n+1} - q_n}{q_n} \right) + \frac{y_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_n} \right| = \\
&= \left| -x_{C_{n+1}} \cdot \left(\frac{q_n - q_{n+1}}{q_n} \right) + \frac{x_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_n} \right| + \left| -y_{C_{n+1}} \cdot \left(\frac{q_n - q_{n+1}}{q_n} \right) + \frac{y_{R_n} \cdot (q_n - q_{n+1})}{q_n} \right| = \\
&= \frac{q_n - q_{n+1}}{q_n} |x_{R_n} - x_{C_{n+1}}| + \frac{q_n - q_{n+1}}{q_n} |y_{R_n} - y_{C_{n+1}}| = \text{/korzystając z Twierdzenia} \\
&4.1.1 \text{ i oszacowań (**)}/ = \\
&= \frac{q_n - q_{n+1}}{q_n} \cdot (f - e) + \frac{q_n - q_{n+1}}{q_n} \cdot (h - g) = \frac{q_n - q_{n+1}}{q_n} \cdot (f - e + h - g) = \frac{q_n - q_{n+1}}{q_n} \cdot B \quad (1)
\end{aligned}$$

Stała B będzie odpowiadała sumie długości boków prostokąta T .

$$B = f - e + h - g.$$

Ciąg q_n jest malejący i zbieżny do f , ustalmy dowolny $\epsilon > 0$, wówczas $\exists_N$ takie, że

$$\forall_{n > N} q_n - f \leq \epsilon \quad (2)$$

oraz $\exists_{N_0 > N}$ takie, że

$$\forall_{n,m > N_0} |q_m - q_n| < \frac{f}{B} \cdot \varepsilon. \quad (3)$$

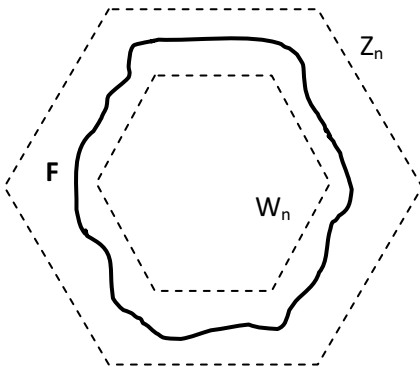
Niech $m > n > N_0$, wtedy $m = n + k$, dostajemy oszacowanie:

$$\begin{aligned} |C_{n+k} C_n| &\leq |C_{n+k} C_{n+k-1}| + \dots + |C_{n+1} C_n| = \sum_{i=0}^{k-1} |C_{n+i+1} C_{n+i}| \leq \\ &\leq \text{/korzystając z (1)/} \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{q_{n+i+1} - q_{n+i}}{q_{n+i}} \cdot B \leq \\ &\leq \text{/korzystając z (2)/} \leq B \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{q_{n+i+1} - q_{n+i}}{f} = \\ &= \frac{B}{f} \cdot (q_{n+k} - q_{n+k-1} + q_{n+k-1} - \dots + q_{n+1} - q_n) = \\ &= \frac{B}{f} \cdot (q_m - q_n) < \text{/korzystając z (3)/} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Zatem $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N_0} \forall_{n,m > N_0} |C_{n+1} C_n| < \varepsilon$, czyli ciąg C_n jest ciągiem Cauchy'ego, więc jest zbieżny.

Wiemy już, że ciąg punktów będących środkami ciężkości wielokątów przybliżających figurę F od wewnątrz, jak i ciąg takich punktów dla wielokątów przybliżających F od zewnątrz ma granicę. Teraz pokażemy, że te granice są równe.

Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$, wiemy, że ciągi pól p_n i q_n zbiegają do f czyli do pola figury mierzalnej F . (*)



Wprowadźmy jeszcze pojęcie narostu oznaczanego N_n , gdzie $N_n = Z_n \setminus \text{int } W_n$. Oznaczmy punkt będący środkiem ciężkości wielokąta N_n przez M_n . Symboliczny zapis środków ciężkości poszczególnych figur prezentujemy poniżej:

$$\begin{aligned}\dot{S}_c(Z_n) &= (C_n; q_n), \\ \dot{S}_c(W_n) &= (S_n; q_n), \\ \dot{S}_c(N_n) &= (M_n; q_n - p_n)\end{aligned}$$

Wyznamy teraz współrzędne punktu C_n (będącego środkiem ciężkości wielokąta Z_n), w zależności od współrzędnych punktów będących środkami ciężkości wielokątów W_n i N_n , korzystając z tego, że $Z_n = W_n \cup N_n$

$$\begin{aligned}C_n = \dot{S}_c(Z_n) &= \text{korzystając z Twierdzenia 4.3.1} = \dot{S}_c(\dot{S}_c(W_n); \dot{S}_c(N_n)) = \\ &= \dot{S}_c\left[(S_n; p_n); (M_n; q_n - p_n)\right] = \left(\frac{x_{S_n} \cdot p_n + x_{M_n} \cdot (q_n - p_n)}{p_n + q_n - p_n}; \frac{y_{S_n} \cdot p_n + y_{M_n} \cdot (q_n - p_n)}{p_n + q_n - p_n}\right) = \\ &= \left(\frac{x_{S_n} \cdot p_n + x_{M_n} \cdot (q_n - p_n)}{q_n}; \frac{y_{S_n} \cdot p_n + y_{M_n} \cdot (q_n - p_n)}{q_n}\right).\end{aligned}$$

Zapiszmy teraz oszacowanie odległości środków ciężkości wielokątów Z_n i W_n .

$$\begin{aligned}|S_n C_n| &\leq |x_{S_n} - x_{C_n}| + |y_{S_n} - y_{C_n}| = \\ &= \left|x_{S_n} - \frac{x_{S_n} \cdot p_n + x_{M_n} \cdot (q_n - p_n)}{q_n}\right| + \left|y_{S_n} - \frac{y_{S_n} \cdot p_n + y_{M_n} \cdot (q_n - p_n)}{q_n}\right| = \\ &= \left|x_{S_n} - x_{S_n} \cdot \frac{p_n}{q_n} - x_{M_n} \cdot \frac{q_n - p_n}{q_n}\right| + \left|y_{S_n} - y_{S_n} \cdot \frac{p_n}{q_n} - y_{M_n} \cdot \frac{q_n - p_n}{q_n}\right| = \\ &= \frac{q_n - p_n}{q_n} |x_{S_n} - x_{M_n}| + \frac{q_n - p_n}{q_n} |y_{S_n} - y_{M_n}|\end{aligned}$$

A także: $0 \leq |S_n C_n|$.

Dla oszacowania od góry wartości granicy ciągu odległości $|S_n C_n|$ zauważamy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n - p_n}{q_n} |x_{S_n} - x_M| + \frac{q_n - p_n}{q_n} |y_{S_n} - y_M| = 0$ /korzystając z (*)/

Dla oszacowania granicy ciągu odległości $|S_n C_n|$ od dołu rozważamy ciąg stałe równy 0, którego granica wynosi 0.

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n C_n| = 0$, a stąd wynika, że $S = C$.

Dla ciągu S_n granica jest taka sama, jak dla ciągu C_n , zatem granica punktów będących środkami ciężkości wielokątów przybliżających figurę F od wewnątrz nie zależy od wyboru ciągu wielokątów W_n , co kończy dowód Twierdzenia 5.2.1.

Dzięki dowodowi Twierdzenia 5.2.1 możemy zdefiniować teraz środek ciężkości figury mierzalnej.

5.3. Definicja środka ciężkości figury mierzalnej.

5.3.1. Definicja. *Środkiem ciężkości figury mierzalnej F nazywamy punkt, będący granicą środków ciężkości wielokątów przybliżających figurę mierzalną F od wewnątrz.*

Bibliografia

1. L. Szczerba, *O mierze Jordana*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1977.
2. J. Massalski, M. Massalska, *Fizyka dla inżynierów*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1980.