

Uniwersytet Wrocławski  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Instytut Matematyczny  
*specjalność: matematyka nauczycielska*

*Agata Mazur*

**Okręgi, horocykle i ekwidystanty  
w modelu Kleina płaszczyzny nieeuklidesowej**

Praca magisterska  
napisana pod kierunkiem  
prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2015

Załącznik Nr 2  
do zarządzenia Nr 82/2014  
z dnia 25 czerwca 2014 r.

.....  
(imiona i nazwisko)

.....  
(adres zameldowania)

.....  
(aktualny adres korespondencji)

.....  
(adres e-mail)

.....  
(wydział)

.....  
(kierunek studiów)

.....  
(rodzaj i forma studiów)\*

.....  
(numer pesel)

.....  
(numer albumu)

## OŚWIADCZENIE

### o autorskim wykonaniu pracy dyplomowej

Niniejszym oświadczam, że złożoną do oceny pracę dyplomową zatytułowaną:

.....  
.....

wykonałam samodzielnie pod kierunkiem promotora:

.....

Oświadczam, że powyższe dane są zgodne ze stanem faktycznym i znane mi są przepisy ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tekst jednolity: Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 637, z późniejszymi zmianami), oraz że treść pracy dyplomowej przedstawionej do obrony, zawarta na przekazanym nośniku elektronicznym, jest identyczna z jej wersją drukowaną.

Wrocław, .....  
(rrrr-mm-dd)

.....  
(czytelny podpis)

\*)

rodzaj:

I stopnia (licencjackie, inżynierskie) - I st.

II stopnia - II st.

jednolite magisterskie - jmgr

forma:

stacjonarne - st.

niestacjonarne - nst.

# Spis treści

<b>Przedmowa</b>	<b>4</b>
<b>1 Model Kleina geometrii nieeuklidesowej</b>	<b>5</b>
1.1 O geometrii nieeuklidesowej . . . . .	5
1.2 Model Kleina . . . . .	5
1.3 Pomocnicza półsfera Beltramiiego . . . . .	7
1.4 Okręgi, horocykle i ekwidystanty . . . . .	10
<b>2 Wiadomości o elipsach</b>	<b>13</b>
<b>3 Prosta polarna</b>	<b>16</b>
<b>4 Opis horocykli w modelu Kleina</b>	<b>19</b>
4.1 Opis za pomocą półsfery Beltramiiego . . . . .	19
4.2 Opis parametryczny za pomocą długości półosi . . . . .	22
4.3 Opis przez styczność rzędu 2 . . . . .	24
<b>5 Opis ekwidystant w modelu Kleina</b>	<b>26</b>
5.1 Opis za pomocą półsfery Beltramiiego . . . . .	26
5.2 Opis parametryczny . . . . .	29
5.3 Opis przez styczność . . . . .	33
<b>6 Opis okręgów w modelu Kleina</b>	<b>36</b>
6.1 Okręgi nieeuklidesowe o środku w środku modelu . . . . .	36
6.2 Opis za pomocą półsfery Beltramiiego . . . . .	36
<b>Bibliografia</b>	<b>39</b>

# Przedmowa

Niniejsza praca ma na celu przedstawienie w elementarny sposób rozumowań prowadzących do znalezienia linii reprezentujących w nieeuklidesowym modelu Kleina horocykle, ekwidystanty oraz okręgi. W początkowych rozdziałach czytelnik zapozna się z podstawowymi pojęciami geometrii nieeuklidesowej oraz faktami niezbędnymi do zrozumienia głównych twierdzeń w pracy. Głównymi twierdzeniami dotyczącymi horocykli są Twierdzenie 4.4 oraz Twierdzenie 4.8. Najważniejszymi twierdzeniami o ekwidystantach są Twierdzenie 5.6, Twierdzenie 5.7 oraz Twierdzenie 5.8. Głównymi twierdzeniami dotyczącymi okręgów są Twierdzenie 6.1 oraz Twierdzenie 6.2.

W szczególny sposób chcę podziękować opiekunowi mojej pracy magisterskiej Profesorowi Jackowi Świątkowskiemu za cenne rady, cierpliwość i czas jaki mi poświęcił podczas powstawania tej pracy.

Podziękowania chcę złożyć również Panu Stanisławowi Mikołajewiczowi za pomoc w przygotowaniu rysunków.

*Agata Mazur*

# Rozdział 1

## Model Kleina geometrii nieeuklidesowej

### 1.1 O geometrii nieeuklidesowej

Geometria nieeuklidesowa powstała w wyniku rozważań na temat piątego postulatu Euklidesa. Piąty postulat Euklidesa brzmi następująco:

Jeżeli prosta padająca na dwie proste tworzy po jednej stronie kąty wewnętrzne, które w sumie są mniejsze od dwóch kątów prostych, to proste przedłużone nieograniczenie schodzą się po tej samej stronie, po której kąty są mniejsze od dwóch kątów prostych.

Począwszy od Euklidesa, wielu matematyków zastanawiało się, czy postulat ten jest niezbędnym aksjomatem. Działania uczonych skupiały się na pokazaniu, że piąty postulat można wyprowadzić z pozostałych postulatów. Oznaczałoby to, że V postulat byłby zwykłym twierdzeniem. Jednym ze sposobów dowodzenia jest dowód nie wprost. W XVIII wieku matematycy bardzo rozbudowali wnioski z założenia, że piąty postulat nie zachodzi. Wtedy niezależnie dwóch matematyków - Nikolaj Łobaczewski oraz Janos Boláyi stwierdziło, że to, co stworzyli jest nową geometrią.

Obecnie geometria nieeuklidesowa jest pełnoprawną dziedziną matematyki. Spełnia ona wszystkie aksjomaty podawane przez Hilberta, poza aksjomatem równoległości (odpowiednikiem V postulatu Euklidesa), za to z dodatkowym aksjomatem zwanym aksjomatem Łobaczewskiego:

Przez punkt  $A$  nieleżący na prostej  $p$  przechodzą co najmniej dwie proste nieprzecinające  $p$ .

Istnieją różne modele spełniające aksjomaty geometrii nieeuklidesowej. W tej pracy zajmę się jednym z nich - modelem dyskowym Kleina.

### 1.2 Model Kleina

Model Kleina to jeden z modeli geometrii nieeuklidesowej.

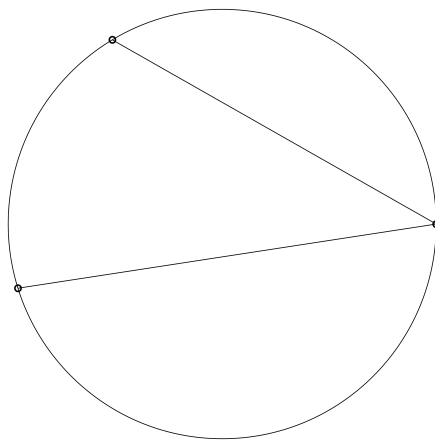
- przestrzenią modelu jest koło, bez brzegu;
- punktami są punkty leżące wewnątrz koła;
- prostymi są cięciwy koła (bez końców, które nie należą do modelu).

**Uwaga 1.1.** Punkty na brzegu koła nazywane są punktami w nieskończoności.

Odległość określa się za pomocą współrzędnych logarytmicznych<sup>1</sup>. Nie będzie to dokładnie omawiane, ponieważ nie jest niezbędnym elementem do zrozumienia dalszej części pracy. Sposób mierzenia kątów na dysku Kleina zostanie przedstawiony w podrozdziale 1.3.

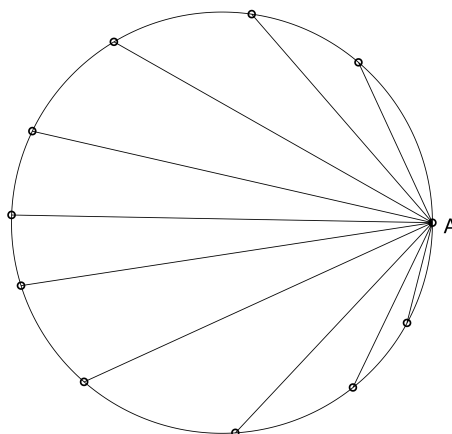
W geometrii nieeuklidesowej pojawiają się pojęcia niespotykane w geometrii płaszczyzny euklidesowej.

**Definicja 1.2.** *Proste asymptotyczne to takie, które zbliżają się do siebie nieograniczenie, lecz nie przecinają się.*



Rysunek 1.1: Proste asymptotyczne.

**Uwaga 1.3.** Okazuje się, że proste są asymptotyczne dokładnie wtedy, gdy reprezentujące je w modelu Kleina cięciwy mają punkt wspólny na brzegu dysku.



Rysunek 1.2: Pęcz prostych asymptotycznych do punktu A.

---

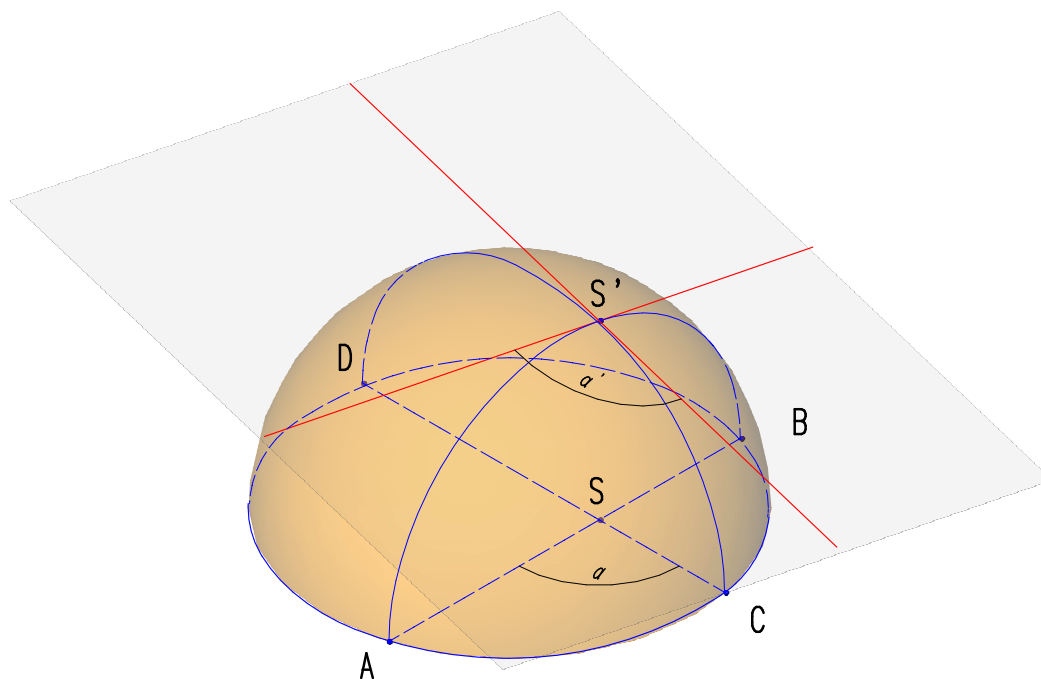
<sup>1</sup>[4] Geometria pogładowa, str.222-224

**Definicja 1.4.** *Pęk prostych asymptotycznych to rodzina prostych parami asymptotycznych, reprezentowanych w modelu Kleina przez zbiór wszystkich cięciw mających wspólny koniec w ustalonym punkcie na brzeg modelu. Wspólny koniec wszystkich takich cięciw nazywamy punktem asymptotycznym danego pęku asymptotycznego.*

**Uwaga 1.5.** *Dla potrzeb obliczeń będziemy przyjmować, że dysk Kleina to okrąg jednostkowy o środku w  $(0,0)$  na płaszczyźnie euklidesowej z układem kartezjańskim.*

### 1.3 Pomocnicza półsfera Beltramiiego

Ponieważ interpretowanie niektórych pojęć i własności w modelu dyskowym nie jest oczywiste, wraz z dyskiem rozpatruje się tak zwaną pomocniczą półsferę Beltramiiego. Jest to półsfera o tym samym środku, co środek modelu Kleina, tym samym promieniu, a jej brzegiem jest brzeg modelu Kleina. Obiekty z modelu dyskowego są podnoszone do półsfery (na zasadzie rzutowania na półsferę w kierunku prostopadłym do płaszczyzny modelu). Analogicznie obiekty z półsfery odpowiadają swoim rzutom prostokątnym na dysk Kleina<sup>2</sup>. Prostą w dysku Kleina jest cięciwa bez końców, zatem podniesiona do półsfery Beltramiiego utworzy łuk bez końców, zawarty w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny modelu Kleina, mający te same końce, co podniesiona cięciwa (patrz Rysunek 1.3, cięciwy  $AB$  oraz  $CD$  z odpowiadającymi im łukami).



Rysunek 1.3: Euklidesowa miara kąta  $\alpha'$  odpowiada nieeuklidesowej mierze kąta  $\alpha$ .

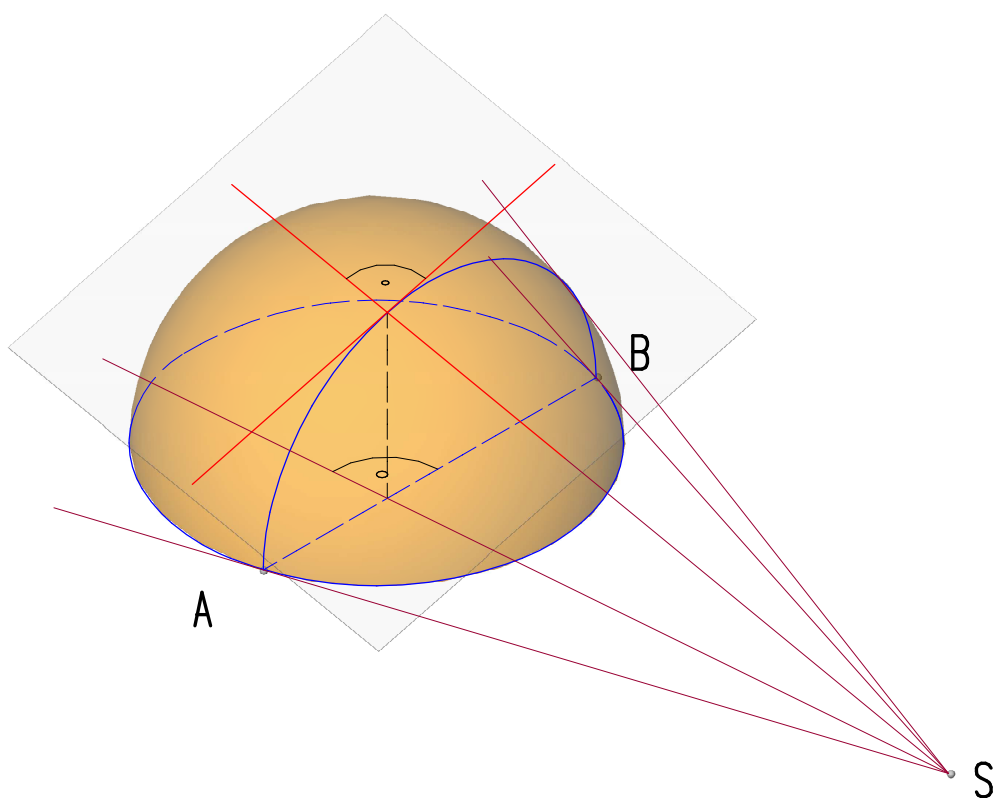
<sup>2</sup>[5] Szkoła Geometrii. Odczyty kaliskie, str. 128-129

## Miary kątów w modelu

Półsfera Beltramiego jest szczególnie użyteczna podczas wyznaczania miar kątów. Aby wyznaczyć kąt między dwiema prostymi, reprezentowanymi przez dwie cięciwy w modelu Kleina przecinającymi się w punkcie  $S$ , postępujemy w następujący sposób (patrz Rysunek 1.3).

- znajdujemy odpowiadające tym prostym łuki na półsferze Beltramiego (czyli podnosimy odpowiednie cięciwy na półsferę). Łuki przecinają się w punkcie  $S'$  - odpowiadającym punktowi  $S$  przed podniesieniem;
- wyznaczamy w przestrzeni dwie proste (euklidesowe) styczne do dwóch łuków w punkcie przecięcia  $S'$  - leżą one na płaszczyźnie stycznej do półsfery w punkcie  $S'$ ;
- euklidesowa miara kąta między wyznaczonymi prostymi reprezentuje nieeuklidesową miarę kąta między wyjściowymi prostymi w modelu Kleina.

## Prostopadłość w modelu Kleina



Rysunek 1.4: Pomocniczy stożek.

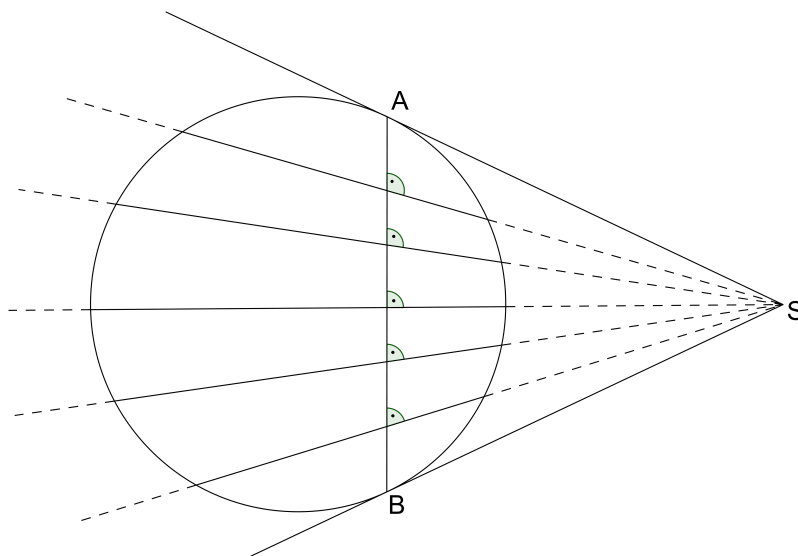
W tej pracy szczególnie istotne będzie rozpoznawanie prostopadłości w modelu Kleina. Niech będzie dana prosta nieeuklidesowa  $L$  reprezentowana w modelu Kleina cięciwą  $AB$  i niech



$\widehat{AB}$  będzie łukiem na półsferze Beltramiiego o tych samych końcach co cięciwa  $AB$ , leżącym na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny dysku Kleina. Proste prostopadłe do prostej  $L$  wyznaczamy za pomocą połowy stożka<sup>3</sup>, który jest styczny do półsfery Beltramiiego wzdłuż łuku  $\widehat{AB}$ . Rzutując wybrane tworzące stożka prostopadłe na płaszczyznę dysku wyznaczamy w przekroju z dyskiem Kleina cięciwy reprezentujące rodzinę prostych prostopadłych do wyjściowej prostej (patrz Rysunek 1.4). Ta obserwacja prowadzi do charakteryzacji prostopadłości prostych w modelu Kleina opisanej w poniższych dwóch faktach.

**Fakt 1.6.** Aby wyznaczyć proste prostopadłe do prostej  $L$  reprezentowanej w modelu Kleina cięciwą  $AB$ , nieprzechodzącą przez środek modelu, należy:

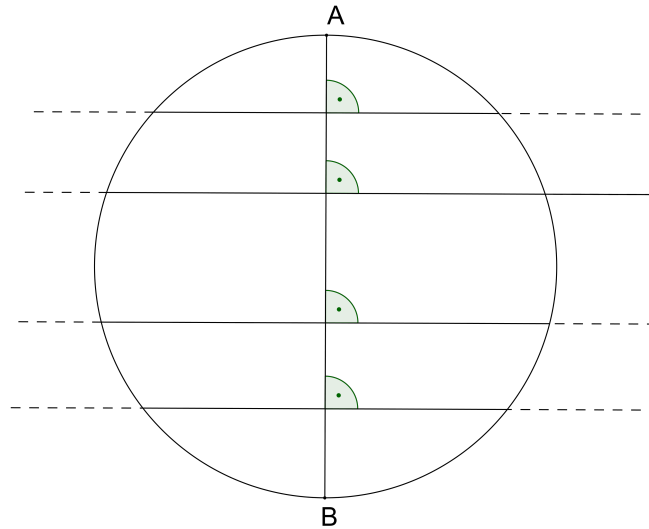
- wyznaczyć styczne do brzegowego okręgu modelu w punktach  $A$ ,  $B$  oraz ich punkt przecięcia  $S$ ;
- rodzina prostych prostopadłych do  $L$  to cięciwy koła modelu zawarte w półprostych wychodzących z punktu  $S$  (patrz Rysunek 1.5).



Rysunek 1.5: Proste prostopadłe do prostej  $AB$ .

**Fakt 1.7.** Gdy zadana cięciwa  $AB$  reprezentująca prostą  $L$  jest średnicą modelu (co oznacza, że przechodzi przez środek) - styczne do okręgu brzegowego w punktach  $A$ ,  $B$  nie przecinają się. W takim wypadku prostopadłe nieeuklidesowe są reprezentowane przez cięciwy koła modelu prostopadłe do cięciwy  $AB$  w zwykłym euklidesowym sensie (patrz Rysunek 1.6).

<sup>3</sup>[5] Szkoła Geometrii. Odczyty kaliskie, str. 129-132



Rysunek 1.6: Proste prostopadłe do prostej  $L$  reprezentowanej średnicą  $AB$ .

**Uwaga 1.8.** Dla potrzeby obliczeń będziemy przyjmować, że półsfera Beltramiego to połówka sfery jednostkowej o środku w  $(0, 0, 0)$ , opisana zależnościami:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  oraz  $z > 0$ .

## 1.4 Okręgi, horocykle i ekwidystanty

W pracy omawiane będą trzy rodzaje linii specjalnych w geometrii nieeuklidesowej: okręgi, horocykle i ekwidystanty. Poniżej zostaną podane ich definicje.

### Horocykle

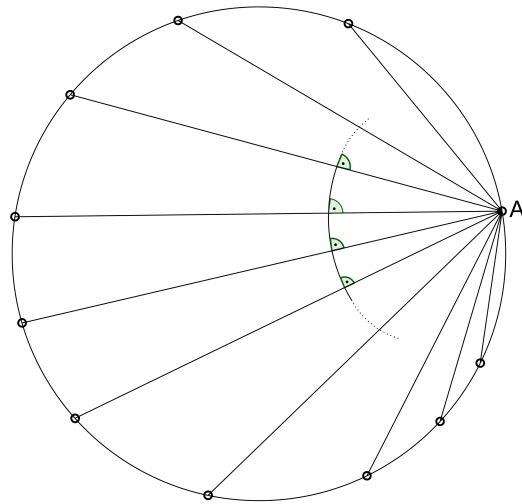
**Definicja 1.9.** *Horocykl* to krzywa, która w każdym swoim punkcie jest prostopadła do przechodzącej przez ten punkt prostej z ustalonego pęku prostych asymptotycznych.

**Uwaga 1.10.** Nie ma euklidesowego odpowiednika horocyklu, ponieważ nie istnieje na płaszczyźnie euklidesowej pęk prostych asymptotycznych.

W dalszej części pracy, w Rozdziale 5, rozstrzygniemy jakie konkretnie krzywe w modelu Kleina reprezentują horocykle. W tym miejscu przytoczymy jedynie użyteczny fakt, z którego będziemy korzystać w rozważaniach w Rozdziale 5.

**Fakt 1.11.** Dla ustalonego pęku prostych asymptotycznych, przez każdy punkt płaszczyzny nieeuklidesowej przechodzi dokładnie jeden horocykl prostopadły do prostych tego pęku prostych.

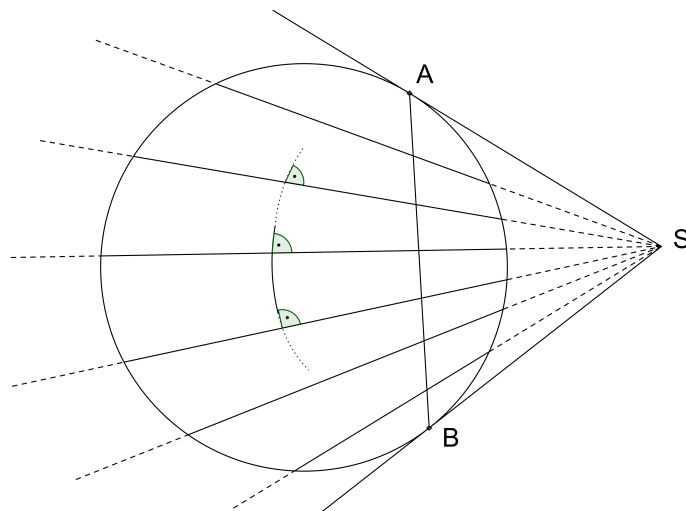
Dowód pominiemy. Polega on na zaobserwowaniu, że horocykl jest rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego na krzywą prostopadłą do prostych z ustalonego pęku. Jednoznaczność z powyższego faktu wynika z jednoznaczności rozwiązywania równania różniczkowego zwyczajnego dla zadanych warunków początkowych.



Rysunek 1.7: Horocykl.

## Ekwidystanty

**Definicja 1.12.** *Ekwidystanta* to linia złożona ze wszystkich punktów leżących w ustalonej odległości  $d > 0$  od ustalonej prostej  $L$  po ustalonej stronie tej prostej. Prostą  $L$  nazywamy *prostą bazową* tak określonej linii ekwidystantnej.



Rysunek 1.8: Ekwidystanta.

**Fakt 1.13.** *Dla ustalonej prostej bazowej  $L$  przez każdy punkt płaszczyzny nieeuklidesowej nieleżący na  $L$  przechodzi dokładnie jedna ekwidystanta, dla której  $L$  jest bazowa.*

*Dowód.* Wybierzmy dowolny punkt  $X$  poza prostą  $L$ . Niech  $d > 0$  będzie odległością punktu  $X$  od prostej  $L$ . Przez  $X$  przechodzi pewna ekwidystanta  $E$  w odległości  $d > 0$  od prostej bazowej

$L$ , po ustalonej stronie tej prostej. Jeśli istniałaby druga ekwidystanta  $E'$  różna od ekwidystanty  $E$ , która przechodziłaby przez  $X$ , różniłaby się w pewnym miejscu od ekwidystanty  $E$ . Niech  $Y$  będzie punktem należącym do ekwidystanty  $E$ , ale nienależącym do  $E'$ . Jeśli  $E'$  nie zawiera  $Y$ , to nie może być ekwidystantą, bo  $Y$  jest w odległości  $d$  od prostej  $L$ , a ekwidystanta zawiera wszystkie punkty znajdujące się w określonej odległości. Zatem  $E$  jest jedyną ekwidystantą przechodzącą przez  $X$ .  $\square$

W dalszej części pracy wygodniej będzie posługiwać się następującą charakteryzacją ekwidystant, którą można przyjąć za ich równoważną definicję:

**Własność 1.14.** *Ekwidystanta prostej bazowej  $L$  to krzywa ciągła prostopadła w każdym punkcie do przechodzącej przez ten punkt prostej z pęku prostych prostopadłych do prostej  $L$ .*

Ekwidystantą w geometrii euklidesowej jest prosta równoległa do prostej bazowej  $L$ . W geometrii nieeuklidesowej ekwidystanty nie są prostymi.

## Okręgi

**Definicja 1.15.** *Okrąg to zbiór wszystkich punktów odległych od ustalonego punktu - środka okręgu, o ustaloną odległość nazywaną promieniem.*

**Fakt 1.16.** *Przez każdy punkt, różny od punktu  $O$ , przechodzi dokładnie jeden okrąg o środku w  $O$ .*

*Dowód.* Wybierzmy dowolny punkt  $X$  różny od  $O$ . Niech  $d > 0$  będzie odległością punktu  $X$  od punktu  $O$ . Położenie pozostałych punktów na okręgu przechodzącym przez  $X$  jest zdeterminowane przez odległość  $d$ .  $\square$

Wygodniej będzie posługiwać się następującą charakteryzacją okręgów, którą można przyjmując za ich definicję:

**Własność 1.17.** *Okrąg to krzywa ciągła prostopadła w każdym punkcie do ustalonego pęku prostych przechodzących przez wspólny punkt.*

**Uwaga 1.18.** *Środek okręgu to wspólny punkt pęku prostych (zwany też środkiem pęku).*

## Rozdział 2

# Wiadomości o elipsach

W tym rozdziale przedstawimy wiadomości dotyczące elips, które będą używane w dalszej części pracy.

**Definicja 2.1.** *Elipsą nazywać będziemy krzywą otrzymaną z okręgu poprzez działanie powinowactwem prostokątnym.*

W elipsie można wyróżnić:

- **osie elipsy** - są to proste będące osiami symetrii elipsy; każda elipsa posiada dwie osie, które są do siebie prostopadłe;
- **środek elipsy** - punkt przecięcia osi elipsy;
- **wierzchołki elipsy** - są to punkty wspólne elipsy z jej osiami;
- **półoś elipsy** - połowa odległości pomiędzy dwoma wierzchołkami elipsy położonymi na tej samej osi; jest też równa długości odcinka łączącego którykolwiek z wierzchołków elipsy ze środkiem elipsy; każda elipsa ma dwie półosie: krótszą i dłuższą.

Załóżmy, że osie elipsy są równoległe do osi układu współrzędnych. Oznaczmy przez  $(p, q)$  środek elipsy oraz przez  $a$  długość półosi równoległej do osi  $O_x$ , zaś przez  $b$  długość półosi równoległej do  $O_y$  (patrz Rysunek 2.1). Równanie takiej elipsy ma postać<sup>1</sup>:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad (2.1)$$

Tę samą elipsę można przedstawić również za pomocą równania parametrycznego<sup>2</sup>:

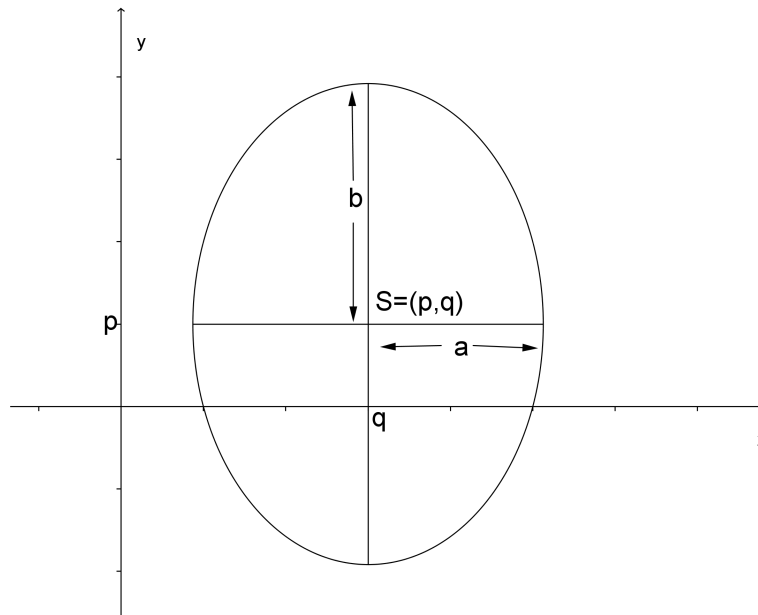
$$\begin{cases} x(t) = a \cos t + p \\ y(t) = b \sin t + q, \end{cases} \quad (2.2)$$

gdzie  $t \in [0, 2\pi]$ .

---

<sup>1</sup>[2] Matematyka. Poradnik encyklopedyczny, str.266

<sup>2</sup>[2] Matematyka. Poradnik encyklopedyczny, str.266-267



Rysunek 2.1: Elipsa.

W kolejnych rozdziałach korzystać będziemy z własności, że rzuty prostokątne na płaszczyznę w przestrzeni okręgów położonych na innych nierównoległych płaszczyznach są elipsami. Mówi o tym poniższe stwierdzenie.

**Stwierdzenie 2.2.** Niech  $\Pi_\alpha$  będzie płaszczyzną nachyloną pod kątem  $\alpha$  do płaszczyzny  $\Pi$  i niech  $L$  będzie prostą powstałą z przecięcia płaszczyzny  $\Pi_\alpha$  z płaszczyzną  $\Pi$ . Niech  $O$  będzie okręgiem na płaszczyźnie  $\Pi_\alpha$  o środku w punkcie  $S$  i promieniu  $r$ . Wówczas rzut prostokątny  $O'$  okręgu  $O$  na płaszczyznę  $\Pi$  jest elipsą, przy czym:

1. jej środek to punkt  $S'$  będący rzutem prostokątnym  $S$  na płaszczyznę  $\Pi$ ;
2. osiami są proste:  $L_1$  przechodząca przez  $S'$  i równoległa do  $L$  oraz  $L_2$  przechodząca przez  $S'$  i prostopadła do  $L$ ;
3. długość półosi leżącej na prostej  $L_1$  wynosi  $b = r$ , zaś długość półosi leżącej na prostej  $L_2$  wynosi  $a = r \cos \alpha = b \cos \alpha$ .

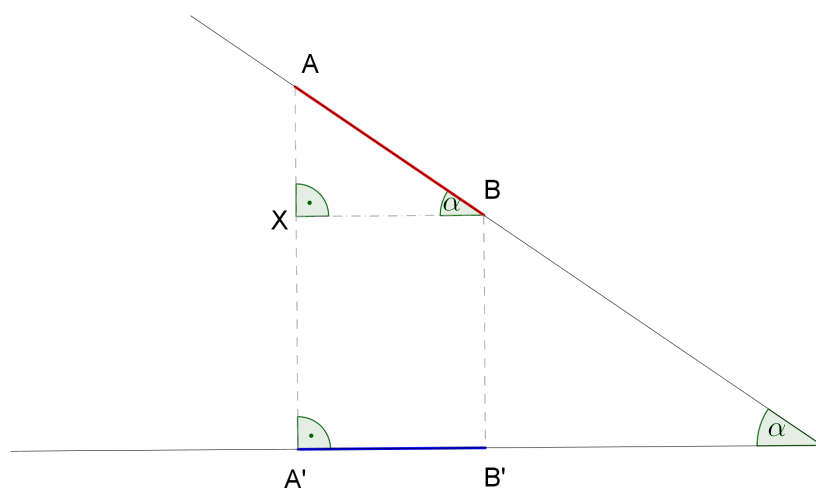
*Dowód.* Rzut prostokątny jednej płaszczyzny na drugą można traktować jak powinowactwo prostokątne. W szczególności rzut płaszczyzny  $\Pi_\alpha$  na płaszczyznę  $\Pi$  zachowuje się jak powinowactwo prostokątne względem osi  $L$ . Taki rzut zachowuje długości i kierunki wszystkich odcinków równoległych do  $L$ , natomiast dla odcinków prostopadłych - zachowuje kierunki, ale skraca ich długość w tym samym stosunku  $k$  równym skali powinowactwa. Wyznamy tę skalę  $k$ . Rozważmy przekrój płaszczyzną prostopadłą do  $\Pi_\alpha$  oraz  $\Pi$ , przechodzącą przez środek okręgu  $O$ . Oznaczmy przez  $AB$  odcinek reprezentujący średnicę  $O$ , którą zawierają płaszczyzny przekroju. Oznaczmy przez  $A'B'$  półoś elipsy powstałą w wyniku rzutowania (patrz Rysunek 2.2). Rozważając stosunek  $\frac{|A'B'|}{|AB|}$  wyznaczymy skalę powinowactwa. Poprowadźmy prostą równoległą  $A'B'$ , przechodzącą przez punkt  $B$ . Oznaczmy punkt przecięcia tej prostej z  $A'A'$  przez  $X$ . Otrzymany trójkąt  $\triangle ABX$  jest prostokątny, ponadto kąt  $\sphericalangle XBA$  ma miarę  $\alpha$ . Można zatem zapisać, że:

$$k = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|XB|}{|AB|} = \cos \alpha.$$

Stąd:

$$k = \cos \alpha.$$

Z powyższych rozważań wynika, że obrazem okręgu  $O$  w rzucie prostokątnym na płaszczyznę  $\Pi$  będzie elipsa  $O'$  o osiach  $L_1$  i  $L_2$  opisanych w stwierdzeniu. Długość półosi leżącej na  $L_1$  pozostanie taka jak długość okręgu  $O$ , zatem  $b = r$ . Długość półosi leżącej na  $L_2$  wyniesie  $a = rk = r \cos \alpha$ . Stąd otrzymujemy zależność:  $a = b \cos \alpha$ .  $\square$



Rysunek 2.2: Płaszczyzny  $\Pi$  oraz  $\Pi_\alpha$  w przekroju.

Kolejna własność dotycząca elips, zawarta w poniższym fakcie, będzie wykorzystywana w Rozdziale 5. Przedstawimy ją bez dowodu, jako powszechnie znaną<sup>3</sup>.

**Fakt 2.3.** *Jeśli elipsa zadana jest równaniem*

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1,$$

*to styczna do niej w punkcie  $P = (x_0, y_0)$  zadana jest wzorem:*

$$\frac{(x-p)(x_0-p)}{a^2} + \frac{(y-q)(y_0-q)}{b^2} = 1. \quad (2.3)$$

<sup>3</sup>[2] Matematyka. Poradnik encyklopedyczny, str.268

## Rozdział 3

# Prosta polarna

W tym rozdziale przedstawimy pewne określenia<sup>1</sup> i ich własności, które okażą się przydatne w dalszej części pracy.

**Definicja 3.1.** Niech będzie dany okrąg  $\omega$  o środku w punkcie  $O$  i promieniu  $r$  oraz punkt  $A$  różny od punktu  $O$ . Punkt  $A'$  nazywamy punktem inwersyjnym punktu  $A$  względem okręgu  $\omega$ , gdy leży na półprostej  $OA$  oraz spełnia następująca równość:

$$|OA||OA'| = r^2. \quad (3.1)$$

**Lemat 3.2.** Niech będzie dany okrąg  $\omega$  o środku w  $O$  i promieniu  $r$  oraz punkt  $A$  różny od punktu  $O$ , znajdujący się wewnątrz okręgu. Inwersyjny punkt  $A'$  punktu  $A$  otrzymujemy w następujący sposób:

- wyznaczamy cięciwę okręgu  $\omega$  o końcach  $X$  i  $Y$ , przechodzącą przez punkt  $A$ , prostopadłą do odcinka  $OA$ ;
- wyznaczamy styczne do okręgu  $\omega$  w punktach  $X$  oraz  $Y$ ;
- punkt przecięcia stycznych to punkt  $A'$  będący punktem inwersyjnym dla punktu  $A$ , względem okręgu  $\omega$ .

*Dowód.* Rozważmy trójkąt  $\triangle OAX$  oraz trójkąt  $\triangle OXA'$  (patrz Rysunek 3.1). Są to trójkąty podobne, ponieważ  $|\sphericalangle OAX| = |\sphericalangle OXA| = 90^\circ$  oraz mają wspólny kąt przy wierzchołku  $O$ . Możemy zatem zapisać następującą proporcję:

$$\frac{|OA|}{|OX|} = \frac{|OX|}{|OA'|}, \quad (3.2)$$

a stąd otrzymujemy:

$$|OA||OA'| = |OX|^2. \quad (3.3)$$

Ale  $|OX|$  to promień rozważanego okręgu, stąd mamy tezę:

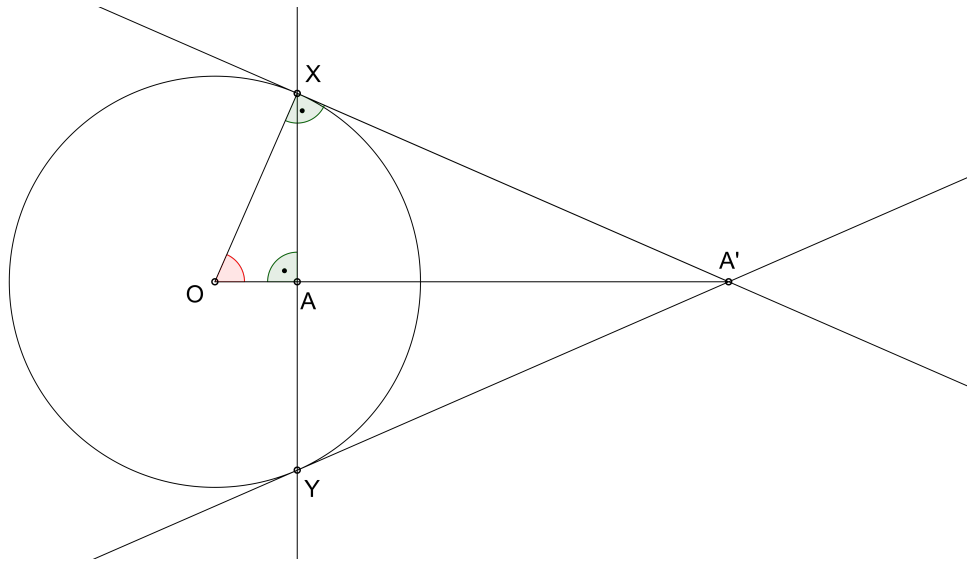
$$|OA||OA'| = r^2. \quad (3.4)$$

□

---

<sup>1</sup>[3] Geometry Revisited, str. 132-136





Rysunek 3.1: Konstrukcja punktu inwersyjnego do punktu  $A$  względem okręgu  $\omega$ .

**Definicja 3.3.** Niech  $\omega$  będzie okręgiem o środku  $O$  oraz  $A$  będzie punktem różnym od punktu  $O$ . **Prostą polarną** punktu  $A$  nazywamy prostą, która:

1. zawiera punkt inwersyjny punktu  $A$  względem okręgu  $\omega$ ;
2. jest prostopadła do odcinka  $OA$ .

Następująca własność prostej polarnej będzie wykorzystywana w Rozdziale 6.

**Twierdzenie 3.4.** Niech  $A$  będzie punktem różnym od środka okręgu  $O$ , leżącym wewnątrz okręgu  $\omega$  o promieniu  $r$ . Niech  $\mathcal{C}$  będzie rodziną cięciw przechodzących przez punkt  $A$ . Wówczas dla dowolnej cięciwy  $XY$  z rodziny  $\mathcal{C}$ , nie zawierającej środka  $O$ , styczne do okręgu  $\omega$  w punktach  $X$  i  $Y$  przecinają się w punkcie leżącym na prostej polarnej punktu  $A$ .

*Dowód.* Rozważmy cięciwy z rodziny  $\mathcal{C}$ . Możliwe są dwie sytuacje:

1. cięciwa  $XY$  jest prostopadła do półprostej  $OA$ ;
2. cięciwa  $XY$  nie jest prostopadła do półprostej  $OA$ .

Ad.1 Jeśli cięciwa  $XY$  jest prostopadła do półprostej  $OA$ , to na mocy Lematu 3.2 styczne do okręgu  $\omega$  w punktach  $X$  i  $Y$  przecinają się w punkcie  $A'$  będącym punktem inwersyjnym punktu  $A$  względem  $\omega$ . Punkt  $A'$  z definicji leży na prostej polarnej punktu  $A$ .

Ad.2 Niech  $XY$  będzie dowolną cięciwą przechodzącą przez punkt  $A$ , nieprostopadłą do odcinka  $OA$ , niezawierającą punktu  $O$  oraz niech punkt  $Q$  będzie środkiem tej cięciwy (patrz Rysunek 3.2). Niech punkt  $A'$  będzie punktem inwersyjnym punktu  $A$  oraz niech punkt  $Q'$  będzie punktem inwersyjnym dla punktu  $Q$ . Ponadto wiemy, że punkty  $A'$  leży na prostej polarnej  $p$  punktu  $A$  oraz odcinek  $OA'$  jest prostopadły do prostej  $p$ . Zatem możemy zapisać następujące równości:

$$|OA'| \cdot |OA| = r^2, \quad (3.5)$$

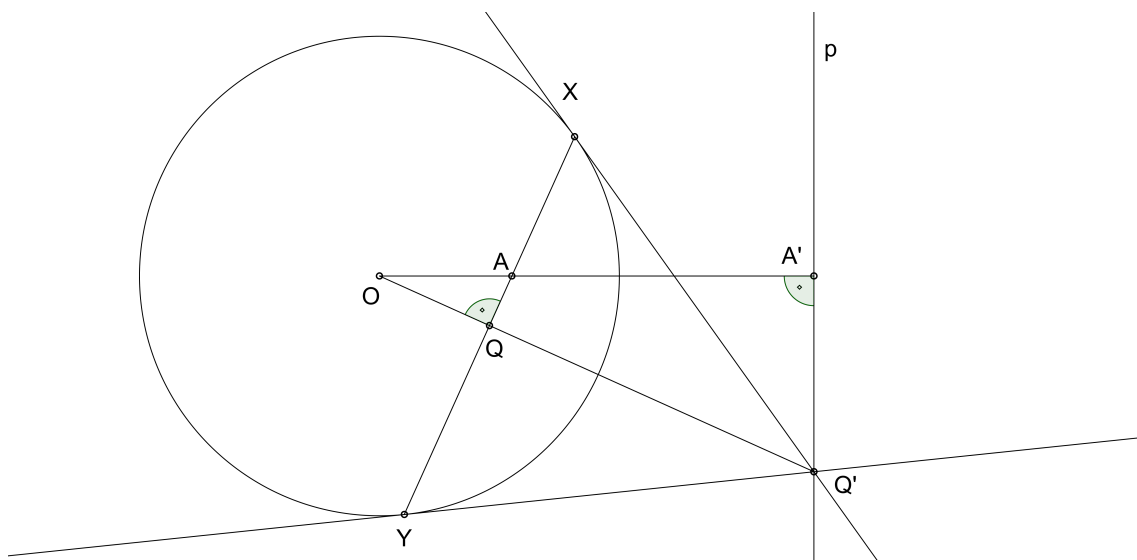
oraz

$$|OQ'| \cdot |OQ| = r^2. \quad (3.6)$$

Przyrównując lewe strony równań (3.5) i (3.6) oraz odpowiednio przekształcając otrzymujemy:

$$\frac{|OA|}{|OQ|} = \frac{|OQ'|}{|OA'|}. \quad (3.7)$$

Możemy stąd wnioskować, że trójkąt  $\triangle OAQ$  oraz trójkąt  $\triangle OQ'A'$  są podobne z cechy podobieństwa bok-kąt-bok (mają wspólny kąt przy wierzchołku  $O$ ), stąd kąt  $\sphericalangle OA'Q'$  ma miarę równą kątowi  $\sphericalangle OQA$ , czyli  $90^\circ$ . Ponieważ odcinek  $OA'$  również był prostopadły do prostej polarnej  $p$ , zatem punkt  $Q'$  musi leżeć na prostej polarnej  $p$ .  $\square$



Rysunek 3.2: Pewna własność prostej polarnej punktu  $A$ .

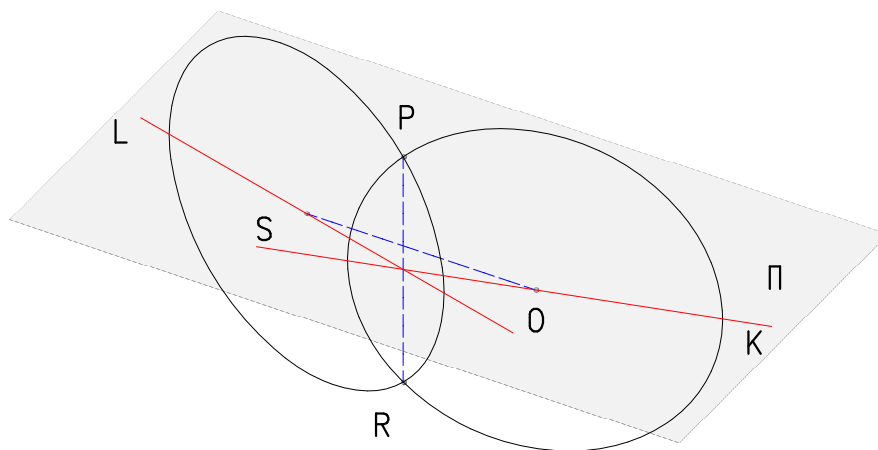
## Rozdział 4

# Opis horocykli w modelu Kleina

W tym rozdziale odpowiemy na pytanie, jakie krzywe reprezentują horocykle w modelu Kleina.

### 4.1 Opis za pomocą półsfery Beltramiego

Trudno znaleźć jakiś punkt zaczepienia w modelu Kleina, żeby wyobrazić sobie horocykl. Z pomocą przychodzi półsfera Beltramiego. Pękowi prostych asymptotycznych odpowiada pęk łuków na półsferze (połówek okręgów) wychodzących ze wspólnego punktu asymptotycznego (patrz niebieskie łuki na Rysunku 4.2). Zauważmy, że możemy łatwo znaleźć krzywą na półsferze przecinającą każdy z tych łuków pod kątem prostym. Aby to zrobić skorzystamy z pomocniczego lematu.



Rysunek 4.1: Symetria okręgów w przestrzeni.

**Lemat 4.1.** *Jeśli dwa okręgi  $O_1, O_2$  w przestrzeni przecinają się w dwóch punktach, to kąt między stycznymi w jednym punkcie przecięcia jest równy kątowi między stycznymi w drugim punkcie przecięcia.*

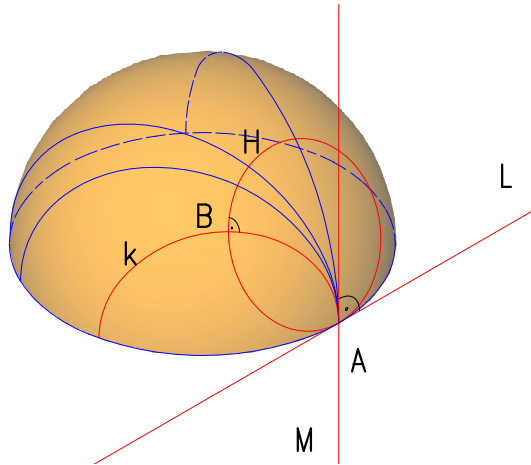
*Dowód.* Oznaczmy środek okręgu  $O_1$  przez  $S$  oraz środek okręgu  $O_2$  przez  $O$ , punkty przecięcia oznaczmy przez  $P, R$ . Wyznamy płaszczyznę  $\Pi$  zawierającą odcinek  $SO$ , prostopadłą do odcinka  $PR$  (patrz Rysunek 4.1).

Płaszczyzna  $\Pi$  przechodzi przez punkt  $S$ , zatem istnieje pewna prosta  $L$  z płaszczyzny  $\Pi$ , zawarta w płaszczyźnie okręgu  $O_1$ . Prosta  $L$  przechodzi przez środek okręgu zatem jest osią symetrii  $O_1$ . Ponadto płaszczyzna  $\Pi$  jest płaszczyzną symetrii okręgu  $O_1$ , ponieważ zawiera prostą  $L$  i jest prostopadła do płaszczyzny, na której leży rozważany okrąg. Analogicznie płaszczyzna  $\Pi$  przechodzi przez punkt  $O$ , więc istnieje prosta  $K$  należąca do płaszczyzny  $\Pi$ , leżąca w płaszczyźnie okręgu  $O_2$ . Prosta  $K$  jest osią symetrii okręgu  $O_2$ , natomiast płaszczyzna  $\Pi$  jest płaszczyzną symetrii okręgu  $O_2$ .

Punkty  $P$  oraz  $R$  to punkty, które leżą na okręgu  $O_1$  oraz  $O_2$ . Punkt  $P$  jest symetryczny dla punktu  $R$  względem płaszczyzny  $\Pi$ . Dlatego styczne dla okręgów  $O_1$  oraz  $O_2$  w punkcie  $P$  będą miały swój symetryczny obraz względem płaszczyzny  $\Pi$  jako styczne do okręgów  $O_1$  oraz  $O_2$  w punkcie  $R$ . Ponieważ symetria zachowuje kąty, kąt między stycznymi w punkcie  $P$  będzie taki sam, jak kąt między stycznymi w punkcie  $R$ .  $\square$

Mając wiedzę z powyższego lematu można sformułować twierdzenie:

**Twierdzenie 4.2.** *Linia na półsferze Beltramię reprezentuje horocykl wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona okręgiem zawartym w tej półsferze, stycznym do jej brzegu (z usuniętym punktem styczności).*



Rysunek 4.2: Horocykl na półsferze Beltramię.

*Dowód.* Aby dowieść twierdzenia rozpatrujemy wynikanie w dwie strony.

Dowód implikacji  $\Leftarrow$ :

Weźmy dowolny okrąg zawarty w półsferze, styczny do jej brzegu w dowolnym punkcie  $A$  i oznaczmy go przez  $H$  (patrz Rysunek 4.2). Rozważmy pęk prostych asymptotycznych do punktu  $A$ . Na półsferze Beltramiiego odpowiadają im łuki o jednym z końców w punkcie  $A$  (łuki zaznaczone na niebiesko na Rysunku 4.2) - oznaczmy zbiór wszystkich takich łuków przez  $\mathcal{K}_A$ . Chcemy pokazać, że  $H$  jest horocyklem. Wystarczy pokazać, że kąt między  $H$  oraz każdym z łuków jest prosty.

Weźmy dowolny z łuków z pęku prostych  $\mathcal{K}_A$  wychodzących z punktu  $A$ , oznaczmy go przez  $k$ . Łuk  $k$  jest połową pewnego okręgu. Oznaczmy ten okrąg przez  $O_k$ . Okrąg  $H$  przecina się z okręgiem  $O_k$  w dwóch punktach:  $A$  oraz punkcie  $B$  na półsferze. Chcemy pokazać, że kąt między  $H$  i  $O_k$  w punkcie przecięcia na półsferze jest prosty. Na mocy Lematu 4.1 jeśli kąt pomiędzy stycznymi w punkcie  $A$  będzie prosty, wówczas również w punkcie  $B$  będziemy mieli prostopadłość stycznych.

Styczną  $M$  okręgu  $O_k$  jest prosta prostopadła do płaszczyzny, na której znajduje się dysk Kleina, przechodząca przez punkt  $A$ . Jest ona niezależna od wyboru łuku z pęku  $\mathcal{K}_A$ . Natomiast styczną  $L$  w  $A$  do  $H$  jest prosta leżąca w płaszczyźnie dysku Kleina, styczna do dysku w punkcie  $A$ . Styczna ta jest niezależna od wyboru okręgu  $H$  spośród okręgów zawartych w półsferze, stycznych do jej brzegu w punkcie  $A$ .

Wyznaczone w ten sposób styczne są do siebie prostopadłe -  $M$  jest prostopadła do płaszczyzny, na której leży  $L$ , stąd mamy prostopadłość. Na mocy Lematu 4.1 mamy prostopadłość w drugim punkcie przecięcia  $H$  z  $O_k$ . Stąd  $H$  bez punktu  $A$  jest z definicji horocyklem.

Dowód implikacji  $\Rightarrow$ :

Chcemy pokazać, że na półsferze Beltramiiego nie ma innych horocykli poza tymi, które są reprezentowane okręgami  $H$ , stycznymi do brzegu półsfery. Przeanalizujemy następującą konstrukcję:

- wybierzmy dowolny punkt  $Q$  na półsferze Beltramiiego;
- rozważmy płaszczyznę  $\Pi_\alpha$  zawierającą prostą  $L$  oraz punkt  $Q$  (patrz Rysunek 4.3). Jest tylko jedna taka płaszczyzna - punkt i prosta nieprzechodząca przez ten punkt wyznaczają jednoznacznie płaszczyznę;
- jako szukany okrąg  $H$  przyjmujemy przekrój półsfery z płaszczyzną  $\Pi_\alpha$ .

Wybierając dowolnie punkt  $Q$  będziemy otrzymywać okręgi  $H$  powstające z przekroju dowolną płaszczyzną  $\Pi_\alpha$  dla  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ . W ten sposób wykorzystamy wszystkie punkty leżące na półsferze. Na mocy Faktu 1.11 wiemy, że przez dany punkt może przechodzić tylko jeden horocykl, zatem otrzymane w ten sposób horocykle  $H$  to jedyne krzywe przedstawiające horocykle na półsferze Beltramiiego.  $\square$

**Twierdzenie 4.3.** *Horocykle w modelu Kleina to elipsy będące rzutami prostokątnymi okręgów  $H$  odpowiadających horocyklom na półsferze Beltramiiego (opisanych w Twierdzeniu 4.2).*

*Dowód.* Na mocy Twierdzenia 4.2 mamy, że horocyklami na półsferze Beltramiiego są okręgi styczne do brzegu modelu. Niech  $H$  będzie dowolnym okręgiem na półsferze Beltramiiego powstałym tak, jak w dowodzie Twierdzenia 4.2, czyli okręgiem leżącym na płaszczyźnie nachylonej do płaszczyzny modelu Kleina pod pewnym kątem  $\alpha$ . Stwierdzenie 2.2 mówi, że rzut prostokątny okręgu leżącego na płaszczyźnie  $\Pi_\alpha$  nachylonej do płaszczyzny  $\Pi$  (w tym przypadku płaszczyzny modelu Kleina) jest elipsą, zatem rzut okręgu  $H$  jest elipsą. Ponieważ obiekty z półsfery Beltramiiego mają swoje odpowiedniki na dysku Kleina, znajdowane za pomocą rzutowania z półsfery na dysk, rzut okręgu  $H$  na płaszczyznę  $\Pi$  jest horocyklem w modelu Kleina.  $\square$

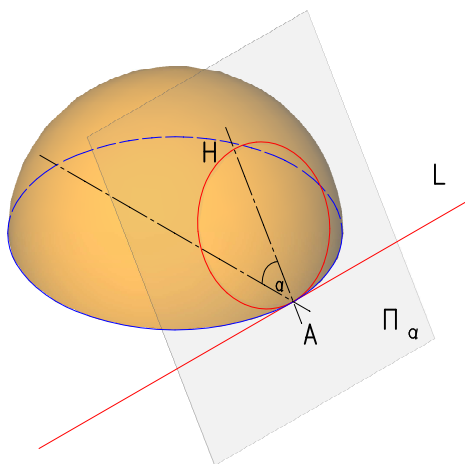
## 4.2 Opis parametryczny za pomocą długości półosi

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy, jak wyglądają horocykle na półsferze Beltramiego. Ponieważ głównym tematem rozważań jest model Kleina, pokażemy teraz, jak można opisać horocykle na dysku.

**Twierdzenie 4.4.** *Linia zawarta wewnątrz modelu Kleina jest horocyklem wtedy i tylko wtedy, gdy jest elipsą styczną do brzegu modelu w wierzchołku elipsy leżącym na krótszej półosi, zaś długości półosi są dowolnymi parami liczb rzeczywistych  $(a, b)$  takich, że  $b \in (0, 1)$  oraz  $a = b^2$ .*

*Dowód.* W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy, że horocykle są reprezentowane na półsferze Beltramiego pewnymi okręgami. Należy zwrócić uwagę, w jaki sposób owe okręgi powstają. Punkt przecięcia z brzegiem modelu pozostaje niezmienny w każdym przypadku. Zmieniającą się wartością jest nachylenie okręgu do płaszczyzny dysku Kleina.

Rozważmy rodzinę płaszczyzn  $\Pi_\alpha$ , wyznaczonych przez prostą styczną do brzegu modelu w punkcie asymptotycznym, dla zadanego pęku łuków  $\mathcal{K}_A$ , nachyloną do płaszczyzny modelu pod kątem  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Zmieniając kąt nachylenia  $\alpha$  płaszczyzny do dysku otrzymamy nieskończoną rodzinę okręgów powstających z przecięcia płaszczyzny  $\Pi_\alpha$  i półsfery. Okręgi te spełniają warunek bycia horocyklem dla zadanego pęku  $\mathcal{K}_A$ .



Rysunek 4.3: Przecięcie półsfery płaszczyzną  $\Pi_\alpha$ .

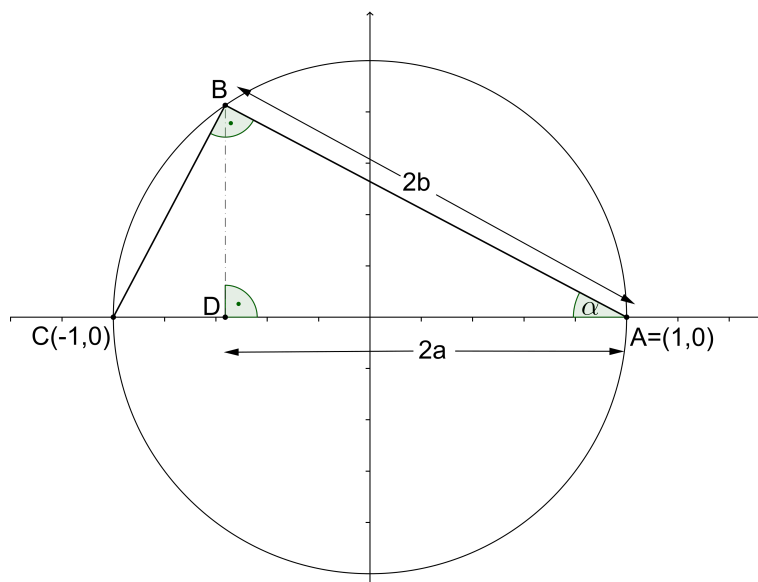
Korzystamy z własności półsfery Beltramiego - wszystko, co rzutujemy na dysk Kleina zachowa nieeuklidesowe własności. W szczególności rzutując okrąg, który jest horocyklem na półsferze, otrzymamy horocykl na dysku. Z własności rzutowania (patrz Stwierdzenie 2.2) wiemy, że rzutując okrąg otrzymamy elipsę. Chcemy zbadać, jakie będą jej długości półosi. Umieszczamy półsferę Beltramiego wraz z dyskiem Kleina tak, jak w Uwadze 1.5 oraz Uwadze 1.8. Dla ustalenia uwagi niech  $A = (0, 1, 0)$ . Wtedy prosta  $k$  wyznaczająca rodzinę płaszczyzn  $\Pi_\alpha$  będzie przechodzić przez  $A$  oraz będzie równoległa do osi  $O_y$ . Wybierzmy dwie szczególne średnice rzutowanego okręgu -  $d_a$  równoległą do prostej  $L$  wyznaczającej  $\Pi_\alpha$ , drugą  $d_b$  - prostopadłą do niej. Z Twierdzenia 2.2 wiemy, że średnice po rzutowaniu odpowiadają osiom elipsy. Oznaczmy długość średnicy okręgu jako  $2b$  - odpowiada to długości jednej z osi elipsy otrzymanej po

rzutowaniu.

Aby zbadać długość drugiej średnicy po rzutowaniu rozważać będziemy przekrój półsfery płaszczyzną  $x = 0$  (przedstawiony na Rysunku 4.4). Punkt  $A$  będzie miał współrzędne  $(1, 0)$ . Część wspólna płaszczyzny z horocyklem na półsfery w przekroju daje punkt. Oznaczmy go przez  $B$ . Odcinek  $|AB| = 2b$ , ponieważ średnica okręgu ma długość  $2b$ . Rozważmy dodatkowe odcinki wychodzące z punktu  $B$ :

- odcinek łączący  $B$  z punktem  $C$  - punktem na brzegu dysku Kleina naprzeciwko punktu  $A$ ;
- odcinek łączący  $B$  z punktem  $D$  - spodkiem wysokości wypuszczonej z punktu  $B$  dla trójkąta  $\triangle ABC$ .

Wtedy  $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ .



Rysunek 4.4: Widok dla płaszczyzny  $x = 0$ .

Zatem możemy zapisać odpowiednie zależności dla otrzymanych trójkątów  $\triangle ABD$ ,  $\triangle ABC$ . Z  $\triangle ABD$  oraz ze Stwierdzenia 2.2 mamy

$$\frac{2a}{2b} = \cos(\alpha),$$

a zatem

$$\frac{a}{b} = \cos(\alpha).$$

Z  $\triangle ABC$ :

$$\frac{2b}{2} = \cos(\alpha),$$

czyli

$$b = \cos(\alpha). \tag{4.1}$$

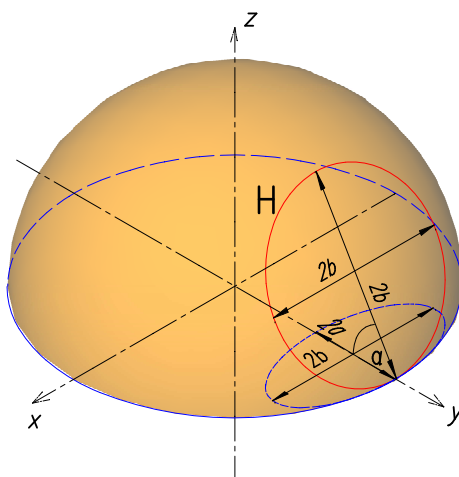
Z powyższych obserwacji wynika, że:

$$\frac{a}{b} = b.$$

A zatem

$$a = b^2.$$

Z Rysunku 4.4 oraz ciągłości i monotoniczności funkcji kosinus można również zauważyć, że gdy  $\alpha$  przebiega przedział  $(0, \frac{\pi}{2})$ , to  $b$  przebiegać będzie zakresie  $(0, 1)$ .  $\square$



Rysunek 4.5: Przekięcie półsfery płaszczyzną  $\Pi_\alpha$ .

### 4.3 Opis przez styczność rzędu 2

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy, że horocyklami są elipsy o szczególnych własnościach dla półosi. W tej części pracy przyjrzymy się horocyklom jeszcze dokładniej, w celu opisanania ich w jeszcze inny sposób. Aby to zrobić potrzebujemy nowego pojęcia - styczności rzędu 2.

**Definicja 4.5.** *Krzywe są **styczne rzędu 2** w punkcie  $P$ , gdy mają w punkcie  $P$  wspólną prostą styczną, lokalnie w pobliżu punktu  $P$  leżą po jednej stronie tej stycznej oraz mają takie same krzywizny w tym punkcie.*

Wzór na krzywiznę krzywej zapisanej wzorem parametrycznym  $(x(t), y(t))$  w punkcie  $P = (x(t_0), y(t_0))$  przedstawia się następująco<sup>1</sup>:

$$\kappa = \left| \frac{y''(t_0)x'(t_0) - x''(t_0)y'(t_0)}{(x'^2(t_0) + y'^2(t_0))^{\frac{3}{2}}} \right|. \quad (4.2)$$

**Uwaga 4.6.** *Krzywiznę można rozpatrywać również wraz z jej znakiem, który zależy od kierunku parametryzacji krzywej. W tej pracy przyjmujemy za krzywiznę wzór niewzględniący znaku.*

**Lemat 4.7.** *Krzywizna elipsy o półosiach  $a, b$ , w wierzchołku na półosi  $a$ , wynosi  $\frac{a}{b^2}$ .*

<sup>1</sup>[2] Matematyka. Poradnik encyklopedyczny, str. 308-309



*Dowód.* Równanie parametryczne elipsy ze wzoru (2.2) ma postać:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t + p \\ y(t) = b \sin t + q \end{cases}.$$

Ponadto dla  $t = 0$  mamy wierzchołek elipsy leżący na półosi  $a$ :

$$\begin{cases} x(0) = a \cos 0 + p = a + p \\ y(0) = b \sin 0 + q = q \end{cases}.$$

Pomocniczo obliczamy odpowiednie pochodne:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -a \sin t, \\ x''(t) &= -a \cos t, \\ y'(t) &= b \cos t, \\ y''(t) &= -b \sin t. \end{aligned}$$

Dla  $t = 0$  otrzymujemy następującą zależność:

$$\begin{aligned} x'(0) &= -a \sin 0 = 0, \\ x''(0) &= -a \cos 0 = -a, \\ y'(0) &= b \cos 0 = b, \\ y''(0) &= -b \sin 0 = 0. \end{aligned}$$

Podstawiając je do równania na krzywiznę (4.2) otrzymujemy:

$$\kappa = \frac{0 \cdot 0 - (-a)b}{(0^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}. \quad (4.3)$$

□

**Twierdzenie 4.8.** *Linia zawarta w dysku Kleina jest horocyklem wtedy i tylko wtedy, gdy jest elipsą styczną rzędu dwa do brzegu modelu w wierzchołku leżącym na krótszej półosi.*

*Dowód.* Aby dowieść twierdzenia rozpatrzmy implikacje w dwie strony.

Dowód implikacji  $\Rightarrow$ :

Z Lematu 4.7 mamy, że krzywizna w wierzchołku elipsy wyraża się wzorem  $\kappa = \frac{a}{b^2}$ , natomiast z Twierdzenia 4.4 mamy, że horocykle są elipsami stycznymi do brzegu modelu o stosunku półosi:  $a = b^2$ . Podstawiając do wzoru na krzywiznę otrzymujemy:

$$\kappa = \frac{b^2}{b^2} = 1.$$

Pozostaje sprawdzić, jaką krzywiznę ma okrąg w rozpatrywanym punkcie. Krzywizna okręgu jest równa odwrotności jego promienia:  $\kappa = \frac{1}{R} = 1$ , co daje wynik równy krzywiznie elipsy.

Dowód implikacji  $\Leftarrow$ :

Założmy, że mamy elipsę o krzywiznie równej krzywiznie okręgu, leżącą wewnątrz niego, styczną w wierzchołku elipsy, mającą wspólną styczną z okręgiem. Chcemy pokazać, że elipsa spełniająca takie warunki jest horocyklem.

Krzywizna okręgu wyraża się wzorem:  $\kappa = \frac{1}{R} = 1$ . Z Lematu 4.7 krzywizna w wierzchołku elipsy wyraża się wzorem  $\kappa = \frac{a}{b^2}$ . Ponieważ ma zachodzić równość  $1 = \frac{a}{b^2}$ , otrzymujemy zależność  $a = b^2$ . Z Twierdzenia 4.4 rozważana elipsa jest horocyklem. □

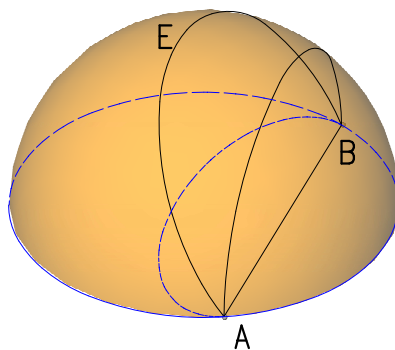
## Rozdział 5

# Opis ekwidystant w modelu Kleina

W tym rozdziale odpowiemy na pytanie, jakie krzywe reprezentują ekwidystanty w modelu Kleina.

### 5.1 Opis za pomocą półsfery Beltramiiego

Podobnie, jak w przypadku horocykli, na początku posłużymy się półsferą Beltramiiego.



Rysunek 5.1: Łuk  $E$  reprezentujący ekwidystantę na półsferze Beltramiiego.

**Twierdzenie 5.1.** *Niech  $AB$  będzie cięciwą na dysku Kleina reprezentująca prostą  $L$  i niech  $\widehat{AB}$  będzie odpowiadającym jej łukiem na półsferze Beltramiiego, leżącym w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny modelu Kleina. Wówczas linia  $E$  na półsferze Beltramiiego reprezentuje ekwidystantę wtedy i tylko wtedy, gdy jest łukiem okręgu o końcach w  $A$  i  $B$ , różnym od  $\widehat{AB}$  (to znaczy leżącym na płaszczyźnie nachylonej do płaszczyzny modelu pod pewnym kątem  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$  (patrz Rysunek 5.1)).*

*Dowód.* Aby dowieść twierdzenia rozważymy implikacje w dwie strony.

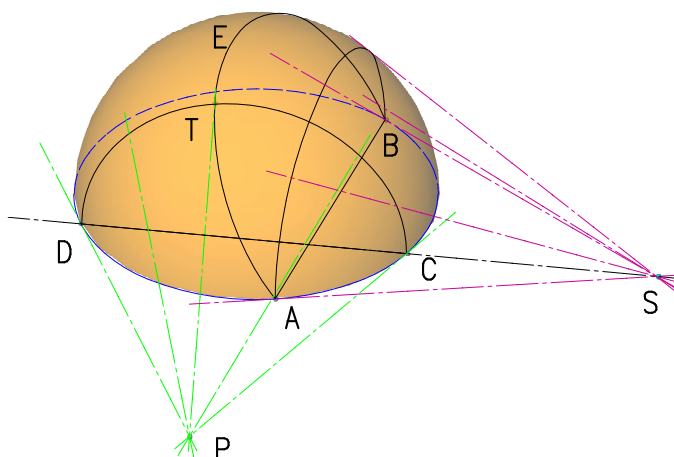
Dowód implikacji  $\Leftarrow$  :

Chcemy pokazać, że łuk  $E$  jest prostopadły w każdym punkcie do prostej z pęku prostych prostopadłych do łuku  $\widehat{AB}$  na półsferze Beltramiiego. Rozważmy dwa przypadki:

1. cięciwa  $AB$  jest średnicą modelu Kleina;
2. cięciwa  $AB$  jest różna od średnicy modelu Kleina.

Ad 1. Rozważmy półsferę Beltramię traktując  $A$  i  $B$  jako bieguny połowki sfery. Nieeuklidesowe proste prostopadłe do prostej reprezentowanej łukiem  $\widehat{AB}$  są reprezentowane na półsferze Beltramię łukami będącymi równoleżnikami względem biegunów  $A$  i  $B$ . Łuk  $E$  z tezy Twierdzenia 5.1 jest południkiem względem biegunów  $A$  i  $B$ . Kąt między dowolnym południkiem i dowolnym równoleżnikiem jest prosty, zatem rozważany łuk  $E$  jest ekwidystantą.

Ad 2. Jeśli cięciwa  $AB$  jest różna od średnicy, to prostopadłość wyznaczamy za pomocą pomocniczego stożka. Niech  $S$  będzie punktem przecięcia stycznych do brzegu modelu w punktach  $A$  oraz  $B$ , czyli wierzchołkiem połowy stożka służącego do wyznaczania prostopadłości (patrz Rysunek 5.2). Na mocy Faktu 1.6 półproste o początku w punkcie  $S$ , przecinając brzeg modelu, wyznaczają cięciwy, które reprezentują proste prostopadłe do prostej bazowej  $L$  w modelu Kleina. Rozważmy dowolną taką cięciwę  $CD$  oraz łuk  $\widehat{CD}$  o końcach w  $C$  i  $D$  na półsferze Beltramię, znajdujący się na płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny modelu Kleina. Łuk  $\widehat{CD}$  reprezentuje prostopadłą do prostej  $L$ , reprezentowanej przez łuk  $\widehat{AB}$ . Oznaczmy przez  $T$  punkt przecięcia łuków  $E$  oraz  $\widehat{CD}$  (patrz Rysunek 5.2).



Rysunek 5.2: Łuk  $E$  reprezentujący ekwidystantę na półsferze Beltramię oraz dowolny łuk  $CD$  prostopadły do niego.

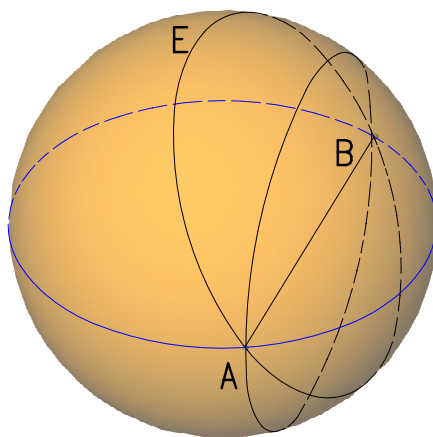
Chcemy pokazać, że kąt między  $E$  oraz łukiem  $\widehat{CD}$  w punkcie  $T$  jest kątem prostym. Zauważmy, że jeśli łuk  $\widehat{CD}$  będzie przechodził przez środek modelu Kleina (czyli będzie średnicą modelu Kleina), to otrzymujemy sytuację analogiczną, jak w punkcie 1. Łuk  $\widehat{CD}$  jest równikiem względem biegunów  $A$  i  $B$ , natomiast  $E$  jest południkiem, zatem mamy między nimi kąt prosty. Jeśli cięciwa  $CD$  jest różna od średnicy przeprowadzimy osobne rozumowanie. Rozważmy styczne do brzegu modelu w punktach  $C$  i  $D$ , przecinające się w punkcie  $P$ . Punkt  $P$  jest wierzchołkiem połowy stożka wyznaczającego prostopadłe dla prostej reprezentowanej przez cięciwę  $CD$  (patrz Rysunek 5.2). Niech  $k$  to półprosta o początku w  $P$ , przechodząca przez  $T$ . Jest to jedna z tworzących stożka o wierzchołku w  $P$ . Półprosta  $k$  leży w płaszczyźnie, która jest styczna do półsferzy Beltramię w punkcie  $T$ . Ponadto prosta  $k$  leży również w płaszczyźnie

wyznaczonej przez łuk  $E$ . Zatem prosta  $k$  jest styczną do łuku  $E$  w punkcie  $T$ . Ponieważ prosta  $k$  jest tworzącą stożka, to między nią a styczną do łuku  $\widehat{CD}$  w punkcie  $T$  jest kąt prosty. Zatem łuk  $\widehat{CD}$  przecina się pod kątem prostym z łukiem  $E$ . Ponieważ wybór cięciwy  $CD$  był dowolny, własność zachodzi dla wszystkich cięciw wyznaczonych zgodnie z Faktem 1.6. Dlatego linia  $E$  jest ekwidystantą.

Dowód implikacji  $\Rightarrow$ :

Niech  $E'$  będzie dowolną linią zawartą w półsferze Beltramiiego, reprezentującą ekwidystantę względem prostej bazowej  $L$ . Niech  $X$  będzie dowolnym punktem leżącym na  $E'$ . Przez punkt  $X$  przechodzi również łuk  $E$ . Łuk  $E$  wyznaczamy tak, jak w dowodzie wynikania  $\Leftarrow$ :  $E$  to przekrój półsferzy Beltramiiego z płaszczyzną wyznaczoną przez punkty  $X, A, B$ . Z dowodu wynikania  $\Leftarrow$  mamy, że  $E$  reprezentuje ekwidystantę. Na mocy Faktu 1.13, przez dany punkt przechodzi dokładnie jedna linia ekwidystantna o zadanej prostej bazowej. Dlatego  $E'$  musi być równe  $E$ .  $\square$

Zanim zajmiemy się dokładniejszym badaniem ekwidystant, przeprowadzimy obserwację. Niech  $\mathcal{K}$  - płaszczyzna dysku Kleina,  $\mathcal{B}$  - odpowiadająca jej półsfera Beltramiiego oraz  $\mathcal{B}'$  półsfera będąca dopełnieniem  $\mathcal{B}$  do sfery (patrz Rysunek 5.3). Wówczas  $\mathcal{B}'$  jest lustrzanym odbiciem  $\mathcal{B}$  względem  $\mathcal{K}$ . Dlatego rzut prostokątny obiektów z półsferzy  $\mathcal{B}'$  na dysk Kleina  $\mathcal{K}$  będzie zachowywał takie same własności jak rzut symetrycznych obiektów z półsferzy  $\mathcal{B}$  na dysk Kleina  $\mathcal{K}$ .



Rysunek 5.3: Półsfera  $\mathcal{B}$ , jej dopełnienie  $\mathcal{B}'$  do sfery oraz ekwidystanta  $E$  prostej reprezentowanej łukiem  $\widehat{AB}$  wraz z jej przedłużeniem  $E'$  na półsferze  $\mathcal{B}'$ .

**Stwierdzenie 5.2.** Niech  $\mathcal{K}$  będzie kołem reprezentującym płaszczyznę nieeuklidesową,  $\mathcal{B}$  będzie odpowiadającą jej półsferą Beltramiiego oraz niech  $\mathcal{B}'$  będzie półsferą będącą dopełnieniem  $\mathcal{B}$  do sfery. Niech  $E$  będzie łukiem reprezentującym ekwidystantę na półsferze Beltramiiego dla łuku  $\widehat{AB}$  reprezentującego prostą  $L$ . Niech  $E'$  będzie łukiem dopełniającym  $E$  do pełnego okręgu na półsferze Beltramiiego. Wówczas rzut  $E'$  na dysk Kleina także reprezentuje ekwidystantę dla prostej  $L$  reprezentowanej cięciwą  $AB$ .

*Dowód.* Korzystając z wcześniejszego wprowadzenia zauważmy, że łukowi  $E'$  leżącemu na  $\mathcal{B}'$

odpowiada łuk o tych samych końcach  $A$  i  $B$ , leżący na  $\mathcal{B}$ . Znajdujemy go poprzez lustrzane odbicie. Niech  $E''$  oznacza łuk będący lustrzanym odbiciem łuku  $E'$  względem płaszczyzny modelu Kleina. Łuk  $E''$  o końcach  $A$  oraz  $B$  leży zatem na półsferze  $\mathcal{B}$ , czyli reprezentuje ekwidystantę względem prostej reprezentowanej cięciwą  $AB$ . Zatem jego rzut na dysk Kleina będzie ekwidystantą dla prostej reprezentowanej cięciwą  $AB$ .  $\square$

**Fakt 5.3.** *Łuk  $E$  wraz z łukiem  $E'$  utworzą po zrzutowaniu elipsę styczną wewnątrz do brzegu modelu w punktach  $A$  i  $B$ .*

Uzasadnienie polega na przytoczeniu faktu, że okrąg przy rzucie prostokątnym daje elipsę. Ponadto punkty  $A$  i  $B$  leżą na płaszczyźnie rzutowania, więc przejdą sama na siebie. Natomiast pozostałe punkty znajdą się wewnątrz modelu. Zatem w punktach  $A$  i  $B$  mamy styczność.

Poczynimy teraz kilka dodatkowych uwag. Będą one przytoczone bez dowodu, a ich znajomość nie jest niezbędna w dalszej części pracy. Mają one jedynie charakter informacyjny dla bardziej dociekliwego czytelnika.

**Uwaga 5.4.** *(bez dowodu)*

- *łuk  $E$  oraz łuk  $E''$  symetryczny do  $E'$  względem płaszczyzny modelu Kleina, reprezentują ekwidystanty dla prostej reprezentowanej przez łuk  $AB$  dla tej samej odległości  $d > 0$ ;*
- *rzuty prostokątne łuków  $E$  oraz  $E'$  na płaszczyźnie dysku Kleina reprezentują ekwidystantę dla prostej reprezentowanej cięciwą  $AB$  dla tej samej odległości  $d > 0$ .*

Wiedząc, jak wygląda ekwidystanta na półsferze Beltramiiego, sformułujmy wniosek:

**Wniosek 5.5.** *Ekwidystantą dla prostej bazowej  $L$  reprezentowanej w modelu Kleina przez cięciwą  $AB$ , jest fragment elipsy o końcach wspólnych z cięciwą  $AB$ , stycznej wewnątrz do brzegu modelu w jej końcach  $A$  i  $B$  (patrz Rysunek 5.4).*

*Dowód.* Niech  $AB$  cięciwa w modelu Kleina reprezentującą prostą  $L$ . Na mocy Twierdzenia 5.1 ekwidystantą na półsferze Beltramiiego jest łuk o końcach w  $A$  i  $B$ . Obiekty w modelu Kleina odpowiadają rzutom prostokątnym tych samych obiektów z półsfery Beltramiiego na płaszczyznę modelu Kleina. Ponieważ ekwidystantą na półsferze Beltramiiego jest łuk nachylony do płaszczyzny modelu Kleina pod pewnym kątem  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ , ekwidystantą w modelu Kleina będzie rzut tego łuku. Na mocy Twierdzenia 2.2 rzut prostokątny okręgu jest elipsą. Ponieważ w tym przypadku rzutujemy tylko łuk, nie cały okrąg - rzutem będzie fragment elipsy o końcach w  $A$  i  $B$ . Z Faktu 5.3 mamy, że elipsa będzie styczna wewnątrz do brzegu modelu.  $\square$

## 5.2 Opis parametryczny

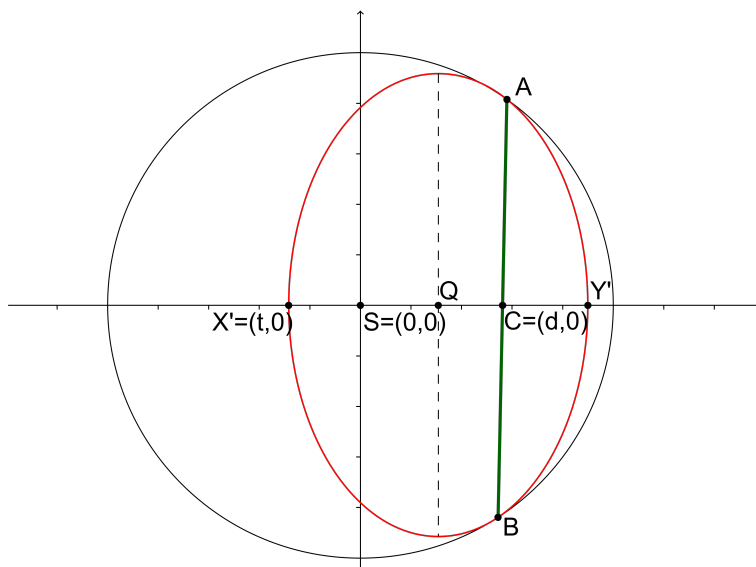
W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy, jak wygląda ekwidystanta na półsferze Beltramiiego. Stwierdziliśmy także, że ekwidystanty są reprezentowane w modelu Kleina przez fragmenty elips. W tym miejscu zbadamy, jak dokładnie wyglądają ekwidystanty w modelu Kleina.

**Twierdzenie 5.6.** *Niech  $L$  będzie prostą w modelu Kleina reprezentowaną cięciwą  $AB$ , która jest średnicą modelu (to znaczy przechodzi przez środek  $S$  modelu). Wówczas linia zawarta w dysku modelu jest ekwidystantą o prostej bazowej  $L$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest połową o końcach  $A$  i  $B$  elipsy o następujących parametrach:*

- *środkiem elipsy jest środek modelu  $S$ , zaś  $AB$  jest jedną z jej osi symetrii, przy czym długość półosi związanej z tą osią wynosi 1;*
- *druga półoś elipsy jest dowolną liczbą  $a \in (0, 1)$ .*

*Dowód.* Rozważmy dowolny łuk  $E$  na półsferze Beltramięgo o końcach w  $A$  i  $B$  oraz dopełniający do okręgu łuk  $E'$ , jak w Stwierdzeniu 5.2. Ponieważ okrąg  $E \cup E'$ , składający się z  $E$  oraz  $E'$ , leży w płaszczyźnie przechodzącej przez środek modelu, okrąg jest symetryczny względem cięciwy  $AB$ . Zatem rzuty prostokątne łuków  $E$  i  $E'$  również będą symetryczne względem cięciwy  $AB$ , bo cięciwa  $AB$  leży na płaszczyźnie rzutowania i jest swoim obrazem. Skoro rzuty łuków  $E$  i  $E'$  tworzą elipsę i są symetryczne względem cięciwy  $AB$ , cięciwa  $AB$  musi być osią otrzymanej z rzutu elipsy. Rzutując  $E$  oraz  $E'$  średnica  $AB$  zachowa swoją długość, zatem jedna z półosi elipsy będzie miała długość  $\frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ . Druga z półosi zależy od wyboru łuku na półsferze Beltramięgo, który będziemy rzutować. Jeśli łuk  $E$  nachylony jest pod kątem  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , to długość półosi wyraża się poprzez  $\cos \alpha$ . Ponieważ kosinus jest ciągły i monotoniczny, przebiegać on będzie dla  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  przedział  $(0, 1)$ . Środkiem elipsy będzie punkt  $S$ , ponieważ leży w połowie  $AB$  - osi elipsy. Z Twierdzenia 5.1 wiemy, że nie ma innych ekwidystant względem prostej bazowej reprezentowanej cięciwą  $AB$  niż łuki na półsferze Beltramięgo, zatem otrzymujemy tezę twierdzenia.  $\square$

Przechodzimy do przypadku, gdzie prosta bazowa  $L$  reprezentowana jest cięciwą  $AB$  nieprzechodzącą przez środek modelu. Ze Stwierdzenia 5.2 wiemy, że łuk  $E'$ , będący dopełnieniem łuku  $E$  reprezentującego ekwidystantę na półsferze Beltramięgo, po rzutowaniu na dysk Kleina jest także ekwidystantą. Rozważmy zatem taką elipsę, będącą rzutem łuków  $E$  oraz  $E'$ , styczną do brzegu modelu w punktach będących końcami cięciwy  $AB$  reprezentującej prostą bazową. Umieścimy model w układzie kartezjańskim w taki sposób, jak w Uwadze 1.5 oraz tak, by cięciwa  $AB$  była prostopadła do osi  $O_x$ . Oznaczmy środek modelu przez  $S = (0, 0)$ . Oznaczmy przez  $C = (d, 0)$  punkt na cięciwie  $AB$ , który przecina jedna z osi elipsy. Punkty  $X'$  oraz  $Y'$  to wierzchołki elipsy (patrz Rysunek 5.4). Na półsferze Beltramięgo odpowiadają im punkty  $X$  i  $Y$ . Oznaczmy współrzędne punktu  $X'$  przez  $(t, 0)$ .



Rysunek 5.4: Elipsa, której fragmenty reprezentują w dysku Kleina ekwidystanty.

**Twierdzenie 5.7.** Niech  $L$  będzie prostą w modelu Kleina, reprezentowaną cięciwą  $AB$  nieprzechodzącą przez środek  $S$  modelu i niech  $d$  będzie euklidesową odległością  $S$  od  $AB$ . Niech  $m$  będzie euklidesową prostą przechodzącą przez  $S$  i prostopadłą do cięciwy  $AB$  i niech  $C$  będzie punktem przecięcia  $m$  z  $AB$ . Linia zawarta w dysku modelu reprezentuje ekwidystantę prostej bazowej  $L$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest fragmentem o końcach w punktach  $A$  oraz  $B$  dowolnej elipsy  $\mathcal{E}$ , opisaney w poniższy sposób za pomocą parametru  $t \in (-1, d)$ :

- środek  $Q$  elipsy  $\mathcal{E}$  leży na prostej  $m$ , po tej samej stronie punktu  $C$ , co  $S$ , w odległości od  $C$  wynoszącej:

$$|QC| = d - \frac{d(1-t^2)}{d^2 - 2dt + 1};$$

- prosta  $m$  jest jedną z osi symetrii elipsy, zaś długość półosi związanej z tą osią wynosi:

$$a = \frac{(t-d)(dt-1)}{d^2 - 2dt + 1};$$

- długość drugiej półosi elipsy  $\mathcal{E}$  wynosi:

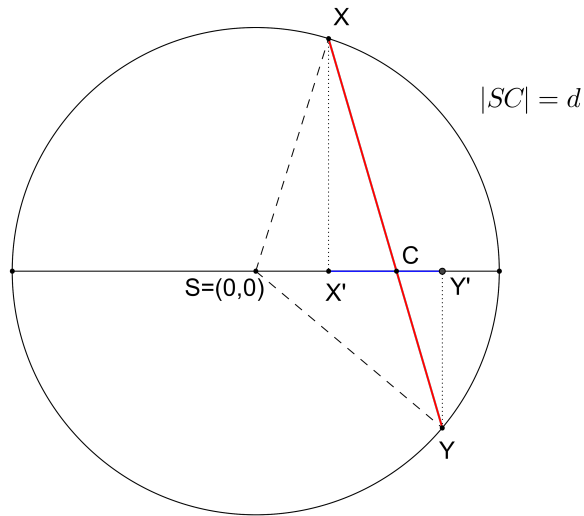
$$b = \frac{1-dt}{\sqrt{d^2 - 2dt + 1}}.$$

Parametr  $t$  jest przy tym równy współrzędnej  $x$ -owej wierzchołka elipsy leżącego na prostej  $m$ , po tej samej stronie punktu  $C$ , co  $S$  (patrz Rysunek 5.4).

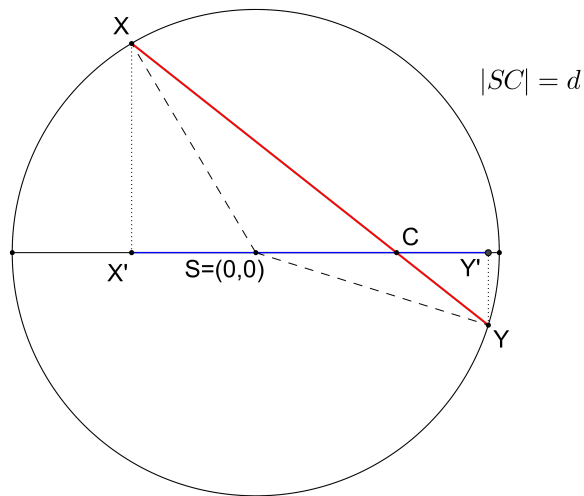
*Dowód.* Rozważmy półsferę Beltramiego oraz jej lustrzane odbicie będące dopełnieniem do sfery. Niech będzie dany łuk  $E$  reprezentujący ekwidystantę na półsferze Beltramiego. Przekrój sfery płaszczyzną zawierającą  $E$  utworzy na sferze okrąg składający się z łuku  $E$  oraz łuku  $E'$  na dolnej połowie sfery.

Rozważmy przekrój płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny dysku Kleina przechodzącą przez środek modelu  $S$  oraz prostopadłą do cięciwy  $AB$  (patrz Rysunek 5.5 i Rysunek 5.6). Na rozważanej płaszczyźnie oznaczymy punkty:

- $X$  punkt na górnej półsferze należący do  $E$ ;
- $Y$  punkt na dolnej półsferze należący do "przedłużenia"  $E$  na dolną półsferę;
- $X'$  oraz  $Y'$  - rzuty prostokątne punktów  $X$  oraz  $Y$  na dysk Kleina;
- $C$  punkt w przekroju należący do cięciwy  $AB$ ;
- $S$  środek modelu Kleina.



Rysunek 5.5: Przekrój sfery  $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$  płaszczyzną prostopadłą do  $\mathcal{K}$ , przechodzącą przez środek modelu  $S$  oraz prostopadłą do cięciwy  $AB$  reprezentującej prostą  $L$  na dysku Kleina.



Rysunek 5.6: Przekrój sfery  $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$  płaszczyzną prostopadłą do  $\mathcal{K}$ , przechodzącą przez środek modelu  $S$  oraz prostopadłą do cięciwy  $AB$  reprezentującej prostą  $L$  na dysku Kleina.

Niezależnie od tego, czy punkt  $X'$  leży po tej samej stronie punktu  $S$ , co punkt  $C$  (patrz Rysunek 5.5), czy  $S$  leży pomiędzy punktami  $X'$  i  $C$  (patrz Rysunek 5.6), możemy zapisać układ równań:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Z trójkąta } \triangle X'XS : \quad t^2 + |X'X|^2 = 1 \\ \text{Z trójkąta } \triangle X'CX : \quad (d-t)^2 + |XX'|^2 = |XC|^2 \\ \text{Z trójkąta } \triangle CY'Y : \quad |CY'|^2 + |YY'|^2 = |CY|^2 \\ \text{Z trójkąta } \triangle Y'YS : \quad (|CY'| + d)^2 + |Y'Y|^2 = 1 \\ \text{Z twierdzenia o cięciwach :} \quad |XC||CY| = (1-d)(1+d). \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Rozwiązując powyższy układ równań, traktując  $t$  jako parametr otrzymujemy następujące zależności:

$$\left\{ \begin{array}{l} |CY'| = \frac{(1-d^2)(d-t)}{d^2 - 2dt + 1} \\ |CY| = \frac{1-d^2}{\sqrt{d^2 - 2dt + 1}} \\ |XC| = \sqrt{d^2 - 2dt + 1}. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Można teraz wyznaczyć długości półosi:  $a$  i  $b$  oraz współrzędną  $x$ -ową, oznaczoną przez  $q$ , środka elipsy:

$$\begin{aligned} a &= \frac{|X'S| + |SC| + |CY'|}{2} = \frac{(t-d)(dt-1)}{d^2 - 2dt + 1}, \\ b &= \frac{|XC| + |CY|}{2} = \frac{(1-d)}{\sqrt{d^2 - 2dt + 1}}, \\ q &= t + a = \frac{d(1-t^2)}{d^2 - 2dt + 1}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Odległość środka  $Q$  elipsy od cięciwy  $AB$  wynosi:

$$|QC| = |SC| - |SQ| = d - q = d - \frac{d(1-t^2)}{d^2 - 2dt + 1}.$$

Parametr  $t$  odpowiada współrzędnej  $x$ -owej punktu  $X'$ . Punkt  $X'$  może przyjmować położenia na prostej  $m$  od jednego końca modelu do punktu  $C$ , bez tych punktów. Zatem parametr  $t$  przebiega przedział  $t \in (-1, d)$ .  $\square$

### 5.3 Opis przez styczność

W poprzednim podrozdziale wyznaczyliśmy zależności opisujące fragmenty elips reprezentujących ekwidystanty w modelu Kleina. Okazało się, że zależności są dość skomplikowane. Wyjątkiem był przypadek, gdy cięciwa  $AB$  reprezentująca prostą bazową  $L$  przechodziła przez środek modelu  $S$  (była średnicą). W tym rozdziale pokażemy nieco prostszy sposób rozpoznawania ekwidystant o prostej bazowej reprezentowanej przez cięciwę różną od średnicy. Uzasadnimy również, że jest on równoważny z podejściem, jak w Twierdzeniu 5.7.

**Twierdzenie 5.8.** *Niech  $L$  będzie prostą nieeuklidesową reprezentowaną w modelu Kleina cięciwą  $AB$ , nieprzechodzącą przez środek modelu  $S$ . Linia zawarta wewnątrz modelu Kleina reprezentuje ekwidystantę prostej  $L$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest fragmentem o końcach w  $A$  i  $B$  elipsy o środku leżącym na symetralnej cięciwy, styczną do brzegu modelu w punktach  $A$  i  $B$ .*

*Dowód.* Aby udowodnić twierdzenie rozważymy wynikanie w obie strony.

Dowód implikacji  $\Rightarrow$

Natychmiast wynika z Wniosku 5.5.

Dowód implikacji  $\Leftarrow$

Rozważmy model Kleina w układzie kartezjańskim, jak w Uwadze 1.5. Równanie opisujące okrąg jest postaci:

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (5.4)$$

Niech cięciwa  $AB$ , reprezentująca prostą  $L$  w modelu Kleina będzie oddalona o odległość  $d > 0$  od środka układu współrzędnych oraz będzie równoległa do osi  $O_y$ . Rozważmy elipsę o środku leżącym na osi  $O_x$ , styczną do dysku Kleina w punktach  $A$  i  $B$ . Równanie takiej elipsy jest postaci:

$$\frac{(x - q)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.5)$$

Aby spełnić pozostałe założenia na elipsę jak w twierdzeniu, musimy zapewnić następujące warunki:

1. elipsa zadana równaniem (5.5) przechodzi przez punkty  $A$  i  $B$ ;
2. elipsa zadana równaniem (5.5) oraz okrąg zadany równaniem (5.4) mają wspólne styczne w punktach  $A$  oraz  $B$ .

Ponieważ rozważania dla punktów  $A$  i  $B$  dają te same wyniki, sprawdzimy zależności dla punktu  $A$  (dla punktu  $B$  otrzymujemy takie same równania).

Ad.1 Elipsa musi przechodzić przez punkt  $A$ , więc punkt  $A$  spełnia równanie (5.5):

$$\frac{(d - q)^2}{a^2} + \frac{1 - d^2}{b^2} = 1. \quad (5.6)$$

Ad.2 Chcemy aby równania stycznych w punktach  $A = (d, \sqrt{1 - d^2})$  i  $B = (d, -\sqrt{1 - d^2})$  do okręgu i elipsy były takie same. Korzystając ze wzoru (2.3), traktując okrąg jak elipsę o środku w  $S = (0, 0)$  oraz półosiach  $a = b = 1$ , otrzymujemy równanie stycznej do okręgu. Równanie stycznej do okręgu opisanego wzorem (5.4) w punkcie  $A$  opisuje równanie:

$$xd + y\sqrt{1 - d^2} = 1. \quad (5.7)$$

Podobnie równanie stycznej w punkcie  $A$  do elipsy opisanej równaniem (5.5) opisuje równanie:

$$\frac{(x - q)(d - q)}{a^2} + \frac{y\sqrt{1 - d^2}}{b^2} = 1. \quad (5.8)$$

Zapisując równanie (5.7) w postaci kierunkowej otrzymamy:

$$y = x \frac{-d}{\sqrt{1 - d^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - d^2}}. \quad (5.9)$$

Równanie (5.8) w postaci kierunkowej ma postać:

$$y = x \frac{-b^2(d-q)}{a^2\sqrt{1-d^2}} + \frac{b^2(a^2+qd-q^2)}{a^2\sqrt{1-d^2}}. \quad (5.10)$$

Otrzymawszy odpowiednie zależności, możemy zapisać układ równań. Jako pierwsze równanie rozważmy zależność, jaką otrzymaliśmy w punkcie 1. Z punktu 2. przyrównujemy do siebie współczynniki kierunkowe równań stycznych. Otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} \frac{-d}{\sqrt{1-d^2}} = \frac{b^2(q-d)}{a^2\sqrt{1-d^2}} \\ \frac{(d-q)^2}{a^2} + \frac{1-d^2}{b^2} = 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Rozwiązując układ równań (5.11) otrzymujemy zależności:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 \frac{d-q}{d}, \\ b^2 &= 1-dq. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Możemy teraz porównać równanie elips spełniających warunki styczności z równaniami elips z poprzedniego podrozdziału. Równanie elipsy z Twierdzenia 5.7 ma postać:

$$\frac{\left(x - \frac{d(1-t^2)}{d^2-2dt+1}\right)^2}{\frac{(t-d)^2(dt+1)^2}{(d^2-2dt+1)^2}} + \frac{y^2}{\frac{(1-dt)^2}{d^2-2dt+1}} = 1. \quad (5.13)$$

Natomiast równanie elipsy otrzymanej z warunku styczności ma postać:

$$\frac{(x-q)^2}{(1-dq)\frac{d-q}{d}} + \frac{y^2}{1-dq} = 1. \quad (5.14)$$

Jeśli równania mają reprezentować tę samą rodzinę elips muszą być równoważne. Przyjmijmy za  $q$  z równania (5.14) zależność na środek elipsy z równania (5.13). Następnie podstawmy za  $q$  zależność  $\frac{d(1-t^2)}{d^2-2dt+1}$  w zależnościach na  $a^2$  oraz  $b^2$ . Po podstawieniu i uproszczeniu otrzymujemy:

$$b^2 = 1-dq = 1-d \frac{d(1-t^2)}{d^2-2dt+1} = \frac{(dt-1)^2}{d^2-2dt+1},$$

$$a^2 = b^2 \frac{d-q}{d} = \frac{(dt-1)^2}{d^2-2dt+1} \cdot \frac{d - \frac{d(1-t^2)}{d^2-2dt+1}}{d} = \frac{(d-t)^2(dt-1)^2}{(d^2-2dt+1)^2}.$$

Otrzymane zależności na parametry  $a$  i  $b$  są takie same jak w Twierdzeniu 5.7. Pokazaliśmy, że elipsa styczna w punktach  $A$  i  $B$  spełnia zależności z Twierdzenia 5.7. Zatem rozważana elipsa jest ekwidystantą. □

## Rozdział 6

# Opis okręgów w modelu Kleina

W tym rozdziale odpowiemy na pytanie, jakie krzywe reprezentują nieeuklidesowe okręgi w modelu Kleina.

### 6.1 Okręgi nieeuklidesowe o środku w środku modelu

W tym podrozdziale rozważać będziemy jedynie nieeuklidesowe okręgi ośrodku w środku modelu Kleina.

**Twierdzenie 6.1.** *Linia zawarta wewnątrz modelu Kleina jest nieeuklidesowym okręgiem o środku w środku modelu wtedy i tylko wtedy, gdy jest euklidesowym okręgiem o środku w środku modelu.*

*Dowód.* Aby udowodnić twierdzenie rozważymy implikacje w dwie strony.

Dowód implikacji  $\Rightarrow$ :

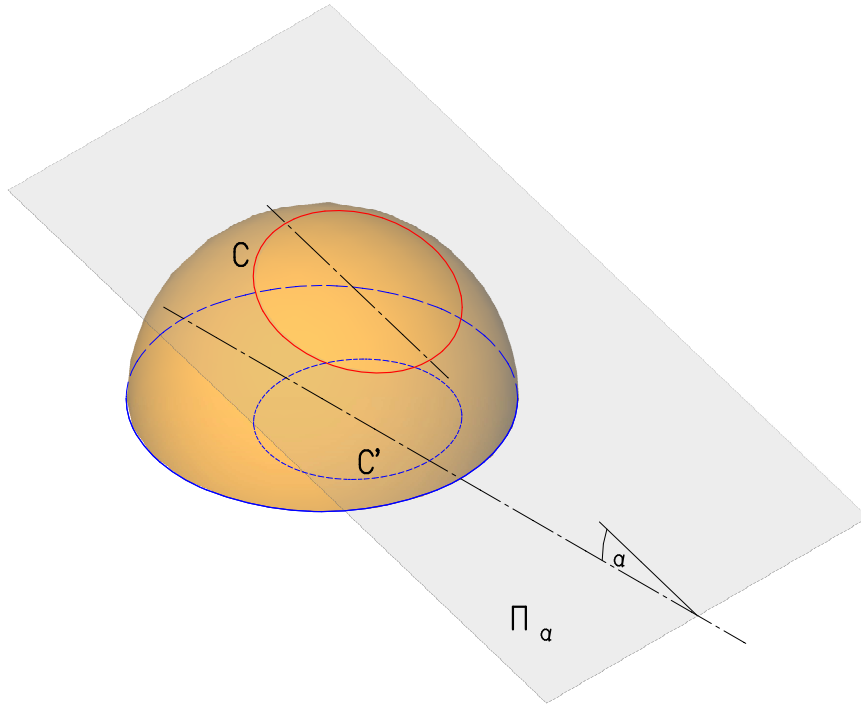
Na podstawie Definicji 1.17, chcąc znaleźć okrąg, należy rozważyć pęk prostych o środku w punkcie  $O$ . Zauważmy, że proste z pęku prostych przechodzących przez środek modelu są reprezentowane przez średnice okręgu. Z Faktu 1.7 wiemy, że nieeuklidesowymi prostymi prostopadłymi do prostych reprezentowanych w modelu Kleina przez średnice są proste reprezentowane przez odcinki prostopadłe do danej średnicy w zwykłym, euklidesowym sensie. Styczne do okręgu są prostopadłe do promienia wystawionego do punktu styczności. Dlatego okrąg nieeuklidesowy będzie reprezentowany w modelu Kleina przez euklidesowy okrąg o środku w środku modelu.

Dowód implikacji  $\Leftarrow$ :

Niech  $X$  będzie dowolnym punktem płaszczyzny Kleina. Przez punkt  $X$  przechodzi jeden z nieeuklidesowych okręgów reprezentowanych przez okrąg o środku w środku modelu. Z Faktu 1.16 istnieje dokładnie jeden okrąg przechodzący przez dany punkt, zatem rozważany okrąg reprezentuje jedyny nieeuklidesowy okrąg przechodzący przez punkt  $X$ .  $\square$

### 6.2 Opis za pomocą półsfery Beltramiiego

W tym podrozdziale rozważymy okręgi o środku w dowolnym punkcie, poza środkiem modelu Kleina. Na początku zaobserwujemy, jak wyglądają okręgi na półsferze Beltramiiego.

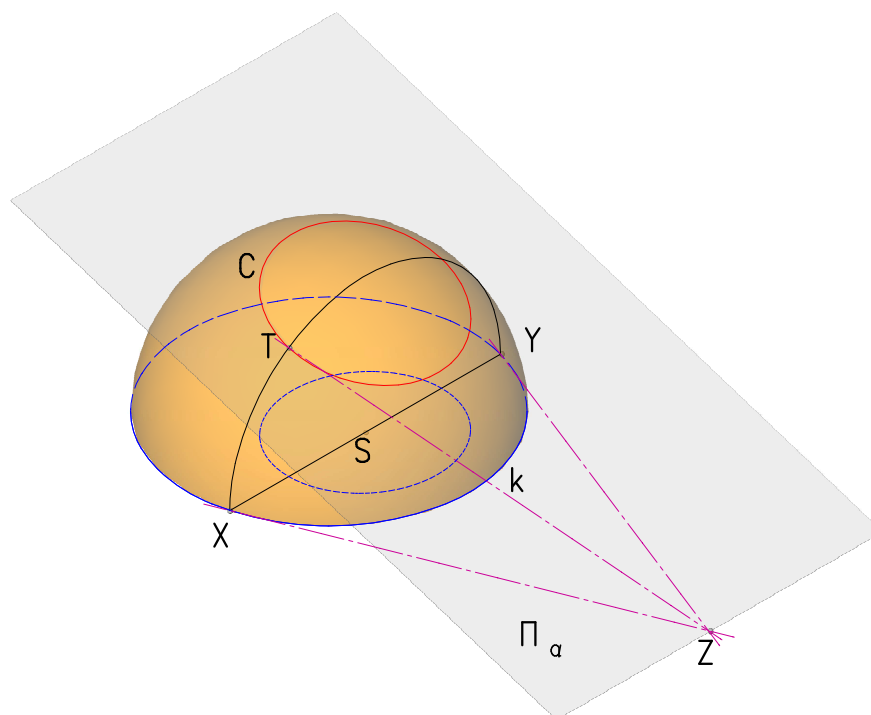


Rysunek 6.1: Przekrój sfery płaszczyzną prostopadłą do  $\Pi_\alpha$  przechodzącą przez prostą  $p$  (polarną punktu  $A$  względem brzegu modelu) i nachyloną do płaszczyzny modelu pod kątem  $\alpha$ .

**Twierdzenie 6.2.** *Niech  $A$  będzie punktem wewnątrz modelu Kleina, różnym od środka modelu. Niech  $p$  będzie prostą polarną dla punktu  $A$  względem brzegu modelu Kleina. Wówczas nieeuklidesowy okrąg  $C'$  o środku w  $A$  jest reprezentowany na półsferyze Beltramiiego przez okrąg powstały z przecięcia półsfery płaszczyzną zawierającą prostą  $p$ , nachyloną do płaszczyzny modelu pod pewnym kątem  $\alpha$ .*

*Dowód.* Rozważmy dowolną cięciwę  $XY$  na dysku Kleina, przechodzący przez punkt  $A$  oraz odpowiadający jej łuk na półsferyze Beltramiiego o końcach w  $X$  i  $Y$  (powstały w wyniku przekroju półsfery Beltramiiego płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny modelu, przechodzącą przez cięciwę  $XY$ ). Ze Stwierdzenia 3.4 mamy, że styczne do brzegu modelu w punktach  $X$  i  $Y$  przecinają się w punkcie  $Z$  leżącym na prostej polarnej  $p$ . Oznaczmy punkt przecięcia okręgu  $C'$  z łukiem  $\widehat{XY}$  przez  $T$  (patrz Rysunek 6.2). Chcemy pokazać, że kąt między stycznymi łuku  $\widehat{XY}$  oraz okręgu  $C'$  jest prosty. Zauważmy, że  $Z$  jest wierzchołkiem stożka, którego tworzące wyznaczają proste prostopadłe do stycznych łuku  $\widehat{XY}$ . Półprosta o początku w  $Z$  przechodząca przez  $T$  jest prostopadła do stycznej łuku  $\widehat{XY}$ . Wystarczy pokazać, że półprosta  $TZ$  jest styczną do okręgu  $C'$ . Półprosta  $TZ$  oraz okrąg  $C'$  leżą na wspólnej płaszczyźnie wyznaczonej przez prostą polarną  $p$ , nachylonej pod pewnym kątem do płaszczyzny modelu. Półprosta  $TZ$  ma jeden punkt wspólny z  $C'$ , ponieważ przechodzi przez  $T$  należący do  $C'$ . Jest on dokładnie jeden, ponieważ półprosta jest styczna do półsfery Beltramiiego, w której zawiera się  $C'$ . Zatem półprosta  $TZ$  jest styczną do okręgu  $C'$  w punkcie  $T$ . Stąd mamy, że dla dowolnego łuku  $\widehat{XY}$  kąt między stycznymi łuku  $\widehat{XY}$  oraz okręgu  $C'$  w punkcie ich przecięcia jest prosty. Zatem  $C'$  reprezentuje okrąg na

półsferyze Beltramiiego.



Rysunek 6.2: Przekrój sfery płaszczyzną prostopadłą do  $\Pi_\alpha$  przechodzącą przez prostą  $p$  (polarną punktu  $A$  względem brzegu modelu) i nachyloną do płaszczyzny modelu pod kątem  $\alpha$ .

□

**Twierdzenie 6.3.** *Linia zawarta w dysku Kleina reprezentuje nieeuklidesowy okrąg o środku w  $A$  różnym od środka modelu wtedy i tylko wtedy, gdy jest elipsą powstałą jako rzut prostokątny na płaszczyznę modelu jednego z okręgów na półsferyze Beltramiiego opisanych w Twierdzeniu 6.2.*

*Dowód.* Z Twierdzenia 6.1 oraz Twierdzenia 6.2 wiemy, jak wyglądają okręgi na półsferyze Beltramiiego. Ze Stwierdzenia 2.2 wiemy, że rzutując okrąg otrzymamy elipsę. Okręgi z Twierdzenia 6.2 po rzutowaniu będą zatem elipsami zawartymi wewnątrz modelu Kleina. □

# Bibliografia

- [1] John Stillwell, *Sources of Hyperbolic Geometry*. American Mathematical Society, Providence RI 1996.
- [2] Igor N. Bronsztejn, Konstantin A. Siemiendiajew, *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*. Wydanie trzecie poprawione, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1968.
- [3] Harold S.M. Coexter, Samuel L. Greitzer, *Geometry Revisited*. The Mathematical Association of America (Inc.), Washington D.C. 1967, str. 132-136.
- [4] David Hilbert, Stephan Cohn-Vossen, *Geometria pogładowa*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1956.
- [5] *Szkola geometrii. Odczyty kaliskie*. red. Marek Kordos, Wojciech Jędrychowski, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1993.