Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka nauczycielska

Sebastian Guz

KLASYFIKACJA IZOMETRII PŁASZCZYZNY HIPERBOLICZNEJ

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab.
Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2010

Oświadczam, że pracę magisterską wykonałem samodzielnie i zgłaszam ją do oceny.

Data .... Podpis autora pracy: ....

Oświadczam, że praca jest gotowa do oceny przez recenzenta.

Data .... Podpis opiekuna pracy: ....

Wstęp

Niniejsza praca została napisana jako kontynuacja zagadnień poruszanych na wykładzie „Podstawy geometrii i geometrie nieeuklidesowe” prowadzonym przez prof. Jacka Świątkowskiego dla studentów matematyki specjalności nauczycielskiej. Dla dogłębnego zrozumienia treści, o których będzie tutaj mowa, zaleca się zapoznanie z podejściem aksjomatyczno-dedukcyjnym w geometrii oraz podstawami geometrii nieeuklidesowych, o czym można czytać w książkach podanych w bibliografii. Jednakże rozdział „0. Wiadomości wstępne” oraz sposób, w jaki ta praca została napisana (rozumowania oraz używane pojęcia są elementarne i znane, w większości, z geometrii euklidesowej) czyni ją w dużym stopniu niezależną od innych publikacji.

Celem tej pracy jest udowodnienie twierdzenia klasyfikującego izometrie płaszczyzny hiperbolicznej:

Twierdzenie klasyfikujące

> *Każda izometria płaszczyzny hiperbolicznej jest dokładnie jednym z przekształceń: przekształceniem tożsamościowym, odbiciem w prostej, obrotem, translacją osiową, translacją horocykliczną albo odbiciem z poślizgiem.*

Praca ta nie rości pretensji do miana rozprawy naukowej, wręcz przeciwnie – była pisana z myślą o studentach oraz zainteresowanej tematem młodzieży szkolnej. Jest więc z założenia raczej pracą popularną, niż systematycznym wykładem zawartej w niej treści. Przy czym autor starał się, by stwierdzenia były należycie uzasadniane, a rozumowania – kompletne.

Szczególne podziękowania autor składa opiekunowi swojej pracy magisterskiej Profesorowi Jackowi Świątkowskiemu za cierpliwość, wyrozumiałość oraz konstruktywną krytykę.

0.Wiadomości wstępne.

Opiszemy teraz model półpłaszczyznowy Poincarego geometrii hiperbolicznej wykorzystujący obiekty geometrii euklidesowej. Więcej informacji na temat różnych modeli geometrii nieeuklidesowych czytelnik może znaleźć w pozycjach książkowych podanych w bibliografii.

0.1 Pojęcia pierwotne geometrii hiperbolicznej.

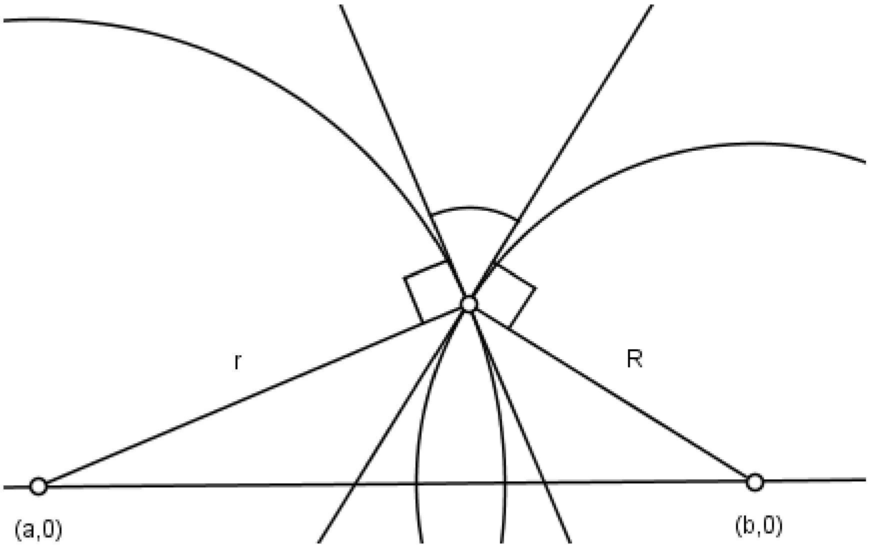
Opiszemy pojęcia pierwotne; definicje pozostałych pojęć (takich jak kąt, półprosta, odcinek) są takie same jak w geometrii euklidesowej.

Punkty w sensie hiperbolicznym to euklidesowe punkty należące do ustalonej półpłaszczyzny bez brzegu (na rysunkach brzeg będzie zawsze prostą poziomą) oznaczanej przez $\mathbb{H}$.
Wprowadzając na płaszczyźnie euklidesowej prostokątny układ współrzędnych możemy przyjąć $\mathbb{H}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}$, zatem każdy punkt na płaszczyźnie hiperbolicznej ma jednoznacznie przyporządkowane współrzędne kartezjańskie.
Punktami idealnymi będziemy nazywać „punkty w nieskończoności”, tj. punkty znajdujące się na brzegu półpłaszczyzny oraz punkt znajdujący się „w nieskończoności u góry”.

Wyróżniamy dwa rodzaje **prostych** hiperbolicznych: euklidesowe półproste prostopadłe do brzegu półpłaszczyzny (obrazowo będziemy te proste nazywać prostymi pionowymi), które w przyjętym wyżej układzie współrzędnych opisują się równaniami postaci $x=a$, oraz euklidesowe półokręgi o środkach w punktach o współrzędnych postaci *(a,0)* leżących na brzegu półpłaszczyzny, które opisują się równaniami postaci
$(x-a)^2+y^2=r^2$, gdzie *r* to promień tego okręgu.

Możemy powiedzieć, że punkty idealne to „końce” prostych będących euklidesowymi półokręgami oraz wspólny koniec prostych pionowych.

Hiperboliczna miara kąta to euklidesowa miara kąta między stycznymi do ramion kąta w wierzchołku kąta. Będziemy rozważali kąty zorientowane - dokonując pomiaru rozwartości kąta zgodnie z ruchem wskazówek zegara przed jego wartością będziemy stawiali minus.



Rysunek 1

Zauważmy tutaj, że dwie proste hiperboliczne będące euklidesowymi półokręgami o równaniach
$(x-a)^2+y^2=r^2$, $(x-b)^2+y^2=R^2$ są prostopadłe dokładnie wtedy, gdy

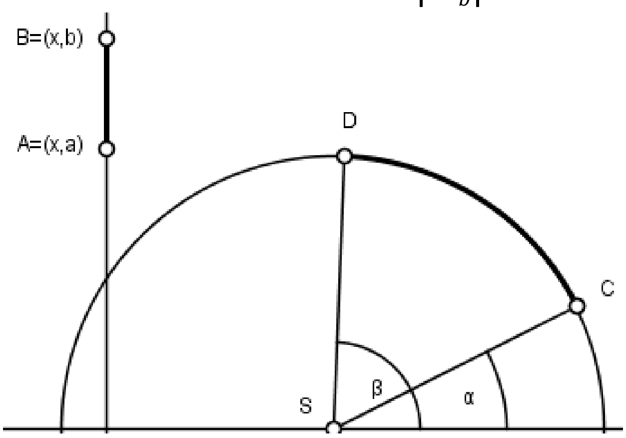
$$r^2+R^2=|b-a|^2.$$

Prosta pionowa jest prostopadła do prostej będącej euklidesowym półokręgiem o równaniu $(x-a)^2+y^2=r^2$ dokładnie wtedy, gdy przechodzi przez środek tego półokręgu, czyli ma równanie $x=a$.

Długość odcinka, czyli odległość jednego z końców tego odcinka od drugiego, zależy od tego, czy odcinek leży na prostej pionowej, czy na prostej będącej euklidesowym półokręgiem:

- jeżeli odcinek leży na prostej pionowej, to jego końce *A, B* mają współrzędne *(x,a), (x,b),* odpowiednio, i wówczas miara odcinka *AB* jest równa

$$m(AB)=|\ln a-\ln b|=\left|\ln\frac{a}{b}\right|;$$



Rysunek 2

- jeżeli odcinek leży na prostej będącej euklidesowym półokręgiem o środku *S*, to z jego końców *C, D* prowadzimy euklidesowe odcinki do *S* i wówczas

$$m(CD)=\left|\ln tg\frac{\alpha}{2}-\ln tg\frac{\beta}{2}\right|;$$

gdzie α, β są jednakowo zorientowanymi kątami między euklidesowymi odcinkami *CS* i *DS* (odpowiednio) a brzegiem półpłaszczyzny (patrz Rysunek 2).

Ustalmy w tym miejscu, że przez $|AB|$ będziemy oznaczać euklidesową długość euklidesowego odcinka *AB,* zaś *m(AB)* będzie zawsze oznaczało hiperboliczną długość hiperbolicznego odcinka *AB.*

Ilekroć będziemy mówić o odcinku, kącie, prostej czy półprostej domyślnie chodzić będzie o odcinek, kąt, prostą, półprostą w sensie hiperbolicznym. W innym wypadku rzeczownik będziemy poprzedzać przymiotnikiem „euklidesowy".

Wzajemne położenie dwóch prostych.

Dwie proste hiperboliczne mogą być położone względem siebie na trzy sposoby:
- proste **przecinające się** – mają dokładnie jeden punkt wspólny;
- proste **asymptotyczne** – jednym punktem wspólnym jest punkt idealny;
- proste **rozchodzące się** – nie mają żadnego punktu wspólnego, nawet idealnego.

W przyjętym przez nas modelu łatwo udowodnić ważne dla nas twierdzenie geometrii hiperbolicznej charakteryzujące pary prostych rozchodzących się.

Twierdzenie

Dwie proste hiperboliczne są rozchodzące się dokładnie wtedy, kiedy mają wspólną prostą prostopadłą.

Dowód tego twierdzenia opiera się na nietrudnych, ale żmudnych rachunkach, dlatego zostanie przez nas pominięty.

0.2 Ujednolicony wzór na miarę odcinków.

Do tej pory odcinki mierzyliśmy na dwa sposoby w zależności od tego, czy odcinek leżał na prostej pionowej, czy na prostej będącej euklidesowym półokręgiem. Jednak w pewnych sytuacjach wygodnie jest mieć jeden wzór, który poradzi sobie z każdym odcinkiem niezależnie od rodzaju prostej, na której leży. Udowodnimy, że podany niżej wzór jest uniwersalny i uogólnia oba poznane dotąd wzory.

Przypomnijmy najpierw, że z definicji kosinus hiperboliczny wyraża się formułą:

$$cosh(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right).$$

Twierdzenie

Kosinus hiperboliczny miary odcinka o końcach w punktach $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ wyraża się wzorem

$$cosh(m(AB))=1+\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{2y_1y_2}.$$

Dla dowodu powyższego twierdzenia rozważymy dwa przypadki.

1) Niech punkty *A*, *B* mają odpowiednio współrzędne (x,y_1), (x,y_2), tzn. leżą na prostej pionowej. Wówczas z przyjętej w 0.1 definicji miary odcinków mamy $m(AB)=\left|ln\frac{y_2}{y_1}\right|$.

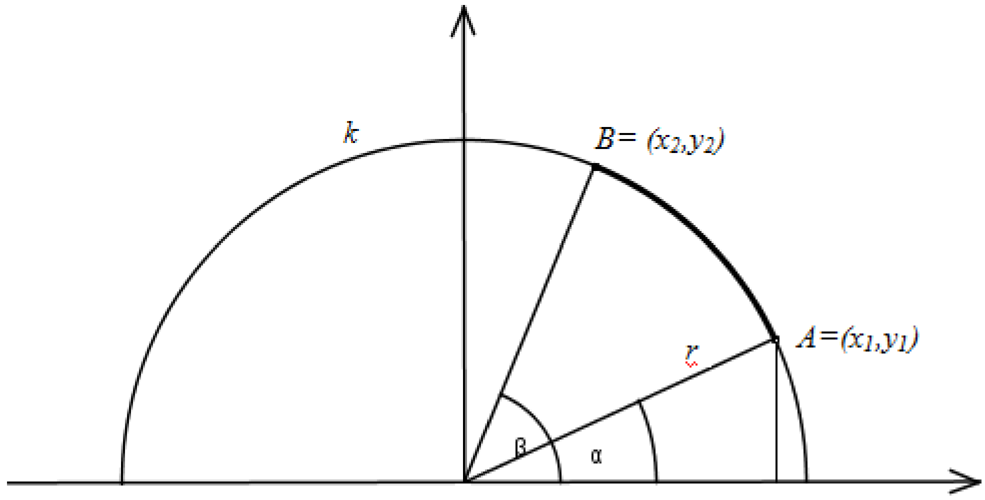
Wobec tego:

$$cosh(m(AB)) = cosh\left(\left|ln\frac{y_2}{y_1}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y_2}{y_1}+\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{y_2^2+y_1^2}{y_1y_2} = \frac{(y_1-y_2)^2+2y_1y_2}{2y_1y_2} = 1+\frac{(y_1-y_2)^2}{2y_1y_2}.$$

Ponieważ z założenia mamy $x_1=x_2$, czyli $x_1-x_2=0$, więc ostatecznie

$$cosh(m(AB))=1+\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{2y_1y_2}.$$

2) Jeżeli punkty *A*, *B* o współrzędnych odpowiednio (x_1,y_1), (x_2,y_2) leżą na prostej *k* będącej euklidesowym półokręgiem, to umieszczamy pionową oś prostokątnego układu współrzędnych tak aby przechodziła przez euklidesowy środek *k*.



Rysunek 3

Poczyńmy pewne spostrzeżenia:

a. $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{r-x_1}{y_1}$, $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1-\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{r-x_2}{y_2}$;

b. współrzędne punktów A, B spełniają równanie prostej s: $x^2 + y^2 = r^2$, zatem zachodzą związki:
$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, x_2^2 + y_2^2 = r^2.$$
Po prostych przekształceniach otrzymujemy równoważne powyższym zależności:
$$\frac{y_1}{r-x_1} = \frac{r+x_1}{y_1}, \frac{y_2}{r-x_2} = \frac{r+x_2}{y_2}.$$

Wobec powyższego prawdziwy jest następujący ciąg równości:

$$cosh(m(AB))=cosh\left(\left|ln\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\beta}{2}}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\beta}{2}} + \frac{tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{r-x_1}{y_1}\frac{y_2}{r-x_2} + \frac{r-x_2}{y_2}\frac{y_1}{r-x_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{r-x_1}{y_1}\frac{r+x_2}{y_2} + \frac{r-x_2}{y_2}\frac{r+x_1}{y_1}\right) = \frac{x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2x_1x_2}{2y_1y_2} = \frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+2y_1y_2}{2y_1y_2} =$$

$$=1 + \frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{2y_1y_2}.$$

Pierwsza równość wynika z definicji miary odcinka hiperbolicznego, druga z własności $e^{\ln x} = x$ dla $x>0$, trzecia z podpunktu (a) powyżej, czwarta z podpunktu (b) powyżej, a pozostałe równości są konsekwencją przekształceń algebraicznych.

Uwaga 1 Układ współrzędnych dobraliśmy tak, aby wygodnie było przeprowadzić obliczenia. Gdyby układ współrzędnych został wybrany inaczej, to drugie współrzędne punktów A, B nie zmieniły by się, a pierwsze współrzędne obu punktów zmieniły by się o tę samą stałą c (euklidesową odległość euklidesowego środka półokręgu s od początku układu współrzędnych). Powyższe rozumowanie można byłoby przepisać wstawiając x_1+c zamiast x_1 oraz x_2+c zamiast x_2, co doprowadziłoby do tego samego wyniku.

Twierdzenie zostało udowodnione.

0.3 Definicja i własności izometrii.

Definicja izometrii hiperbolicznej niczym nie różni się od definicji izometrii euklidesowej – jest to po prostu przekształcenie zachowujące odległości między punktami.

Definicja

Izometrią płaszczyzny hiperbolicznej $\mathbb{H}$ nazywamy takie przekształcenie T tej płaszczyzny, że dla dowolnych $X, Y \in \mathbb{H}$ zachodzi $d(T(X),T(Y))=d(X,Y)$, gdzie $d(A,B)$ oznacza odległość punktu A od punktu B.

Podobnie jak w geometrii euklidesowej zachodzi: $d(A,B)=d(B,A)=m(AB)=m(BA)$.

Ważne z punktu widzenia tej pracy będą dla nas pewne własności izometrii znane z geometrii euklidesowej, które przyjmiemy bez dowodu dla geometrii hiperbolicznej:

(A) *izometrie są przekształceniami bijektywnymi, tzn. są różnowartościowe i „na”;*
(B) *izometrie przeprowadzają proste na proste (zachowują przy tym porządek punktów);*
(C) *izometrie są przekształceniami konforemnymi, tzn. zachowują kąty między prostymi.*

0.4 Odbicie w prostej jako izometria.

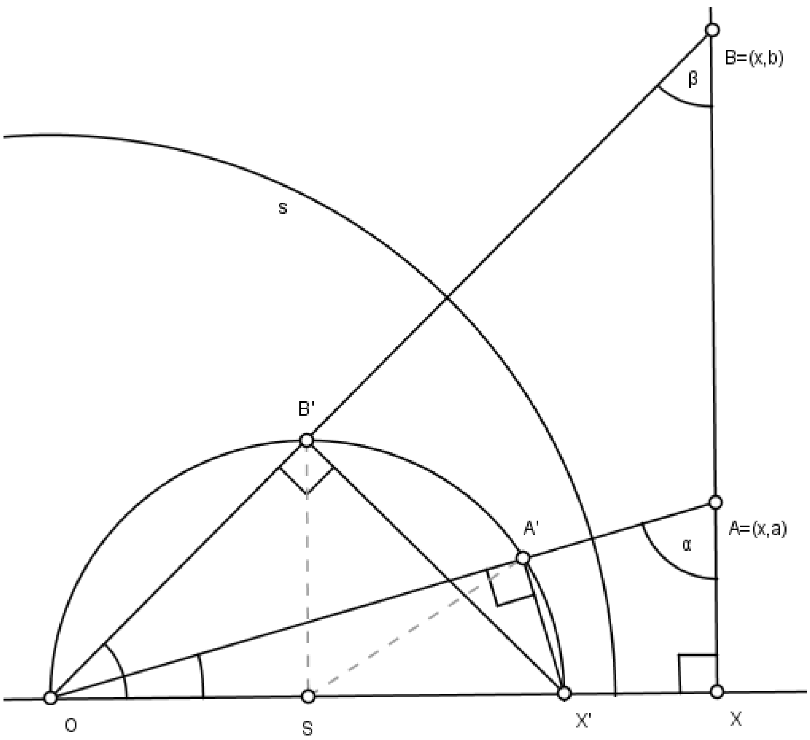
Definicja

Odbiciem w prostej hiperbolicznej s nazywamy przekształcenie opisane poniżej:

1) jeżeli s jest prostą pionową, to przez odbicie hiperboliczne w s rozumiemy euklidesową symetrię w prostej zawierającej s obciętą do $\mathbb{H}$;
2) jeżeli s jest euklidesowym półokręgiem, to przez odbicie hiperboliczne w s rozumiemy euklidesową inwersję w okręgu zawierającym s obciętą do $\mathbb{H}$.

Pokażemy teraz, że **odbicie w prostej jest izometrią hiperboliczną**.

1. Jeżeli s jest prostą pionową, to z punktu 1) definicji odbicia wiemy, że euklidesowe odległości i kąty się nie zmieniły. Ponieważ odległości hiperboliczne wyrażają się przy pomocy odległości i kątów euklidesowych, a te się nie zmieniły, więc odległości hiperboliczne również pozostały bez zmian.
2. Jeżeli s jest euklidesowym półokręgiem, należy rozważyć różne położenia odcinka AB względem prostej s.
   a) Rozważymy najpierw przypadek, kiedy odcinek AB jest pionowy i leży na zewnątrz euklidesowego półokręgu s. Przy oznaczeniach jak na Rysunku 4 długość odcinka AB jest równa $m(AB)= |\ln b - \ln a|$. Pokażemy, że $m(A'B')=m(AB)$.



Rysunek 4

Ponieważ euklidesowe trójkąty *OXB* oraz *OXA* są prostokątne, więc $\sphericalangle B'OX' = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\sphericalangle A'OX' = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Z geometrii euklidesowej wiemy, że obrazem (przez inwersję) prostej rozłącznej z okręgiem, w którym dokonujemy inwersji, jest okrąg przechodzący przez środek okręgu inwersji. Zatem z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym w okrąg mamy $\sphericalangle B'SX' = 2\sphericalangle B'OX' = \pi - 2\beta$ oraz $\sphericalangle A'SX' = 2\sphericalangle A'OX' = \pi - 2\alpha$.
Wobec powyższego:

$$m(A'B') = \left|\ln tg\frac{\pi-2\beta}{2} - \ln tg\frac{\pi-2\alpha}{2}\right| = |\ln tg\sphericalangle BOX - \ln tg\sphericalangle AOX| =$$

$$= \left|\ln\frac{b}{|OX|} - \ln\frac{a}{|OX|}\right| = \left|\ln\frac{b}{|OX|}\frac{|OX|}{a}\right| = |\ln b - \ln a| = m(AB),$$

przy czym pierwsza równość wynika z definicji hiperbolicznej miary odcinka, równości druga i trzecia są konsekwencją odpowiednich własności w euklidesowych trójkątach prostokątnych *OXA* i *OXB*, czwarta i piąta wynikają z własności logarytmów.

b) Uzasadnienie dla przypadku, gdy punkty A i B leżą na prostej będącej euklidesowym półokręgiem przeprowadzimy przy użyciu współrzędnych kartezjańskich wykorzystując wzór:

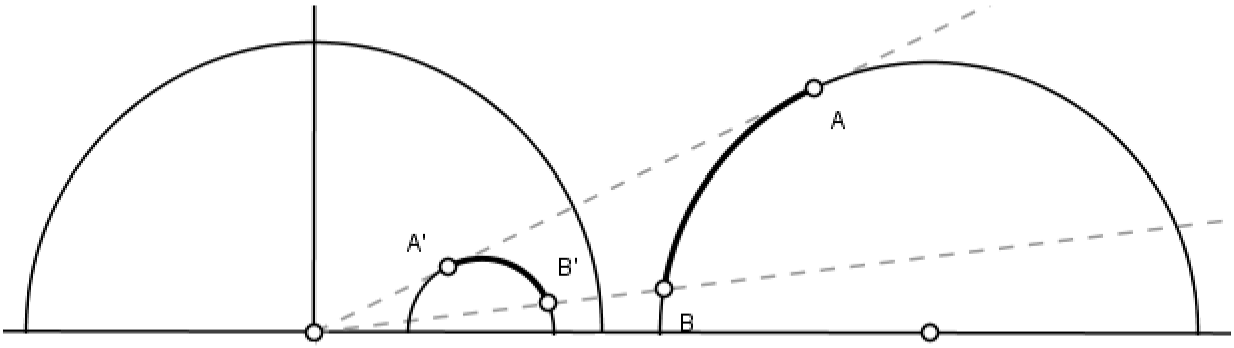
$$cosh(m(AB)) = 1 + \frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{2y_1y_2},$$

gdzie *A=*(x_1,y_1)*, B=*(x_2,y_2) oraz wzory na współrzędne *(a',b')* obrazu *Z'* punktu *Z=(a,b)* przez inwersję w okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = r^2$:

$$a' = \frac{r^2}{a^2+b^2}a, \quad b' = \frac{r^2}{a^2+b^2}b.$$

Wobec powyższych wzorów współrzędne (x'_1,y'_1), (x'_2,y'_2) obrazów *A', B'* punktów *A, B* przyjmują postać:

$$x'_1 = \frac{r^2}{a^2+b^2}x_1, \quad y'_1 = \frac{r^2}{a^2+b^2}y_1, \quad x'_2 = \frac{r^2}{a^2+b^2}x_2, \quad y'_2 = \frac{r^2}{a^2+b^2}y_2.$$



Rysunek 5

Pokażemy, że *cosh(m(AB))=cosh(m(A'B')),* co wobec różnowartościowości w zbiorze liczb nieujemnych funkcji kosinus hiperboliczny oznacza, że *m(AB)=m(A'B').*

Prawdziwy jest następujący ciąg równości:

$$cosh(m(A'B'))=1+\frac{\left(\frac{r^2}{x_1^2+y_1^2}x_1-\frac{r^2}{x_2^2+y_2^2}x_2\right)^2+\left(\frac{r^2}{x_1^2+y_1^2}y_1-\frac{r^2}{x_2^2+y_2^2}y_2\right)^2}{2\frac{r^2}{x_1^2+y_1^2}y_1\frac{r^2}{x_2^2+y_2^2}y_2}=$$

$$=1+\frac{\left(\frac{1}{x_1^2+y_1^2}x_1-\frac{1}{x_2^2+y_2^2}x_2\right)^2+\left(\frac{1}{x_1^2+y_1^2}y_1-\frac{1}{x_2^2+y_2^2}y_2\right)^2}{2\frac{1}{x_1^2+y_1^2}y_1\frac{1}{x_2^2+y_2^2}y_2}=$$

$$=1+\frac{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)\left[\left(\frac{1}{x_1^2+y_1^2}x_1-\frac{1}{x_2^2+y_2^2}x_2\right)^2+\left(\frac{1}{x_1^2+y_1^2}y_1-\frac{1}{x_2^2+y_2^2}y_2\right)^2\right]}{2y_1y_2}=$$

$$=1+\frac{\left(\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}x_1-\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}x_2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}y_1-\frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}y_2\right)^2}{2y_1y_2}=$$

$$=1+\frac{\frac{x_2^2+y_2^2}{x_1^2+y_1^2}x_1^2+\frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2}x_2^2-2x_1x_2+\frac{x_2^2+y_2^2}{x_1^2+y_1^2}y_1^2+\frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2}y_2^2-2y_1y_2}{2y_1y_2}=$$

$$= 1 + \frac{\frac{x_2^2+y_2^2}{x_1^2+y_1^2}x_1^2 + \frac{x_2^2+y_2^2}{x_1^2+y_1^2}y_1^2 + \frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2}x_2^2 + \frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2}y_2^2 - 2x_1x_2 + -2y_1y_2}{2y_1y_2} =$$

$$= 1 + \frac{\frac{x_2^2+y_2^2}{x_1^2+y_1^2}(x_1^2+y_1^2) + \frac{x_1^2+y_1^2}{x_2^2+y_2^2}(x_2^2+y_2^2) - 2x_1x_2 + -2y_1y_2}{2y_1y_2} =$$

$$= 1 + \frac{x_2^2+y_2^2+x_1^2+y_1^2-2x_1x_2+-2y_1y_2}{2y_1y_2} = 1 + \frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{2y_1y_2} = cosh(m(AB)).$$

Pierwsza i ostatnia równość wynikają z udowodnionego w paragrafie 0.2 wzoru zastosowanego w pierwszym przypadku do miary odcinka, którego końce mają współrzędne (x_1', y_1'), (x_2', y_2') opisane powyżej, w drugim – do miary odcinka o końcach *A, B.* Pozostałe równości są konsekwencją przekształceń elementarnych na wyrażeniach wymiernych.

Uwaga 2 Ponownie wybraliśmy układ współrzędnych tak, aby półokrąg, w którym inwersje rozważamy miał środek w punkcie o współrzędnych *(0,0).* Usprawiedliwienie takiego postępowania jest identyczne jak to zawarte w Uwadze 1 w paragrafie 0.2.

Pozostałe przypadki pozostawiamy jako ćwiczenie. Dowód uznajemy za zakończony.

1. Rodzaje izometrii płaszczyzny hiperbolicznej.

W rozdziale tym zajmiemy się opisem różnego rodzaju izometrii płaszczyzny hiperbolicznej oraz rozkładem tych izometrii na odbicia w prostych.

1.1 Obrót jako złożenie dwóch odbić w prostych przecinających się.

Uzasadnimy następujące

Twierdzenie 1

Wszystkie przekształcenia będące złożeniem dwóch odbić w prostych przecinających się w ustalonym punkcie pod ustalonym kątem zorientowanym są równe.

1.1.1 Okręgi hiperboliczne.

Aby dokładnie opisać obrót hiperboliczny powinniśmy zaznajomić się z pojęciem okręgu hiperbolicznego.

Przypomnimy najpierw wzór pozwalający policzyć kosinus hiperboliczny długości odcinka o końcach $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$:

$$cosh(m(AB)) = 1 + \frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{2y_1y_2} \qquad (\#)$$

Definicja

Hiperbolicznym okręgiem o środku w punkcie $S=(a,b)$ oraz promieniu R nazywamy zbiór punktów $X=(x,y)$ o tej własności, że $m(SX)=R$.

Wobec powyższego mamy:

$$cosh(R) = 1 + \frac{(a-x)^2+(b-y)^2}{2by}.$$

Po kilku elementarnych przekształceniach tego równania otrzymujemy równanie równoważne:

$$(x-a)^2 + y^2 - 2by\cosh(R) + b^2 = 0.$$

I dalej:

$$(x-a)^2 + (y - b\,cosh(R))^2 = b^2(cosh^2(R) - 1), \qquad (*)$$

czyli:

$$(x-a)^2 + (y - b\,cosh(R))^2 = b^2 sinh^2(R) \qquad (**).$$

Równanie (**) opisuje hiperboliczny okrąg o środku w punkcie *S(a,b)* oraz promieniu *R*.

Warto tu zauważyć, że równanie to opisuje okrąg euklidesowy o środku w punkcie *(a,b·cosh(R))* i promieniu *b·sinh(R).*

Poczyńmy teraz kilka spostrzeżeń:

(A) *wszystkie okręgi o środku w punkcie S=(a,b), wraz z tym punktem, szczelnie wypełniają płaszczyznę hiperboliczną.*

Istotnie: niech punkt *X=(s,t)* będzie dowolnym punktem płaszczyzny hiperbolicznej różnym od *S*. Chcemy znaleźć równanie okręgu o środku w punkcie *S* przechodzącego przez punkt *X*. Potrzebny jest nam zatem promień *R* tego okręgu co do wartości równy *m(SX)*. Zgodnie ze wzorem (#) mamy:

$$R = arccosh(1 + \frac{(a-s)^2+(b-t)^2}{2bt}),$$

co, po podstawieniu do wzoru (*), daje wzór szukanego okręgu:

$$(x-a)^2 + (y - b(1 + \frac{(a-s)^2+(b-t)^2}{2bt}))^2 = b^2(\left(1 + \frac{(a-s)^2+(b-t)^2}{2bt}\right)^2 - 1)$$

(B) *różne okręgi o tym samym środku są rozłączne.*

Wynika to z faktu, że funkcja *cosh(x)* jest funkcją różnowartościową dla$x \in \mathbb{R}^+$.

(C) *hiperboliczny okrąg o środku w S(a,b) i promieniu R:*

$$(x-a)^2 + (y - b\,cosh(R))^2 = b^2 sinh^2(R)$$

jest euklidesowo prostopadły do każdej hiperbolicznej prostej przechodzącej przez S.

Rozważymy dwa przypadki.

CI Hiperboliczna prosta "pionowa" przechodząca przez *S* ma równanie *x=a*. Euklidesowy kąt między hiperboliczną prostą "pionową" a hiperbolicznym okręgiem to kąt między tą prostą a styczną do okręgu wystawioną w jednym z punktów przecięcia prostej i okręgu. Podstawiając do równania okręgu: *x=a,* otrzymujemy współrzędne punktów styczności: (*a, bcosh(R)+bsinh(R)*) oraz (*a, b·cosh(R)-b·sinh(R)*). Równania prostych stycznych w tych punktach to odpowiednio *y=b·cosh(R)+b·sinh(R)* oraz *y=b·cosh(R)-b·sinh(R).* Proste o takich równaniach są prostopadłe do prostej o równaniu *x=a.*

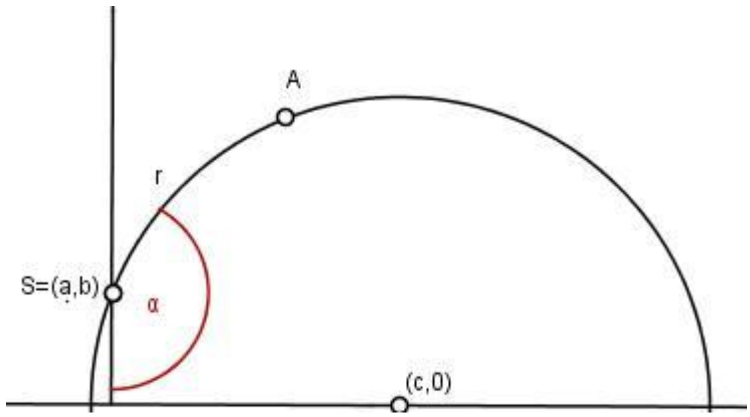
CII Przypomnijmy najpierw, że euklidesowo: okręgi są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy suma kwadratów ich promieni jest równa kwadratowi odległości ich środków.
Niech teraz hiperboliczna prosta będzie euklidesowym półokręgiem o środku w *(c,0)* przechodzącym przez *S.* Zatem promień tego półokręgu to $\sqrt{(a-c)^2 + b^2}$.
Euklidesowy środek rozważanego okręgu to *(a, b*cosh*(R)),* a jego promień to *b·sinh(R).*

Obliczymy teraz sumę kwadratów promieni dla euklidesowych okręgu i półokręgu:
$(a-c)^2 + b^2 + b^2 sinh^2(R) = (a-c)^2 + b^2 cosh^2(R)$, oraz kwadrat odległości ich euklidesowych środków: $(a-c)^2 + b^2 cosh^2(R)$. Obie wielkości są równe. Stąd prostopadłość.

(D) *odbicie w prostej hiperbolicznej zachowuje okręgi euklidesowo prostopadłe do tej prostej.*

Odbicie w hiperbolicznej prostej "pionowej" jest euklidesową symetrią osiową, a euklidesowe symetrie osiowe zachowują okręgi o środku znajdującym się na osi symetrii.
Jeżeli zaś hiperboliczna prosta jest euklidesowym półokręgiem, to odbicie w tej prostej jest euklidesową inwersją. Z elementarnej geometrii euklidesowej wiadomo, że inwersja zachowuje okręgi prostopadłe do okręgu inwersji.

Uwagi (A)-(D) pozwalają nam wprowadzić współrzędne, dzięki którym łatwiej będzie nam opisać złożenie odbić w prostych przecinających się.



Rysunek 6

1.1.2 Współrzędne biegunowe.

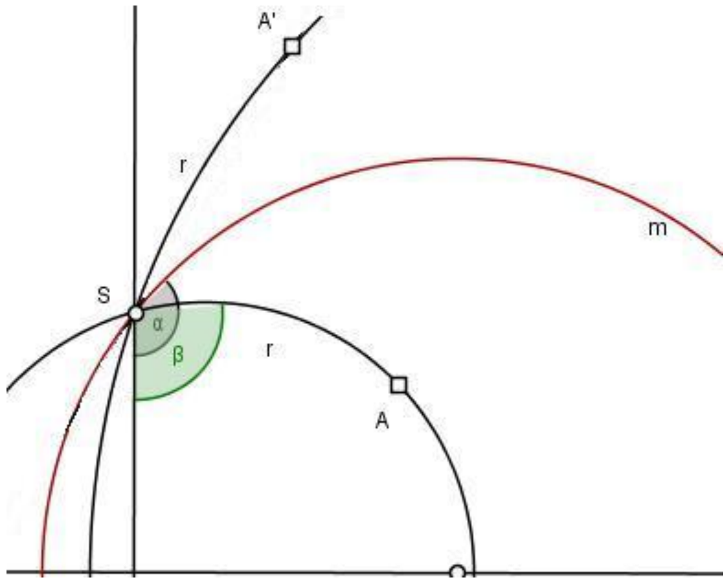
Na płaszczyźnie hiperbolicznej wyróżniamy jeden punkt - nazwiemy go biegunem, niech będzie to punkt *S*. Pierwszą współrzędną r dowolnego punktu *A* z płaszczyzny będzie długość hiperbolicznego odcinka *AS*, czyli odległość punktu *A* od bieguna. Przez punkt *S* prowadzimy hiperboliczną prostą "pionową". Wybieramy jedną z półprostych, na które punkt *S* podzielił prostą "pionową" (u nas będzie to zawsze półprosta ciągnąca się "w dół"), oznaczmy ją jako $S^{-\infty}$ i ustalamy, że drugą współrzędną punktu *A* będzie miara kąta α, którego pierwszym ramieniem jest półprosta $S^{-\infty}$, drugim – półprosta o początku w *S* wyznaczona przez odcinek *AS*, przy czym mierzenia dokonujemy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Przyjmijmy ponadto, że punkty leżące na $S^{-\infty}$ mają drugą współrzędną równą 0. Zatem $\alpha \in [0°, 360°)$. W sytuacji jak na Rysunku 7 możemy napisać, że punkt *A* ma współrzędne biegunowe *(r, β)*, natomiast biegun ma zawsze współrzędne biegunowe *(0,0)*.

1.1.3 Odbicie w prostej opisane we współrzędnych biegunowych.

Opiszemy teraz we współrzędnych biegunowych odbicie w prostej przechodzącej przez biegun.

Niech *S* będzie biegunem, zaś *m* - przechodzącą przez biegun prostą, w której odbicie będziemy rozpatrywać. Oznaczmy kąt jaki tworzy prosta *m* z wyróżnioną półprostą $S^{-\infty}$ przez *α*. Wybierzmy dowolny punkt *A* i opiszmy jego położenie we współrzędnych biegunowych względem wybranego wcześniej bieguna: *A=(r, β).* Przez *A'* oznaczmy obraz punktu *A* przez odbicie w prostej *m.* Ponieważ odbicie w prostej jest izometrią, a punkt *S* jest punktem stałym tego przekształcenia, więc *m(SA')=m(SA)=r,* ponadto punkty *A* oraz *A'* leżą na tym samym hiperbolicznym okręgu o środku w *S.* Aby podać współrzędne punktu *A'* potrzebujemy jeszcze miary odpowiedniego kąta. Korzystając z faktu, że odbicie jest przekształceniem konforemnym obliczamy, że kąt między odcinkiem *SA'* a prostą *m* ma miarę:

- $\alpha - \beta$, gdy $\alpha \geq \beta$ (rysunek 2); wówczas szukane współrzędne punktu *A'* to $(r, \beta+2(\alpha-\beta))=(r, 2\alpha-\beta)$,



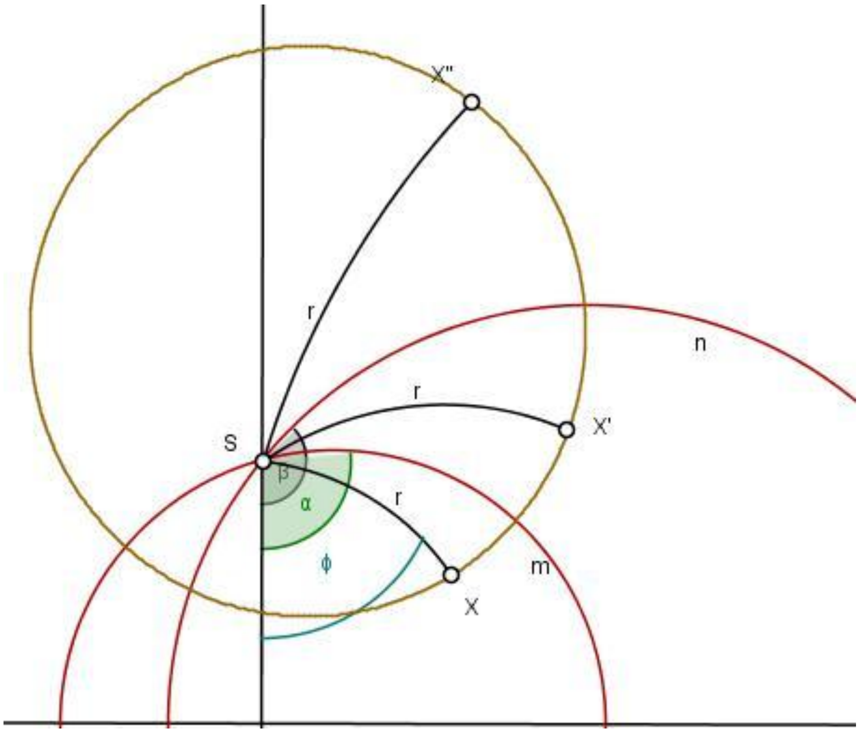
Rysunek 7

- $\beta - \alpha$, gdy $\alpha < \beta$; wówczas szukane współrzędne punktu *A'* to $(r, \beta-2(\beta-\alpha))=(r, 2\alpha-\beta)$.

1.1.4 Złożenie odbić w prostych przecinających się opisane we współrzędnych biegunowych - dowód Twierdzenia 1.

Jesteśmy już gotowi, by opisać we współrzędnych biegunowych złożenie dwóch odbić w prostych przecinających się.

Biegunem *S* niech będzie punkt przecięcia prostych *m* oraz *n.* Niech α będzie kątem między prostą *m* a wyróżnioną półprostą, zaś *β* kątem między prostą *n* a wyróżnioną półprostą. Wybierzmy dowolny punkt opisany we współrzędnych biegunowych: $X=(r;\ \varphi)$. Zgodnie z powyższym obraz X' punktu X przez odbicie w prostej m ma współrzędne biegunowe $X'=(r;\ 2\alpha-\varphi)$. Obraz X'' punktu X' przez odbicie względem prostej n ma współrzędne biegunowe $X''=(r;\ 2\beta-(2\alpha-\varphi))=(r;\ \varphi+2(\beta-\alpha))$. Zauważmy jeszcze tylko, że $\beta-\alpha$ to miara kąta zawartego między prostymi, względem których wykonujemy odbicia. Widać zatem jasno, że obraz dowolnego punktu przez złożenie dwóch odbić w prostych przecinających się zależy jedynie od kąta zawartego między prostymi, względem których wykonujemy odbicia, a nie od wyboru prostych. Obraz ten leży na tym samym okręgu o środku w punkcie przecięcia tych prostych, co argument. Uwagi powyższe uzasadniają nazwanie tego przekształcenia obrotem.



Rysunek 8

1.1.5 Dwie definicje obrotu i ich równoważność.

Z powyższych rozważań wynika, że ma sens następująca definicja obrotu hiperbolicznego.

Definicja 1

Obrotem względem punktu S o kąt 2α nazywamy każde złożenie dwóch odbić w prostych przecinających się w punkcie S pod kątem α.

Pamiętajmy jednak, że obrót hiperboliczny klasycznie definiuje się podobnie jak obrót euklidesowy:

Definicja 2

Obrotem względem punktu S o kąt 2α nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które każdemu punktowi X przypisuje taki punkt X', że $m(SX)=m(SX')$ oraz kąt $X'SX$ ma miarę 2α.

Uzasadnimy równoważność obu definicji.

Obrót w sensie Definicji 1 jest obrotem w sensie Definicji 2: uzasadniliśmy już, że obraz X' punktu X przez złożenie odbić w prostych przecinających się w punkcie S pod kątem α ma następujące własności:

- $m(SX')=m(SX)$,
- kąt $X'SX$ ma miarę 2α.

Są zatem spełnione warunki Definicji 2 obrotu.

Pozostaje uzasadnić, że obrót w sensie Definicji 2 jest obrotem w sensie Definicji1:

W tym celu opiszemy obrót z Definicji 2 we współrzędnych biegunowych i przekonamy się, że jest to to samo przekształcenie, którym zajmowaliśmy się do tej pory.

Wybierzmy biegun S oraz ustalmy dowolny punkt X. Z definicji 2 wynika, że obraz X' punktu X przez obrót o 2α względem S leży na okręgu hiperbolicznym o środku w S i promieniu $r=m(SX)$ (bo $m(SX)=m(SX')$). Oznaczmy kąt między półprostą $S^{-\infty}$ a odcinkiem SX przez φ. Zatem współrzędne biegunowe punku X to (r, φ). Ponieważ kąt $X'SX$ ma miarę 2α, więc współrzędne biegunowe punktu X' to $(r, \varphi+2\alpha)$. Z poprzednich rozważań wiemy, że punkt o tych współrzędnych jest obrazem punktu X przez złożenie odbić w prostych przecinających się w punkcie S pod kątem α.

Stąd równoważność obu definicji obrotu.

1.1.6 Kilka własności obrotu.

Uzasadnimy ważne dla naszych rozważań własności obrotu wokół punktu $S(a,b)$ o kąt 2α.

(A) *Jedynym punktem stałym nietrywialnego (niebędącego identycznością) obrotu jest punkt S.*

Niech biegunem będzie punkt S. Łatwo zauważyć, że biegun - środek obrotu jest punktem stałym tego przekształcenia.
Warunek, że punkt X o współrzędnych biegunowych (r,φ) jest punktem stałym obrotu oznacza, że $(r,\varphi)=(r,\varphi+2\alpha)$, co z kolei implikuje, że 2α jest całkowitą wielokrotnością kąta pełnego, ale wówczas otrzymane przekształcenie będzie identycznością.

(B) *Obrót taki zachowuje wszystkie okręgi o środku w punkcie obrotu.*

Wystarczy zauważyć, że obrót nie zmienia pierwszej współrzędnej biegunowej punktu.

1.2 Translacja osiowa jako złożenie dwóch odbić w prostych rozchodzących się.

Przypomnijmy najpierw pewne fakty dotyczące geometrii hiperbolicznej:

- *każde dwie proste rozchodzące się mają dokładnie jedną wspólną prostą prostopadłą,*
- *dwie różne proste prostopadłe do trzeciej prostej są prostymi rozchodzącymi się,*
- *odległością między prostymi rozchodzącymi się nazywamy długość odcinka wyznaczonego przez punkty przecięcia tych prostych z ich wspólną prostopadłą.*

Uzasadnimy następujące

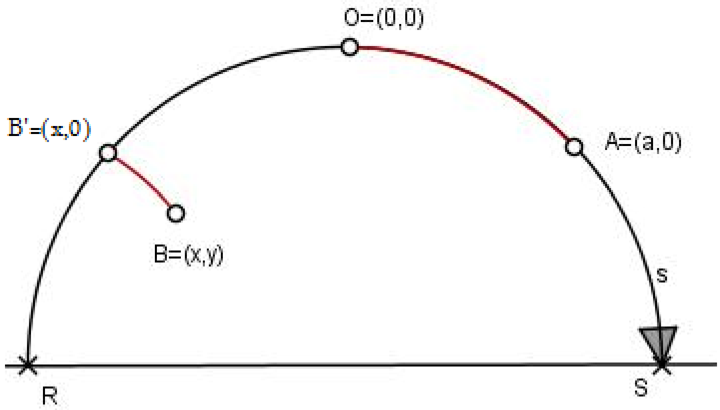
Twierdzenie 2

Dla ustalonej prostej s oraz ustalonej liczby nieujemnej d wszystkie przekształcenia będące złożeniem w odpowiedniej kolejności dwóch odbić w prostych rozchodzących się prostopadłych do prostej s oraz odległych o d są równe.

Do opisu przekształceń, o których mowa w Twierdzeniu 2, przydadzą się nam pewne narzędzia.

1.2.1 Współrzędne osiowe.

Ustalmy dowolną prostą s wraz z naturalnym porządkiem $\preccurlyeq$, nazwiemy ją osią główną, przechodzącą przez punkty idealne R, S (dopuszczamy punkt w nieskończoności „u góry”). Na tej prostej wyróżniamy jeden punkt O. Prosta s podzieliła płaszczyznę hiperboliczną na dwie półpłaszczyzny: jedną z nich nazwijmy półpłaszczyzną dodatnią, drugą – ujemną.



Rysunek 9

Przez *d(X,Y)* oznaczmy nieeuklidesową odległość punktu *X* od punktu *Y*.
Ustalamy, że punkt *O* ma współrzędne osiowe *(0,0)*.
Punktowi $A \in s$ przyporządkowujemy współrzędne *(a,0)*, gdzie:

$$a = \begin{cases} d(A,O), & gdy\ O \preccurlyeq A; \\ -d(A,O), & gdy\ A \preccurlyeq O. \end{cases}$$

Punktowi $B \notin s$ przyporządkowujemy współrzędne *(x,y)*, gdzie:
B' to rzut prostopadły punktu *B* na oś główną,

$$x = \begin{cases} d(B',O), & gdy\ O \preccurlyeq B', \\ -d(B',O), & gdy\ B' \preccurlyeq O, \end{cases}$$

oraz

$$y = \begin{cases} d(B,B'), & gdy\ B\ leży\ na\ półpłaszczyźnie\ dodatniej, \\ -d(B,B'), & gdy\ B\ leży\ na\ półpłaszczyźnie\ ujemnej. \end{cases}$$

1.2.2 Odbicie w prostej opisane we współrzędnych osiowych.

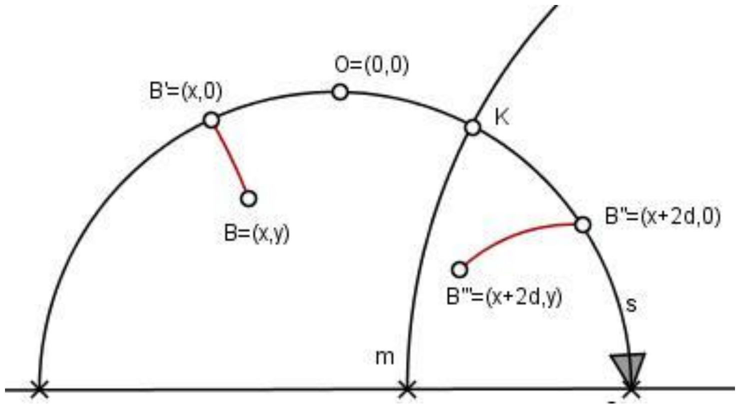
Opiszemy teraz we współrzędnych osiowych odbicie w prostej *m* prostopadłej do ustalonej osi głównej *s* z wyróżnionym punktem *O*.

Aby wyznaczyć współrzędne obrazu punktu *B=(x,y)* przez odbicie w prostej *m* prostopadłej do osi głównej oznaczmy punkt przecięcia prostej *m* oraz osi głównej przez *K=(a,0)* i rozważmy następującą konstrukcję:

1) Rzutujemy punkt *B* na oś główną otrzymując punkt *B'* o współrzędnych osiowych *(x,0)*, jego odległość od punktu *K* jest równa:
   a) *d=a-x*, jeżeli $B' \preccurlyeq K$ (Rysunek 10),
   b) *d=x-a*, jeżeli $K \preccurlyeq B'$,
2) Punkt *B''* otrzymamy odmierzając odcinek długości *d* na osi głównej po drugiej stronie punktu *K*:
   a) jeżeli $B' \preccurlyeq K$, to punkt *B''* ma współrzędne *(x+2d,0)=(2a-x,0)*,
   b) jeżeli $K \preccurlyeq B'$, to punkt *B''* ma współrzędne *(x-2d,0)=(2a-x,0)*.

Zwróćmy uwagę, że w obu przypadkach współrzędne punktu *B"* wyrażają się tym samym wzorem.

3) Punkt *B'''* to punkt odmierzony w odległości równej *d(B,B')* na prostej przechodzącej przez *B"* prostopadłej do osi głównej po tej samej stronie osi głównej, po której leży punkt *B*. Punkt *B'''* ma współrzędne *(2a-x,y)*.



Rysunek 10

Pokażemy, że punkt *B'''* jest obrazem punktu *B* przez odbicie w prostej *m*.

Obrazem przez odbicie w prostej *m* odcinka *BB'* prostopadłego do prostej *s* jest odcinek tej samej długości co *BB'* również prostopadły do prostej *s* (odbicie jest izometrią, więc i przekształceniem konforemnym). Obrazem punktu $B' \in s$ jest punkt $B'' \in s$ taki, że *d(B',K)=d(K,B"),* bo proste prostopadłe do prostej względem której dokonujemy odbicia są zachowywane przez to odbicie. Obraz *B'''* punktu *B* leży po tej samej stronie prostej *s*, co punkt *B* (ponieważ proste *BB'''* [z definicji odbicia] i *s* [z założenia] są prostopadłe do prostej *m*, więc są prostymi rozchodzącymi się, zatem nie mogą się przecinać, czyli punkt *B'''* leży po tej samej stronie prostej *s* co punkt *X*).
Stąd poprawność konstrukcji.

Podsumowanie. Wzór na odbicie w prostej.

Ustalmy oś *s* oraz prostą *m* prostopadłą do *s*. Niech punkt przecięcia prostych *s* i *m* ma współrzędne osiowe *(a,0)*. Obraz przez odbicie S_m w prostej *m* dowolnego punktu *X* o współrzędnych osiowych *(x,y)* ma współrzędne osiowe *(2a-x,y)*:

$$S_m(x,y) = (2a - x, y).$$

1.2.3 Złożenie odbić w prostych rozchodzących się opisane we współrzędnych osiowych - dowód Twierdzenia 2.

Dla dwóch danych prostych rozchodzących się *k* i *m* prowadzimy ich wspólną prostą prostopadłą- będzie to nasza oś główna *s*, na której wyróżniamy punkt *O*. Punkty przecięcia prostych *k* i *m* z osią główną oznaczmy odpowiednio *K*, *M*, zaś ich

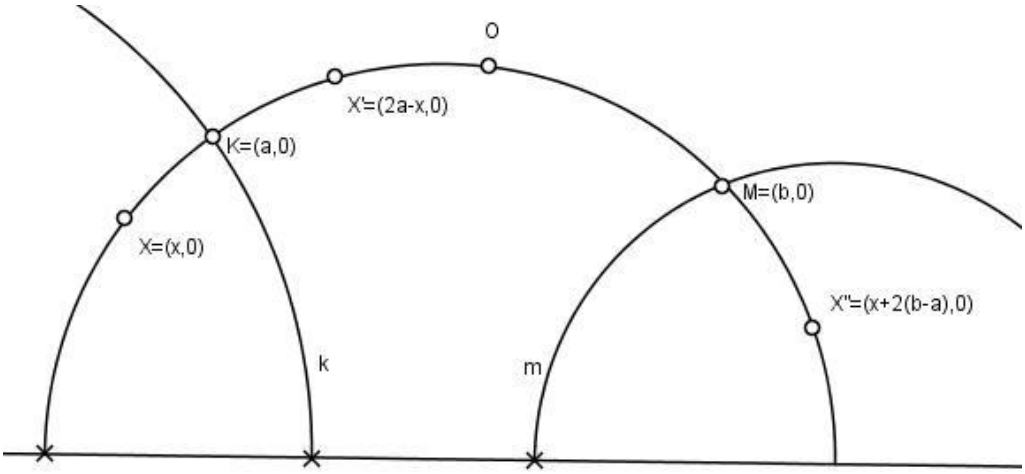
współrzędne odpowiednio przez *(a,0)* i *(b,0)*.
Wówczas obraz dowolnego punktu $X=(x,y)$ przez złożenie S_kS_m odbić kolejno w prostych m i k ma współrzędne:

$$S_kS_m(x,y)=S_k(2b-x,y)=(2a-(2b-x),y)=(x+2(a-b),y)$$

Dla dowodu Twierdzenia 2 zauważmy, że:

- jeżeli $M \preccurlyeq K$, to wielkość a-b jest równa $d(K,M)=d(k,m)$,
- jeżeli $K \preccurlyeq M$, to wielkość a-b jest równa $-d(K,M)= -d(k,m)$.

Zatem obraz dowolnego punktu X przez złożenie odbić w prostych rozchodzących się prostopadłych do ustalonej prostej s zależy jedynie od odległości tych prostych od siebie nawzajem (oraz od porządku położenia punktów przecięcia tych prostych z prostą s), nie zaś od wyboru konkretnej pary prostych.



Rysunek 11

1.2.4 Dwie definicje translacji osiowej i ich równoważność.

Zdefiniujmy najpierw translację osiową w sposób, który sugerują rozważania zawarte w tym rozdziale:

Definicja 3

Translacją osiową wzdłuż osi (prostej hiperbolicznej) s o długość 2d nazywamy każde złożenie dwóch odbić w prostych prostopadłych do s odległych od siebie nawzajem o d.

Klasycznie translację taką można zdefiniować następująco:

Definicja 4

Translacją osiową wzdłuż osi s o długość $2d$ nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które każdemu punktowi X przypisuje taki punkt X', że X' leży po tej samej stronie s, co punkt X, w tej samej odległości od s co X oraz długość odcinka wyznaczonego na osi s przez rzuty prostopadłe punktów X i X' jest równa $2d$.

Każde przekształcenie opisane Definicją 3 spełnia Definicję 4, ponieważ, jak już wiemy:

- obraz X' każdego punktu X przez odbicie w prostej m leży po tej samej stronie prostej prostopadłej do m, co punkt X,
- z paragrafu 1.2.3 wynika, że długość odcinka wyznaczonego przez rzuty prostopadłe na oś główną s punktu i jego obrazu przez złożenie dwóch odbić w prostych prostopadłych do s odległych od siebie nawzajem o d jest równa $2d$.

Aby pokazać, że każde przekształcenie opisane Definicją 4 spełnia Definicję 3 zauważmy, że obraz dowolnego punktu $X=(x,y)$ (współrzędne względem osi s) przez przekształcenie z Definicji 4 ma współrzędne osiowe $(x+2d,y)$ lub $(x-2d,y)$, a więc takie same jak w przypadku przekształcenia z Definicji 3.
Stąd równoważność obu definicji.

1.2.5 Kilka własności translacji osiowej.

We właściwym czasie powołamy się na następujące własności translacji o osi s o długość $2d$:

(A) *Translacja niebędąca identycznością nie ma punktów stałych.*

Gdyby punkt o współrzędnych osiowych (x,y) był punktem stałym tego przekształcenia, wówczas jego współrzędne musiałyby być równe współrzędnym jego obrazu: $(x,y)=(x+2d,y)$, co oznacza, że $d=0$, czyli translacja jest identycznością.

(B) *Translacja zachowuje oś translacji.*

Obraz każdego punktu leżącego na osi translacji również leży na osi.

(C) *Translacja zachowuje ekwidystanty, których prostą bazową jest oś translacji.*

Obraz przez translację punktu o współrzędnych (x,y) ma współrzędne $(x+2d,y)$, co oznacza, że leży po tej samej stronie osi i w tej samej odległości od osi co jego argument, zatem leży na tej samej ekwidystancie, co jego argument.

1.3 Translacja horocykliczna jako złożenie dwóch odbić w prostych asymptotycznych.

1.3.1 Definicja translacji horocyklicznej.

Definicja 5

Translacją horocykliczną nazywamy każde przekształcenie płaszczyzny hiperbolicznej, które jest złożeniem dwóch odbić w prostych asymptotycznych.

1.3.2 Lemat o odbiciu względem obrazu prostej przez izometrię.

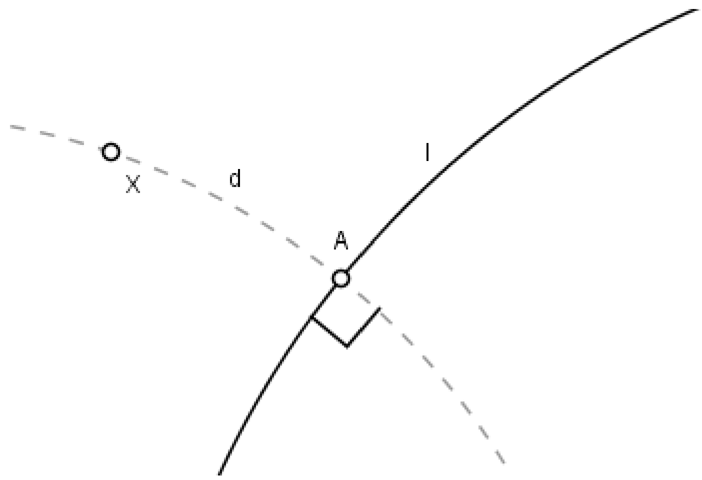
W następnym paragrafie przeprowadzimy dowód twierdzenia, które pozwoli nam zastępować proste, w których odbicia składają się na daną translację horocykliczną innymi prostymi tak, aby otrzymać te samą translację. W dowodzie tego twierdzenia potrzebny będzie następujący

Lemat

Niech S_l będzie odbiciem w prostej l, F - dowolną izometrią płaszczyzny hiperbolicznej, zaś $S_{F(l)}$ - odbiciem w prostej będącej obrazem prostej l przez przekształcenie F. Wówczas

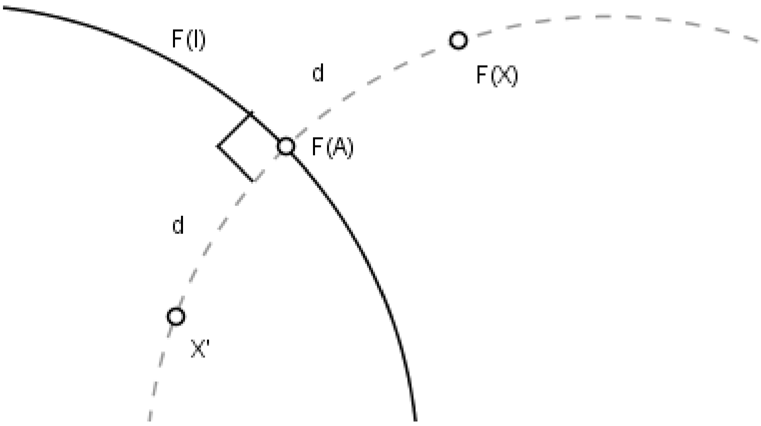
$$S_l = F^{-1} S_{F(l)} F.$$

Dla dowodu ustalmy prostą *l* oraz dowolny punkt *X*. Przez *A* oznaczmy punkt będący rzutem prostopadłym *X* na *l*, przez *d* – odległość *A* od *X* (zatem i odległość *X* od *l*).



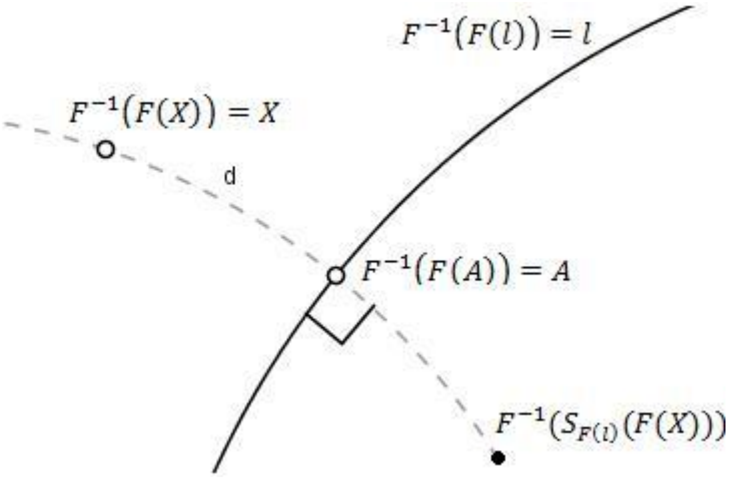
Rysunek 12

Rozważmy obraz *F(l)* prostej *l* oraz obraz *F(X)* punktu *X* przez dowolną izometrię *F*. Oczywiście *F(A)* ∈ *F(l)*. Ponadto *F(A)* jest rzutem prostopadłym punktu *F(X)* na prostą *F(l)*, bo odcinek o końcach *F(X)*, *F(A)* będący obrazem odcinka *XA* prostopadłego do *l* musi być prostopadły do *F(l)* oraz *d(F(X),F(l)) =d =d(F(X),F(A))*.



Rysunek 13

Wyznaczmy odbicie punktu *F(X)* w prostej *F(l)*, czyli $S_{F(l)}(F(X))$:=*X'*. Pokażemy, że obraz tego punktu przez F^{-1} jest jednocześnie obrazem punktu *X* przez odbicie w prostej *l*.



Rysunek 14

Istotnie $F^{-1}\big(F(l)\big) = l$, $F^{-1}\big(F(X)\big) = X$, $F^{-1}\big(F(A)\big) = A$. Ponieważ izometrie przeprowadzają proste prostopadłe na proste prostopadłe, więc $F^{-1}(X')$ leży na prostej przechodzącej przez $F^{-1}\big(F(A)\big) = A$ prostopadłej do prostej l (więc jest prosta równa prostej wyznaczonej przez X i A) w odległości d od niej po stronie przeciwnej niż $F^{-1}\big(F(X)\big) = X$, co stanowi definicję obrazu punktu X przez odbicie w prostej l. Zatem dla dowolnego punktu X mamy $S_l(X) = F^{-1}(S_{F(l)}(F(X)))$, co kończy dowód Lematu .

1.3.3 Twierdzenie o złożeniu dwóch odbić w prostych asymptotycznych.

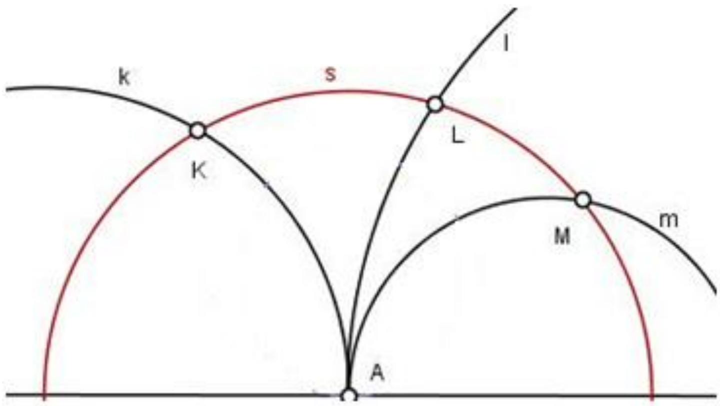
Uzasadnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3

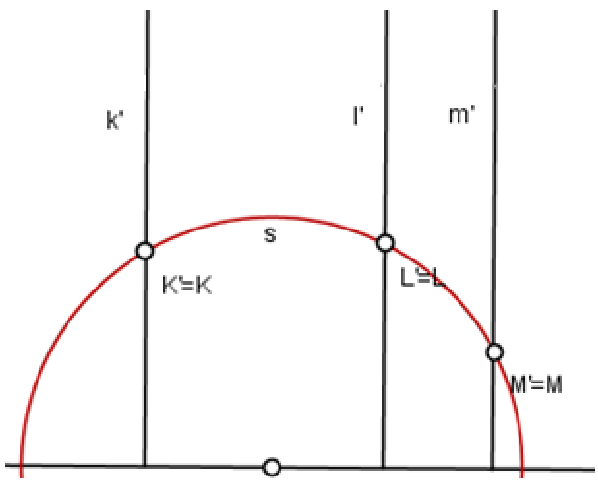
Dla ustalonego punktu idealnego A oraz trzech prostych asymptotycznych k, l, m przechodzących przez A istnieje prosta asymptotyczna z prostymi k, l, m taka, że złożenie odbić w prostych k i l jest tym samym przekształceniem, co złożenie odbić w prostych m i n.

Zgodnie z powyższym daną translację horocykliczną można przedstawić na wiele różnych sposobów jako złożenie odbić w dwóch prostych asymptotycznych.

Dla dowodu wybierzmy dowolne proste *k, l, m* z ustalonego pęku prostych asymptotycznych.
Naszym celem jest znalezienie prostej *n* takiej, że złożenie odbić w prostych *k* i *l* jest tym samym przekształceniem co złożenie odbić w prostych *m* i *n.*
Rozważmy obraz prostych *k, l, m* przez odbicie w hiperbolicznej prostej *s* będącej euklidesowym półokręgiem o środku w *A.* Przez *K, L, M* oznaczmy punkty przecięcia odpowiednio prostych *k, l, m* z prostą *s.*

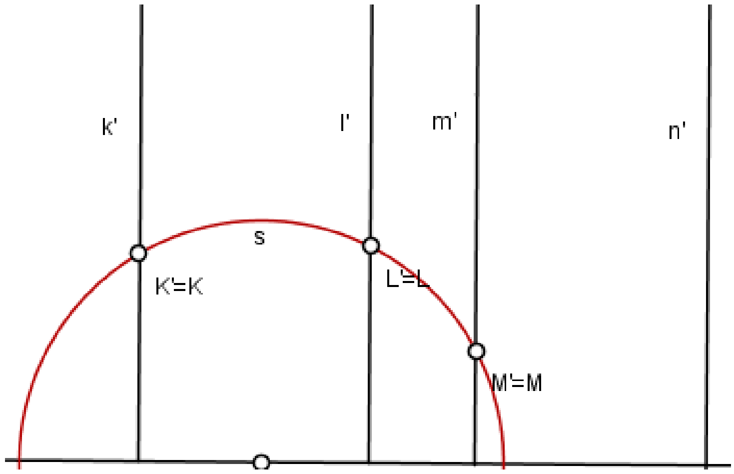


Rysunek 15



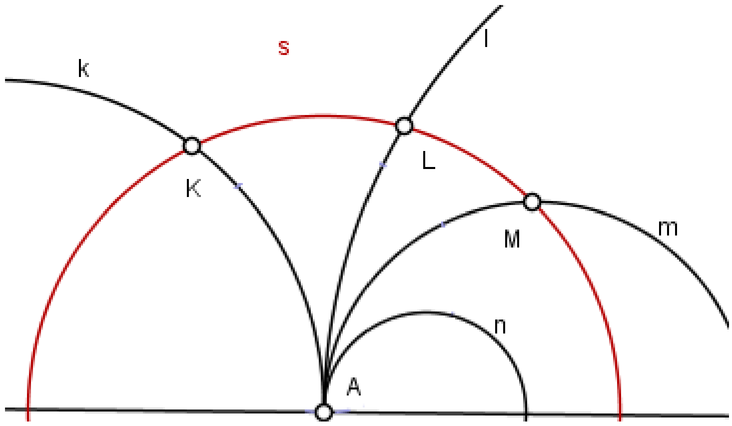
Rysunek 16

Obrazami nie pionowych prostych k, l, m są proste pionowe k', l', m'. Dla prostej m' możemy łatwo dobrać prostą n' taką, że złożenie odbić w prostych k' i l' będzie tym samym przekształceniem, co złożenie odbić w prostych m' i n'. Prostą n' dobieramy tak, by euklidesowa translacja powstała ze złożenia odbić w prostych m', n' była równa euklidesowej translacji powstałej ze złożenia odbić w prostych k', l'.



Rysunek 17

Wszystkie cztery proste przeprowadźmy ponownie przez odbicie w prostej s. Oczywiście obrazami k', l', m' są proste k, l, m; obraz prostej n' oznaczmy przez n.



Rysunek 18

Uzasadnimy, korzystając z Lematu z paragrafu 1.3.2, że tak znaleziona prosta n spełnia stawiane przez nas wymagania, tj. złożenie odbić w prostych k i l jest tym samym przekształceniem co złożenie odbić w prostych m i n.

Przez S_v będziemy oznaczać odbicie w prostej v. Za F w Lemacie do Twierdzenia 3 przyjmijmy S_s, oczywiście $F^{-1}=S_s^{-1}=S_s$. Naszym celem jest pokazanie, że $S_k S_l = S_m S_n$ wiedząc, że

$S_{k'} S_{l'} = S_{m'} S_{n'}$. Zauważmy, że zachodzi następujący ciąg równości:

$$S_k S_l = S_s S_{k'} S_s S_s S_{l'} S_s = S_s S_{k'} S_{l'} S_s = S_s S_{m'} S_{n'} S_s = S_s S_{m'} S_s S_s S_{n'} S_s = S_m S_n,$$

Pierwsza i ostatnia równość wynika z Lematu ($S_v = S_s S_{v'} S_s$, gdzie $v'=S_s(v)$), druga i czwarta z łączności składania przekształceń i faktu $S_s S_s^{-1}=Id$, gdzie Id jest przekształceniem identycznościowym, zaś trzecia równość to konsekwencja założenia $S_{k'}S_{l'} = S_{m'}S_{n'}$.

1.3.4 Kilka własności translacji horocyklicznej.

Wykażemy, że translacja horocykliczna

(A) *nie ma punktów stałych,*

(B) *nie zachowuje żadnych prostych.*

Najpierw uzasadnimy te własności w przypadku, gdy proste generujące translację są pionowe. Wówczas złożenie dwóch odbić w tych prostych jest euklidesową translacją obciętą do półpłaszczyzny. Jak wiadomo takie przekształcenie nie zachowuje żadnych punktów. Pod wpływem takiej izometrii zarówno hiperboliczne proste pionowe, jak i hiperboliczne proste półokręgi zostaną przesunięte.

Aby uzasadnić obie własności dla translacji horocyklicznej będącej złożeniem dwóch odbić w prostych asymptotycznych nie pionowych, skorzystamy z udowodnionego w paragrafie 1.3.2 Lematu.

Wprowadźmy najpierw oznaczenia:

T_1 -złożenie odbić S_k, S_l w prostych asymptotycznych nie pionowych k i l; $T_1 = S_k\, S_l$

F -izometria przekształcająca proste k i l na pionowe proste asymptotyczne k' i l',

T_2 -złożenie odbić $S_{k'}$, $S_{l'}$ w prostych k' i l'; $T_2 = S_{k'}\, S_{l'}$.

Zauważmy, że zachodzi następujący ciąg równości:

$$T_1 = S_k S_l = F^{-1} S_{k'} F F^{-1} S_{l'} F = F^{-1} S_{k'} S_{l'} F = F^{-1} T_2 F,$$

przy czym pierwsza i czwarta równość wynika z definicji T_1, T_2, druga – z Lematu, trzecia z łączności składania przekształceń.
Aby uzasadnić własność **(A)** załóżmy nie wprost, że przekształcenie T_1 ma punkt stały X. Wówczas $T_1(X) = F^{-1}\, T_2 F\,(X) = X$. Nakładając na obie strony tej równości przekształcenie F otrzymujemy $FF^{-1}\, T_2 F\,(X) = F(X)$, czyli $T_2(F(X)) = F(X)$, co oznacza, że przekształcenie T_2 ma punkt stały $F(X)$ wbrew założeniu. Otrzymana sprzeczność kończy uzasadnienie.
Podobne rozumowanie pokazuje prawdziwość własności **(B)**.

1.4 Odbicie z poślizgiem jako złożenie trzech odbić w prostych.

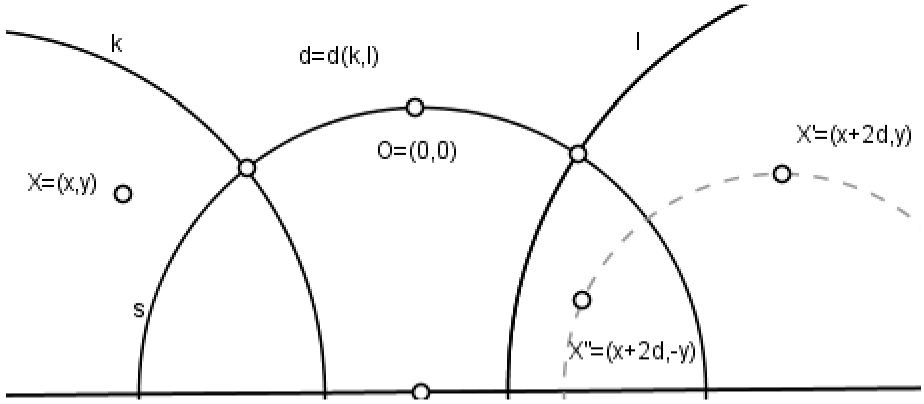
W tym paragrafie podamy i omówimy przykład przekształcenia będącego złożeniem trzech odbić w prostych. Jak się później okaże jest to jedyna izometria, której nie można przedstawić w postaci złożenia mniej niż trzech odbić w prostych.

1.4.1 Definicja i własności odbicia z poślizgiem.

Definicja 6

Odbiciem z poślizgiem wzdłuż osi s o długość 2d (d>0) nazywamy przekształcenie płaszczyzny hiperbolicznej będące złożeniem translacji osiowej (paragraf 1.2) wzdłuż osi s o długość 2d z odbiciem w prostej s.

Wobec paragrafu 1.2 łatwo zauważyć, że tak zdefiniowane przekształcenie można przedstawić w postaci złożenia trzech odbić w prostych: wystarczy rozłożyć na odbicia translację osiową – jest to złożenie dwóch odbić w prostych *k* i *l* rozchodzących się prostopadłych do osi *s*. Oczywiście przedstawienia odbicia z poślizgiem w postaci złożenia trzech odbić w prostych można dokonać na wiele sposobów, co wynika z analogicznej własności dla translacji osiowej.



Rysunek 19

Wprowadzając współrzędne osiowe takie, jak w paragrafie 1.2 uzasadnimy kilka własności odbicia z poślizgiem.

(A) *Odbicie z poślizgiem nie ma punktów stałych.*

Współrzędne osiowe (względem osi *s*) obrazu *X''* dowolnego punktu *X=(x,y)* przez odbicie z poślizgiem wzdłuż osi *s* o długość *2d* są równe *(x+2d,-y)*. Załóżmy, że punkt *X* jest punktem stałym tego przekształcenia; w szczególności $x=x+2d$, czyli $d=0$, co stanowi sprzeczność z definicją.

(B) *Odbicie z poślizgiem zachowuje oś odbicia.*

Odbicie z poślizgiem jest złożeniem odbicia w prostej *s* oraz translacji osiowej wzdłuż *s*. Każde z tych przekształceń zachowuje prostą *s*, więc ich złożenie również.

(C) *Obraz dowolnego punktu X leży po przeciwnej stronie osi niż punkt X lub oba punkty leżą na osi.*

Współrzędne osiowe obrazu przez translację osiową wzdłuż *s* o długość *2d* punktu X o współrzędnych (x,y) są równe $(x+2d,-y)$. Drugie współrzędne obu punktów są liczbami przeciwnymi, co z definicji współrzędnych osiowych oznacza, że leżą po przeciwnej stronie osi lub oba leżą na osi.

(D) *Jeśli proste k, m są prostopadłe do prostej s, to* $S_mS_sS_k=S_sS_mS_k=S_mS_kS_s$.

Ustalmy dowolny punkt X o współrzędnych osiowych względem prostej s równych (x,y). Punkty przecięcia prostych k, l z prostą s oznaczmy przez K, L, a ich współrzędne osiowe przez $K=(a,0)$, $L=(b,0)$. Opiszemy teraz we współrzędnych osiowych obrazy punktu X przez każde z trzech przekształceń $S_mS_sS_k$, $S_sS_mS_k$, $S_mS_kS_s$ i przekonamy się, że w każdym przypadku otrzymamy punkty o tych samych współrzędnych osiowych:

$S_mS_sS_k(x,y)= S_mS_s(2a-x,y)= S_m(2a-x,-y)= (2b-(2a-x),-y)= (x+2(b-a),-y)$,

$S_sS_mS_k(x,y)= S_sS_m(2a-x,y)= S_s(2b-(2a-x),y)= (x+2(b-a),-y)$,

$S_mS_kS_s(x,y)= S_mS_k(x,-y)= S_m(2a-x,-y)= (2b-(2a-x),-y)= (x+2(b-a),-y)$.

2. Izometria jako złożenie odbić w prostych.

Głównym celem tego rozdziału będzie udowodnienie, że każdą izometrię płaszczyzny hiperbolicznej można przedstawić w postaci złożenia co najwyżej trzech odbić w prostych.

2.1 Twierdzenie o obrazach trzech niewspółliniowych punktów.

W dalszej części tego rozdziału będzie nam niezbędne twierdzenie, które udowodnimy w tym paragrafie.

Twierdzenie

Obrazy przez izometrię trzech niewspółlniowych punktów jednoznacznie tę izometrię definiują.

Aby uzasadnić powyższe twierdzenie przyjmijmy następujące oznaczenia:

A, B, C	- niewspółliniowe punkty płaszczyzny hiperbolicznej,
T	- izometria płaszczyzny hiperbolicznej,
A', B', C'	- obrazy punktów *A, B, C* przez izometrię *T.*

Pokażemy, że obraz *X'* dowolnego punktu *X* przez tę izometrię jest wyznaczony jednoznacznie.

Przez punkty *A, B* przeprowadźmy prostą *pr.AB*. Punkt *X* albo leży na *pr.AB*, albo po tej samej stronie prostej *pr.AB* co punkt *C*, albo po przeciwnej. Ponieważ izometrie przeprowadzają proste na proste, więc *T(pr.AB)=pr.A'B'*. Przez punkt *X* przeprowadźmy prostą prostopadłą do *pr.AB*. Punkt przecięcia tych prostych oznaczmy przez $X_\perp$. Proste prostopadłe są przeprowadzone przez izometrię na proste prostopadłe, ponadto obrazem punktu $X_\perp$ przecięcia prostych jest punkt $X'_\perp$ przecięcia obrazów tych prostych. Wobec tego $pr.XX_\perp$ przejdzie przez izometrię *T* na prostą prostopadłą do prostej *pr.A'B'* przechodzącą przez punkt $X'_\perp$. Oczywiście $d(X', X'_\perp)=d(X, X_\perp)=:d$. Są dokładnie dwa punkty leżące na prostej prostopadłej do *pr.A'B'* w odległości *d* od punktu $X'_\perp$: jeden z nich leży po tej samej stronie prostej *pr.A'B',* co punkt *C'*, drugi po przeciwnej. Pozostaje ustalić, który z nich jest obrazem punktu *X* przez izometrię *T.* W tym celu skorzystamy z następującej własności: izometrie zachowują strony przekształcanych prostych (tzn. obrazy przez izometrię punktów leżących po jednej stronie danej prostej leżą po jednej stronie obrazu tej prostej). Jeżeli *X* leży po tej samej stronie *pr.AB* co punkt *C*, to *X'* leży po tej samej stronie prostej *pr.A'B'* co punkt *C'*, jeżeli punkty *X, C* leżą po przeciwnych stronach prostej *pr.AB,* to punkty *X', C'* leżą po przeciwnych stronach prostej *pr.A'B'* (tylko wówczas *d(X',C')=d(X,C)*). Obraz punktu *X* został wyznaczony jednoznacznie, co kończy dowód.

2.2 Izometria jako złożenie co najwyżej pięciu odbić w prostych.

Niech T będzie dowolną izometrią płaszczyzny hiperbolicznej, A, B, C trzema niewspółliniowymi punktami tej płaszczyzny, zaś A', B', C' ich obrazami przez izometrię T. Szukamy izometrii T_0 będącej złożeniem odbić w prostych, która przekształca punkty A, B, C odpowiednio na punkty A', B', C'. Zadanie wykonamy w kilku krokach, przedstawiając T_0 jako złożenie kilku prostszych przekształceń T_1, T_2, T_3, z których każde będzie złożeniem odbić.

1) Jeżeli $A \neq A'$, to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez punkty A i A'. Rozważmy translację osiową T_1 wzdłuż tej prostej o odległość $d=d(A,A')$. Oczywiście $T_1(A)=A'$, ponadto oznaczmy $T_1(B)=B_1$, $T_1(C)=C_1$. Ponieważ T_1 jest izometrią, więc $d(A,B)=d(A',B_1)$, $d(A,C)=d(A',C_1)$.
   Jeżeli $A = A'$, to weźmy $T_1=Id$.
2) Jeżeli $B_1 \neq B'$, to rozważmy obrót T_2 wokół A' o taki kąt α, by $T_2(B_1)=B'$, taki obrót istnieje, bo $d(A',B')=d(A',B_1)$. Mamy zatem $T_2T_1(A)=A'$, $T_2T_1(B)=B'$.
   Jeżeli $B_1 = B'$, to weźmy $T_2=Id$.

   Pozostaje sprawdzić, gdzie znajduje się obraz punktu C przez to przekształcenie.
   Izometrie przeprowadzają proste hiperboliczne na proste hiperboliczne, zatem $T_2T_1(pr.AB)=pr.A'B'$ oraz $T(pr.AB)=pr.A'B'$, gdzie $pr.AB$ oznacza prostą przechodzącą przez punkty A i B. Istnieje dokładnie jedna prosta prostopadła do $pr.AB$ przechodząca przez punkt C. Niech $C_\perp$ oznacza rzut punktu C na $pr.AB$. Ponieważ izometrie przeprowadzają pary prostych prostopadłych na pary prostych prostopadłych oraz zachowują porządek na prostych, więc $T_2T_1(C_\perp)=T(C_\perp)$ oraz $T_2T_1(C)$ i $T(C)$ leżą na prostej prostopadłej do $pr.A'B'$ przechodzącej przez $T_2T_1(C_\perp)$ w odległości równej $d(C,C_\perp)$ od tej prostej. Zatem $T(C)= T_2T_1(C)$, albo $T(C)$ oraz $T_2T_1(C)$ leżą na tej samej prostej prostopadłej do $pr.A'B'$ po przeciwnych jej stronach, w tej samej od niej odległości.

3) Jeżeli $T(C)\neq T_2T_1(C)$, to rozważmy odbicie T_3 w prostej przechodzącej przez A' i B'. To odbicie zachowa $pr.A'B'$, natomiast punkt $T_2T_1(C)$ przeprowadzi na punkt $T(C)$.
   Jeżeli $T(C)= T_2T_1(C)$, to weźmy $T_3=Id$.

   Mamy zatem $T_3T_2T_1(A)=T(A)$, $T_3T_2T_1(B)=T(B)$, $T_3T_2T_1(C)=T(C)$.

Wobec twierdzenia z poprzedniego paragrafu mamy, że $T_3T_2T_1=T$.
Ponieważ translacja osiowa i obrót hiperboliczny są złożeniami dwóch odbić w prostych, więc przekształcenie T_2T_1 jest złożeniem co najwyżej czterech odbić w prostych.
Zatem dowolna izometria T płaszczyzny hiperbolicznej jest złożeniem trzech izometrii T_1, T_2, T_3, z których:

- T_1 jest translacją osiową lub przekształceniem identycznościowym,

- T_2 jest obrotem lub przekształceniem identycznościowym,
- T_3 jest odbiciem lub przekształceniem identycznościowym.

Możemy teraz sformułować ważny dla nas wniosek.

Wniosek

Każdą izometrię można przedstawić w postaci złożenia co najwyżej pięciu odbić w prostych.

W następnym paragrafie postaramy się ten wynik poprawić.

2.3 Izometria jako złożenie co najwyżej trzech odbić w prostych.

Chcemy pokazać, że każdą izometrię można przedstawić w postaci złożenia co najwyżej trzech odbić.
Przyjmujemy oznaczenia jak w poprzednim paragrafie.
W przypadku gdy $T_1=Id$ lub $T_2=Id$ teza jest spełniona.
Pozostaje rozważyć sytuację, gdy T_1 i T_2 nie są przekształceniami identycznościowymi.

1) Translację osiową T_1 wzdłuż *pr.AA'* o długość $d=d(A,A')$ można przedstawić jako złożenie dwóch odbić w prostych l_1, l_2 prostopadłych do *pr.AA'* odległych o $\frac{1}{2}d$. Niech l_1 będzie prostą przechodzącą przez hiperboliczny środek odcinka AA', zaś l_2 prostą przechodzącą przez A'. Zatem $T_1=S_{l_2}S_{l_1}$, gdzie S_v oznacza odbicie w prostej v.
2) Obrót T_2 wokół punktu A' o kąt α przeprowadzający B_1 na B' można przedstawić w postaci złożenia dwóch odbić w prostych przecinających się w punkcie A' pod kątem $\frac{1}{2}\alpha$. Niech jedną z tych prostych będzie l_2, druga jest już wyznaczona jednoznacznie – oznaczmy ją przez l_3. Zatem $T_2=S_{l_3}S_{l_2}$.
3) Odbicie w prostej przechodzącej przez punkty A', B' oznaczmy przez S_{l_4}.

Wobec powyższego mamy:

$$T=T_3T_2T_1=S_{l_4}S_{l_3}S_{l_2}\ S_{l_2}S_{l_1}=S_{l_4}S_{l_3}S_{l_1},$$

przy czym druga równość wynik z powyższych rozważań, trzecia z łączności składania przekształceń i faktu $S_l^{-1}=S_l$.

Wniosek

Każdą izometrię można przedstawić w postaci złożenia co najwyżej trzech odbić w prostych.

3. Klasyfikacja izometrii płaszczyzny hiperbolicznej.

Podsumujmy to, co udało nam się zrobić dotychczas. Najpierw opisaliśmy rozmaite izometrie płaszczyzny hiperbolicznej: **odbicie w prostej**, **obrót hiperboliczny**, **translacja osiowa**, **translacja horocykliczna**, **odbicie z poślizgiem**, jednocześnie pokazaliśmy jak przedstawić każdą z tych izometrii jako złożenie odbić w prostych. W drugim rozdziale pokazaliśmy, że każda izometria płaszczyzny jest w istocie złożeniem co najwyżej trzech odbić w prostych. W tym rozdziale pokażemy, że każde przekształcenie będące złożeniem co najwyżej trzech odbić w prostych jest jedną z opisanych w rozdziale pierwszym izometrii. W ten sposób udowodnimy, że każda izometria płaszczyzny hiperbolicznej jest jedną z wyżej wymienionych.

3.1 O pękach prostych na płaszczyźnie hiperbolicznej.

Zanim rozważymy złożenie odbić w trzech prostych przyjrzymy się szczególnym zbiorom prostych oraz udowodnimy pewne przydatne twierdzenie.

3.1.1 Trzy rodzaje pęków prostych.

W geometrii hiperbolicznej wyróżniamy trzy rodzaje pęków prostych:

- pęk **eliptyczny** – zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt,
- pęk **paraboliczny** – zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt idealny,
- pęk **hiperboliczny** – zbiór wszystkich prostych prostopadłych do ustalonej prostej, którą będziemy nazywać prostą bazową pęku hiperbolicznego.

3.1.2 Twierdzenie dotyczące pęków prostych.

Sformułujemy i udowodnimy Twierdzenie o pękach.

Twierdzenie o pękach

Niech P będzie pękiem prostych, zaś m dowolną prostą.

(A) Jeśli P jest eliptyczny, to P zawiera prostą prostopadłą do m.

(B) Jeśli P jest paraboliczny i m nie należy do P, to P zawiera prostą prostopadłą do m.

(C) Jeśli P jest hiperboliczny i m jest prostą rozchodzącą się z prostą bazową pęku P, to P zawiera prostą prostopadłą do m.

Dla dowodu części (A) powyższego twierdzenia oznaczmy przez A punkt, przez który przechodzą proste ustalonego pęku eliptycznego P. Z elementarnego wykładu o geometrii nieeuklidesowej wiadomo, że istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez dany punkt prostopadła do ustalonej prostej. Zatem w pęku prostych przechodzących przez A istnieje (dokładnie jedna) prosta prostopadła do m.
Aby uzasadnić część (B) rozważymy dwa przypadki.
Przyjmijmy, że P jest zbiorem wszystkich prostych pionowych. Wówczas, aby m nie należała do P, prosta m musi być euklidesowym półokręgiem. Niech punkt o współrzędnych $(a,0)$ będzie środkiem tego półokręgu, zaś r jego promieniem, wówczas jego równanie ma postać $(x-a)^2+y^2=r^2$. Prosta o równaniu $x=a$ należy do P i jest prostopadła do m.
Jeżeli P jest pękiem parabolicznym prostych asymptotycznych w punkcie idealnym A niebędącym punktem w nieskończoności „na górze", to rozważmy odbicie S w prostej będącej euklidesowym półokręgiem o środku w A. Takie odbicie przeprowadza A na punkt w nieskończoności „na górze", więc P jest przeprowadzany na pęk P' prostych pionowych, zaś prosta m na prostą m'. Z wcześniejszych rozważań wiemy, że P' zawiera prostą k' prostopadłą do m'. Wówczas $k:=S(k')$ jest prostopadła do $S(m')=m$ i $k \in P$.
Część (C) powyższego twierdzenia wynika z twierdzenia geometrii hiperbolicznej orzekającego, że dwie proste są rozchodzące się dokładnie wtedy, gdy mają wspólną prostą prostopadłą. Z założenia prosta m i prosta bazowa pęku P są rozchodzące się, zatem mają wspólna prostopadłą k. Skoro k jest prostopadła do bazowej pęku P, to $k \in P$.

3.2 Trzy proste przypadki.

Rozważymy teraz przekształcenia będące złożeniami trzech odbić w prostych położonych w bardzo dogodny sposób. Okaże się, że każda z takich izometrii da się zredukować do odbicia w odpowiednio dobranej prostej.

3.2.1 Złożenie odbić w trzech prostych przecinających się w jednym punkcie.

Niech proste k, l, m należą do pęku eliptycznego P prostych przechodzących przez punkt A. Przez S_k, S_l, S_m oznaczmy odbicia w tych prostych. Rozważamy złożenie $S_k S_l S_m$, które, z łączności składania przekształceń, równe jest złożeniu $S_k(S_l S_m)$. Przekształcenie $S_l S_m$ jest obrotem wokół punktu A o odpowiedni kąt zorientowany. Powołując się na paragraf 1.1 możemy zastąpić, na nieskończenie wiele sposobów (byle tylko kąty zorientowane pod jakimi przecinają się pary prostych były równej miary), proste l, m dwiema innymi prostymi przecinającymi się w punkcie A takimi, że złożenie odbić w tych prostych będzie tym samym przekształceniem (obrotem hiperbolicznym), co $S_l S_m$. Prostą l zastąpimy przez prostą k, wówczas druga prosta, zastępująca prostą m, jest już wyznaczona jednoznacznie, oznaczmy ją przez n. Mamy teraz:

$$S_k (S_l S_m) = S_k (S_k S_n) =(S_k S_k) S_n = S_n,$$

przy czym wszystkie te równości wynikają z łączności składania przekształceń.

Okazało się, że złożenie trzech odbić w prostych należących do Peku eliptycznego jest tym samym przekształceniem, co jedno odbicie w pewnej prostej.

3.2.2 Złożenie odbić w trzech prostych asymptotycznych.

Niech proste *k, l, m* będą różnymi prostymi z ustalonego pęku parabolicznego prostych „przechodzących" przez punkt idealny *A*.
Rozważmy złożenie $S_k S_l S_m$. Przekształcenie $S_l S_m$ jest translacją horocykliczną. Z paragrafu 1.3 wiemy, że proste *l, m* można zastąpić inną parą prostych *l', m'* taką, że $S_l S_m = S_{l'} S_{m'}$. Prostą *l* zastąpimy przez prostą *k*, zaś prosta *n* zastępująca prostą *m* będzie wyznaczona jednoznacznie (patrz paragraf 1.3.3). Wówczas $S_l S_m = S_k S_n$ i wtedy
$S_k S_l S_m = S_k S_k S_n = S_n$.

Zatem złożenie odbić w trzech prostych z ustalonego pęku prostych asymptotycznych również można przedstawić w postaci jednego odbicia w odpowiednio wybranej prostej.

3.2.3 Złożenie odbić w trzech prostych prostopadłych do ustalonej prostej.

Niech proste *k, l, m* będą różnymi prostymi należącymi do pęku hiperbolicznego prostych prostopadłych do prostej *s*. Rozważmy złożenie $S_k S_l S_m$. Przekształcenie $S_l S_m$ jest translacja osiową wzdłuż osi *s*. Z paragrafu 1.2 wiemy, że translację osiową można przedstawić w postaci złożenia dwóch odbić w prostych prostopadłych do osi na nieskończenie wiele sposobów. Zastąpmy więc prostą *l* przez prostą *k*, zaś prostą *m* przez taką prostą *n* prostopadłą do *s*, aby $S_l S_m = S_k S_n$. Wówczas $S_k S_l S_m = S_k S_k S_n = S_n$.

Również w przypadku, gdy składamy odbicia w trzech prostych prostopadłych do ustalonej prostej otrzymujemy izometrię będącą odbiciem w odpowiednio dobranej prostej.

Wniosek

Jeżeli różne proste k, l, m należą do jednego pęku P prostych (P jest albo pękiem eliptycznym, albo parabolicznym, albo hiperbolicznym), to istnieje prosta n ∈ P taka, że

$$S_k S_l S_m = S_n,$$

gdzie S_v oznacza odbicie w prostej v.

3.3 Złożenie odbić w trzech prostych – pozostałe przypadki.

Rozważymy teraz złożenia odbić w trzech prostych nienależących do jednego pęku prostych i pokażemy, że każde z takich złożeń jest odbiciem z poślizgiem wzdłuż odpowiednio dobranej prostej.

Będziemy badali złożenie $S_kS_lS_m$, przy różnym położeniu prostych *k, l, m*.

Zauważmy najpierw, że każda para prostych wyznacza dokładnie jeden pęk: para prostych przecinających się wyznacza pęk eliptyczny, dwie proste asymptotyczne wyznaczają pęk paraboliczny, zaś dwie proste rozchodzące się maja dokładnie jedną wspólną prostą prostopadłą, więc wyznaczają pęk hiperboliczny.

Rozważymy trzy przypadki. W każdym z nich powołamy się na Twierdzenie o Pękach i właściwy paragraf z pierwszej części tej pracy.

1) Proste *l, m* należą do pęku eliptycznego *P* prostych przechodzących przez punkt *A*, zaś prosta *k* nie należy do pęku *P*.

   Zgodnie z częścią (A) Twierdzenia o Pękach istnieje prosta $l' \in P$ prostopadła do prostej *k*, zaś z paragrafu 1.1 wiemy, że dla prostej *l'* istnieje dokładnie jedna prosta $m' \in P$ taka, że $S_l S_m = S_{l'} S_{m'}$. Zatem $S_k S_l S_m = S_k S_{l'} S_{m'}$, przy czy proste *k* i *l'* należą do jednego pęku P_1 eliptycznego i są prostopadłe. Ponownie z części (A) Twierdzenia o Pękach wynika istnienie prostej $l'' \in P_1$ prostopadłej do prostej *m'*, dla prostej *l"* umiemy wskazać taką prostą $k' \in P_1$, że $S_k S_{l'} = S_{k'} S_{l''}$ (w szczególności prosta *k'* jest prostopadła do *l"*). Wobec powyższego mamy $S_k S_l S_m = S_{k'} S_{l''} S_{m'}$, przy czym *m'* oraz *k'* są prostopadłe do *l"*.

   Z Uwagi (D) paragrafu 1.4.1 wynika, że takie przekształcenie jest odbiciem z poślizgiem wzdłuż prostej *l"*.

   Uwaga Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla $k, l \in P, m \notin P$.

2) Proste *l, m* należą do pęku parabolicznego *P* prostych przechodzących przez punkt idealny *B*, zaś prosta *k* nie należy do pęku *P.*

   Z części (B) Twierdzenia o Pękach wynika, że istnieje prosta $l' \in P$ prostopadła do prostej *k*. Z paragrafu 1.3 wiemy jak znaleźć prostą $m' \in P$, aby $S_l S_m = S_{l'} S_{m'}$. Czyli $S_k\, S_l\, S_m = S_k\, S_{l'}\, S_{m'}$ oraz *l'* i *k* są prostopadłe. W pęku eliptycznym prostych przechodzących przez punkt przecięcia prostych *l'* i *k* istnieją (wobec Twierdzenia o Pękach i paragrafu 1.3): prosta *l"* prostopadła do *m'* oraz prosta *k'* taka, że $S_k S_{l'} = S_{k'} S_{l''}$ (oczywiście *k'* jest prostopadła do *l"*). Mamy zatem $S_k S_l S_m = S_{k'} S_{l''} S_{m'}$.

   Ponownie okazuje się, że rozpatrywane przekształcenie jest odbiciem z poślizgiem wzdłuż prostej *l"*.

Uwaga Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla $k, l \in P, m \notin P$.

3) Proste *l, m* należą do pęku hiperbolicznego P prostych prostopadłych do prostej s (wspólnej prostopadłej prostych *l* i *m*), zaś prosta *k* nie należy do pęku *P*.

Rozważymy podprzypadki.

Jeżeli prosta *k* przecina prostą *l*, to te dwie proste przecinające się należą do tego samego pęku eliptycznego. Pozostała prosta do tego pęku nie należy, więc można powtórzyć rozumowanie z punktu 1 (patrz: Uwaga po punkcie (1)).

Jeżeli prosta *k* przecina prostą m w punkcie *A*, to istnieje taka prosta $l' \in P$, że $A \in l'$ oraz l' jest prostopadła do *k*. Dla prostej l' umiemy znaleźć taką prostą $m' \in P$, że $S_l S_m = S_{l'} S_{m'}$. Proste *k* i *l'* należą do jednego pęku eliptycznego, zaś prosta *m'* do tego pęku nie należy. Dalej postępujemy jak w punkcie 1.

Jeżeli prosta *k* jest asymptotyczna z *l*, to te dwie proste asymptotyczne należą do tego samego pęku parabolicznego. Pozostała prosta do tego pęku nie należy, więc można powtórzyć rozumowanie z punktu 2 (patrz: Uwaga po punkcie (2)).

Jeżeli prosta *k* jest asymptotyczna z prostą *m*, to istnieje prosta $l' \in P$ prostopadła do *k*. Dla prostej l' istnieje prosta $m' \in P$, taka że $S_l S_m = S_{l'} S_{m'}$. Proste k i l' należą do jednego pęku eliptycznego, zaś prosta m' do tego pęku nie należy. Dalej postępujemy jak w punkcie 2.

Jeżeli prosta *k* jest prostą rozchodzącą się zarówno z prosta *m*, jak i z prostą *l*, to ustalmy dowolny punkt $A \in k$ wówczas istnieje prosta $m' \in P$ przechodząca przez punkt *A*. Z paragrafu 1.2 wiemy, jak znaleźć prostą l' taką, żeby $S_l S_m = S_{l'} S_{m'}$. Ponownie proste m', k należą to tego samego pęku eliptycznego, a prosta l' do tego pęku nie należy, więc można do nich zastosować rozumowanie przeprowadzone w punkcie 1.

Okazało się, że i w tym przypadku złożenie odbić w trzech prostych jest odbiciem z poślizgiem.

Rozważając wszystkie możliwe położenia trzech prostych na płaszczyźnie hiperbolicznej udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Każde złożenie odbić w trzech prostych jest, jako przekształcenie, równe albo odbiciu w pewnej prostej, albo odbiciu z poślizgiem wzdłuż pewnej prostej.

3.4 Izometrie płaszczyzny hiperbolicznej jako rozłączne klasy przekształceń.

Korzystając z uwag, które poczyniliśmy na końcu każdego z paragrafów od 1.1 do 1.4 uzasadnimy teraz, że **odbicia** w prostych, **obroty hiperboliczne** o kąty niebędące całkowitymi wielokrotnościami kąta pełnego, **translacje osiowe** o niezerową długość, nietrywialne **translacje horocykliczne** oraz **odbicia z poślizgiem** o niezerową długość są rozłącznymi klasami przekształceń izometrycznych płaszczyzny hiperbolicznej.

Dla usprawnienia rozumowania zestawimy własności izometrii w tabeli.

ODBICIA	OBROTY HIPER-BOLICZNE	TRANSLACJE OSIOWE	TRANSLACJE HORO-CYKLICZNE	ODBICIA Z POŚLIZGIEM
mają całą prostą punktów stałych	mają dokładnie jeden punkt stały	nie mają punktów stałych	nie mają punktów stałych	nie mają punktów stałych
zachowują nieskończenie wiele prostych	nie zachowują żadnej prostej	zachowują dokładnie jedną prostą	nie zachowują żadnej prostej	zachowują dokładnie jedną prostą
		obraz punktu nie leżącego na jedynej zachowywanej prostej leży po tej samej stronie tej prostej co jego argument		obraz punktu nie leżącego na jedynej zachowywanej prostej leży po przeciwnej stronie tej prostej niż jego argument

Korzystając z własności wyszczególnionych w powyższej tabeli można uzasadnić rozłączność każdej pary klas izometrii.
Dla przykładu pokażemy, że nie istnieje izometria, która należałaby jednocześnie do zbioru translacji osiowych oraz do zbioru odbić z poślizgiem. Gdyby taka izometria istniała, to obraz przez tę izometrię dowolnego punktu nieleżącego na jedynej zachowywanej prostej leżałby po tej samej stronie zachowywanej prostej co argument (ponieważ jest translacją osiową) i jednocześnie musiałby leżeć po jej przeciwnej stronie (ponieważ jest odbiciem z poślizgiem). Te warunki nie mogą być naraz spełnione. Stąd rozłączność zbioru translacji osiowych oraz zbioru odbić z poślizgiem.
Podobnie można pokazać rozłączność pozostałych par zbiorów przekształceń.

Tym samym twierdzenie klasyfikujące izometrie płaszczyzny hiperbolicznej podane we Wstępie zostało udowodnione.

Bibliografia:

1. R. Doman: Wykłady z geometrii elementarnej. Wydawnictwo Naukowe UAM. Poznań 2001.
2. H.S.M . Coxeter: Wstęp do geometrii dawnej i nowej. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa 1967.
3. M. Kordos, L.W. Szczerba: Geometria dla nauczycieli. Państwowe Wydawnictwo Naukowe. Warszawa 1976.
4. W. Wędrychowski, M. Kordos: Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie. Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne. Warszawa 1993.