

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka nauczycielska

Mateusz Suwara

**PARKIETAŻE PLATOŃSKIE I SZACHOWNICE ARCHIMEDESOWSKIE
W GEOMETRII HIPERBOLICZNEJ**

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2012

Oświadczam, że pracę wykonałem samodzielnie i zgłaszam ją do oceny.

Data Podpis autora pracy:

Oświadczam, że praca jest gotowa do oceny przez recenzenta.

Data Podpis opiekuna pracy:

Spis treści

Wstęp	- 5 -
Rozdział 0. Wiadomości wstępne	- 7 -
0.1 Model półpłaszczyznowy Poincarego.....	- 7 -
0.2. Odległość punktu od prostej w modelu półpłaszczyznowym	- 10 -
0.3. Izometrie w modelu półpłaszczyznowym	- 10 -
0.4. Model dyskowy Poincarego – podstawowe informacje.....	- 13 -
0.5. Kosinus hiperboliczny i jego odwrotność	- 15 -
Rozdział 1. Wielokąty foremne	- 17 -
1.1. Pewien opis wielokątów foremnych w geometrii euklidesowej	- 17 -
1.2. Trójkąty tworzące hiperboliczny wielokąt foremny	- 19 -
1.3. Długość boku i miara kąta wewnętrznego w hiperbolicznym wielokącie foremnym	- 23 -
1.4. Promień okręgu wpisanego w hiperboliczny wielokąt foremny.....	- 25 -
Rozdział 2. Parkietaże platońskie	- 29 -
2.1. Parkietaże platońskie w geometrii euklidesowej	- 29 -
2.2. Parkietaże platońskie w geometrii hiperbolicznej.....	- 30 -
2.3. Określenie długość boku w hiperbolicznym parkietażu platońskim	- 31 -
2.4. Hiperboliczne parkietaże platońskie o najkrótszych bokach.....	- 32 -
2.5. Długość promienia okręgu wpisanego w wielokąt tworzący hiperboliczny parkietaż platoński.....	- 37 -
2.6. Długość boku w hiperbolicznym parkietażu platońskim dla parametrów n, k dążących do nieskończoności.....	- 38 -
Rozdział 3. Szachownice archimedesowskie	- 43 -
3.1. Szachownice archimedesowskie w geometrii euklidesowej	- 44 -
3.2. Szachownice archimedesowskie w geometrii hiperbolicznej.....	- 45 -
3.3. Długość boku w hiperbolicznej szachownicy archimedesowskiej.....	- 48 -
Bibliografia	- 55 -

Wstęp

Niniejsza praca jest rozwinięciem zagadnień omawianych na wykładzie „Podstawy geometrii i geometria nieeuklidesowa” prowadzonym przez prof. Jacka Świątkowskiego dla studentów matematyki Uniwersytetu Wrocławskiego.

Zamierzeniem autora było napisanie pracy w sposób elementarny i przystępny dla szerszego grona czytelników. Do jej zrozumienia wymagana jest jedynie podstawowa wiedza z zakresu geometrii euklidesowej i analizy matematycznej. Jako głównych adresatów poniższych rozważań wskazujemy uczniów i studentów kierunków ścisłych, którzy chcą poszerzyć swoją wiedzę dotyczącą geometrii hiperbolicznej.

Tematem pracy są wybrane parkietaże w geometrii hiperbolicznej. Autor skupia się na odmianach platońskich oraz jednym z typów parkietaży archimedesowskich – szachownicach archimedesowskich. Rozważania związane będą z analizą wielokątów foremnych tworzących wspomniane pokrycia płaszczyzny. Wszystkie parkietaże wyznaczone zostaną z dokładnością do parametrów opisowych, takich jak rodzaj i liczba wielokątów skupiających się wokół każdego z wierzchołków parkietażu. Drugim celem będzie wyznaczenie parametrów metrycznych takich wielokątów: długości boku i zależnej od niego miary kąta wewnętrznego.

Rozważania geometryczne w niniejszej pracy będą przeprowadzone w modelu półpłaszczyznowym Poincarego geometrii hiperbolicznej. Ponadto do prezentacji graficznych zostanie wykorzystany model dyskowy Poincarego. Krótka charakterystyka tych modeli została zamieszczona w Rozdziale 0, który ma charakter wprowadzający. Osoby poszukujące szerszych informacji związanych z geometrią hiperboliczną odsyłamy do pozycji zamieszczonych w bibliografii.

Szczególne podziękowania autor składa opiekunowi swojej pracy magisterskiej Profesorowi Jackowi Świątkowskiemu za fachową poradę i pomoc, jak również cenny czas poświęcony na konsultacje, które doprowadziły do ukończenia niniejszej pracy.

0. Wiadomości wstępne

Analizę parkietaży na płaszczyźnie nieeuklidesowej przeprowadzimy wykorzystując dwa modele geometrii hiperbolicznej. Będą to modele Poincarego: półpłaszczyznowy i dyskowy. Poniżej krótko omówimy te modele.

0.1. Model półpłaszczyznowy Poincarego

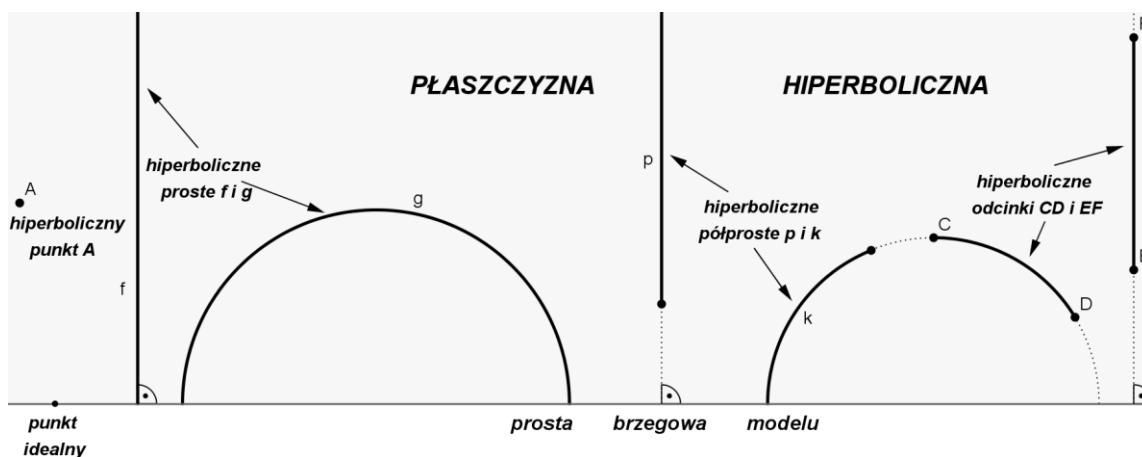
Model półpłaszczyznowy Poincarego jest modelem geometrii hiperbolicznej, jednak do jego opisu wykorzystujemy pojęcia znane z geometrii euklidesowej.

Rozważmy płaszczyznę euklidesową, oraz euklidesową prostą, którą nazwiemy **prostą brzegową modelu**. Punkty należące do tej prostej będziemy nazywać **punktami idealnymi**. Taka prosta podzieli płaszczyznę na dwie półpłaszczyzny. Wybierzmy jedną z tych części i nazwijmy **płaszczyzną hiperboliczną**. Dodajmy ponadto, że prosta brzegowa nie należy do płaszczyzny hiperbolicznej. **Hiperboliczne punkty** to punkty z wnętrza wybranej półpłaszczyzny. W ramach powszechnie przyjętej konwencji przyjmuje się, że prosta brzegowa to prosta pozioma, zaś półpłaszczyzna modelu to półpłaszczyzna leżąca ponad tą prostą. Wszystkie rysunki w pracy będą zgodne z tą konwencją.

Kolejnym pojęciem, które określimy jest **hiperboliczna prosta**. Wyróżnimy dwa rodzaje takich prostych.

- 1) Euklidesowe półproste prostopadłe do prostej brzegowej modelu (przekrój euklidesowej prostej prostopadłej do brzegu modelu z półpłaszczyzną modelu).
- 2) Euklidesowe półokręgi o środku leżącym na prostej brzegowej modelu (przekrój okręgu o takim środku z półpłaszczyzną modelu).

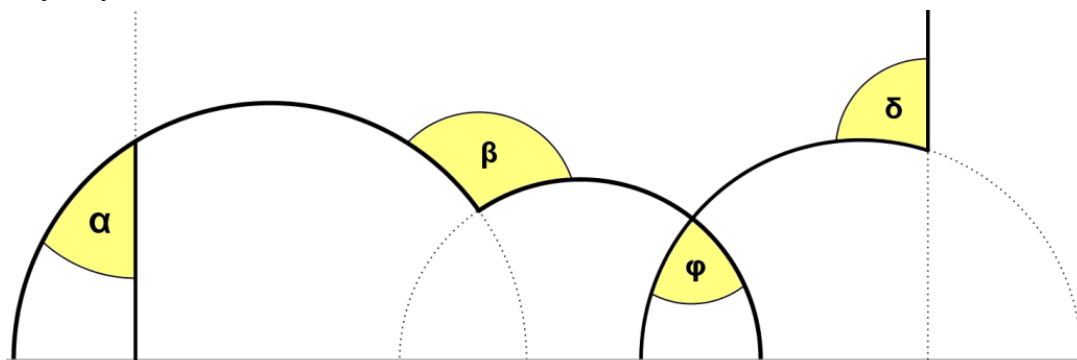
Hiperboliczne półproste i odcinki są zatem fragmentami powyżej opisanych prostych.



Rysunek 0.1.1.

Chcąc jeszcze lepiej przybliżyć czytelnikowi dotychczas omówione pojęcia, przykłady ich graficznej interpretacji przedstawiliśmy na Rysunku 0.1.1.

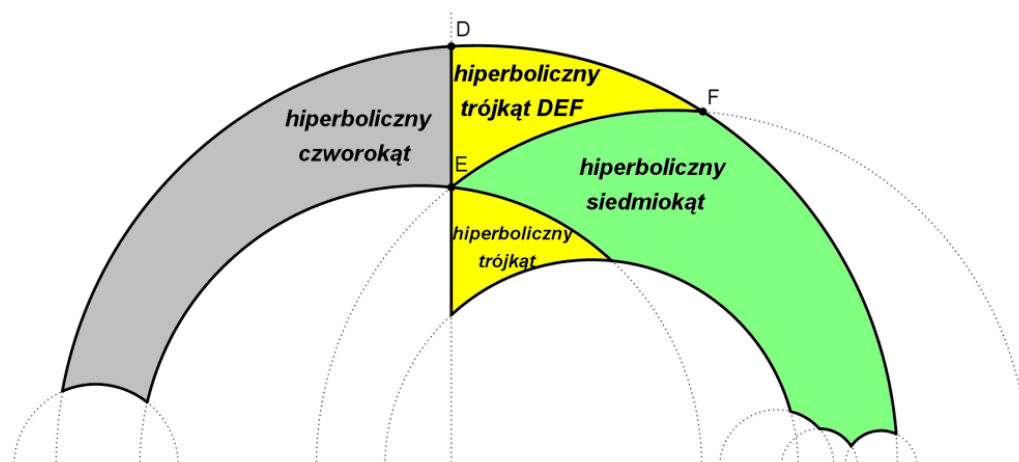
W przypadku przecięcia hiperbolicznych prostych, półprostych lub odcinków, powstają **hiperboliczne kąty**. Kąty te określamy tak jak na płaszczyźnie euklidesowej, jako obszar ograniczony dwoma półprostymi o wspólnym początku, wraz z tymi półprostymi. Tutaj będą to oczywiście hiperboliczne półproste. Przykładowe kąty hiperboliczne prezentujemy na poniższym rysunku.



Rysunek 0.1.2.

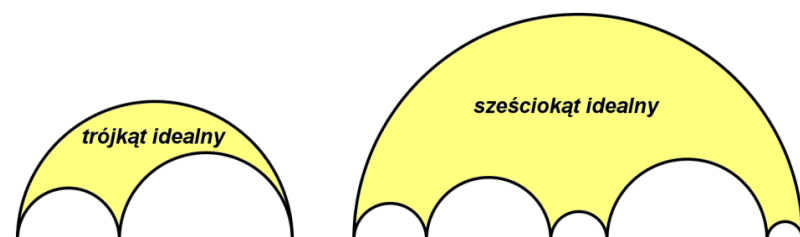
Pojawia się teraz pytanie, jak obliczyć **miarę hiperbolicznego kąta**. Określamy ją wyznaczając euklidesową miarę kąta między euklidesowymi st stycznymi do ramion tegoż kąta, poprowadzonymi z jego wierzchołka. Pamiętajmy o tym, że mówimy o ramionach hiperbolicznych, które faktycznie są euklidesowymi łukami lub odcinkami.

Podobnie jak przenieśliśmy pojęcie kąta z geometrii euklidesowej do geometrii hiperbolicznej, tak też możemy przenosić inne pojęcia. W szczególności zwróćmy uwagę na **hiperboliczne wielokąty**, których w dużej mierze będzie dotyczyć dalsza część pracy. Unikając powtarzania euklidesowej definicji, ograniczmy się teraz jedynie do graficznych przykładów, ukazanych na Rysunku 0.1.3.



Rysunek 0.1.3.

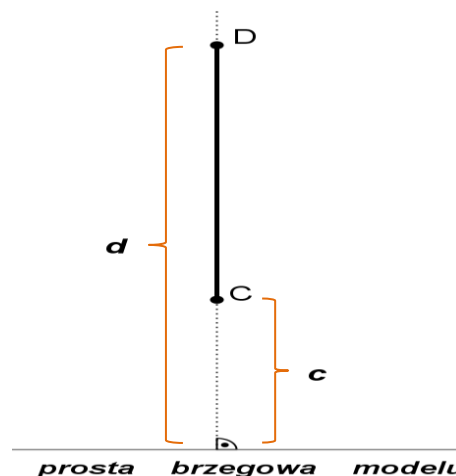
Innym specyficznym pojęciem związanym z geometrią hiperboliczną jest *wielokąt idealny*. Nazwiemy tak figurę tylko przypominającą wielokąt w modelu półpłaszczyznowym, której wszystkie wierzchołki są punktami idealnymi (leżą na prostej brzegowej), natomiast boki są hiperbolicznymi prostymi. Pamiętajmy jednak o tym, że figura taka nie jest w istocie wielokątem. Punkty idealne znajdujące się na prostej brzegowej nie należą do płaszczyzny hiperbolicznej. Określenia, że są one wierzchołkami wielokąta idealnego będziemy używali jedynie umownie, celem zwięzłego określenia takich przypadków. Dwa przykładowe wielokąty idealne prezentujemy poniżej.



Rysunek 0.1.4.

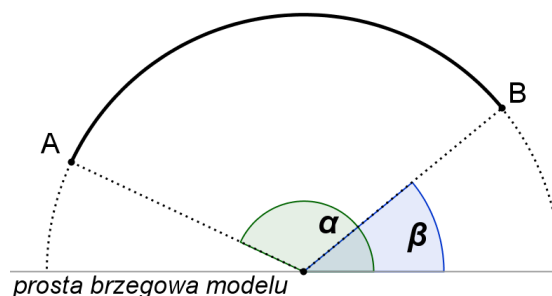
Na koniec powiedzmy jeszcze jak obliczamy *hiperboliczną długość odcinka*. Faktycznie mamy dwa rodzaje hiperbolicznych odcinków (leżące na euklidesowej półprostej, albo na euklidesowym półokręgu), podamy zatem dwa wzory pozwalające obliczyć długość odcinka.

Wyznaczając długość hiperbolicznego odcinka zawierającego się w euklidesowej półprostej, należy określić euklidesowe odległości końców tego odcinka od prostej brzegowej (zgodnie z Rysunkiem 0.1.5, są to odległości c i d). Następnie obliczając wartość wyrażenia $\left| \ln\left(\frac{d}{c}\right) \right|$, otrzymujemy szukaną długość hiperbolicznego odcinka CD .



Rysunek 0.1.5.

Natomiast w przypadku odcinków leżących na euklidesowych półokręgach, hiperboliczną długość określamy wykorzystując dodatnio zorientowane kąty między prostą brzegową a promieniami wspomnianego półokręgu, poprowadzonymi do końców rozpatrywanego odcinka. Następnie (przyjmując oznaczenia zgodne z Rysunkiem 0.1.6) obliczając wartość wyrażenia $\left| \ln\left(\frac{\operatorname{tg}(\alpha/2)}{\operatorname{tg}(\beta/2)}\right) \right|$, otrzymamy długość hiperbolicznego odcinka AB .



Rysunek 0.1.6.

0.2. Odległość punktu od prostej w modelu półpłaszczyznowym.

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy już jak określić długość hiperbolicznego odcinka, czyli odległość między dwoma różnymi hiperbolicznymi punktami. W dalszej części pracy nawiążemy także do hiperbolicznej odległości punktu od prostej. Wykorzystując elementarne fakty z geometrii hiperbolicznej otrzymujemy poniższe własności (ich uzasadnienie pominiemy). Są one bezpośrednio związane z określaniem tej odległości.

Własność 0.2.1. *Przez punkt A nienależący do hiperbolicznej prostej l przechodzi dokładnie jedna hiperboliczna prosta prostopadła do l .*

Punkt będący przekrojem hiperbolicznej prostej prostopadłej do l i przechodzącej przez punkt A z prostą l , nazywamy **rzutem prostokątnym** punktu A na prostą l i oznaczamy A' . Punkt ten ma pewną charakterystyczną własność.

Własność 0.2.2. *Spośród wszystkich punktów należących do prostej l , najmniejszą odległość od punktu A ma punkt A' .*

Zatem nasuwa się następujący wniosek.

Własność 0.2.3. *Odległość punktu A od prostej l (rozumiana jako minimalna odległość między punktem A , a punktami z prostej l) jest równa odległości A od A' .*

0.3. Izometrie w modelu półpłaszczyznowym

Izometrie definiujemy analogicznie jak w przypadku geometrii euklidesowej.

Hiperboliczna izometria to przekształcenie zachowujące hiperboliczną odległość.

Hiperbolicznymi izometriami są **hiperboliczne symetrie osiowe** względem hiperbolicznych prostych, jak również złożenia takich symetrii.

W rozumieniu euklidesowym rozróżniamy dwa rodzaje hiperbolicznych symetrii osiowych względem hiperbolicznych prostych.

- 1) Jeśli hiperboliczna prosta jest euklidesową półprostą, to rozważamy euklidesową symetrię osiową względem tej półprostej.
- 2) Jeśli hiperboliczna prosta jest euklidesowym półokręgiem, to rozważamy euklidesową inwersję względem tego półokręgu.

Euklidesowa symetria osiowa to zwykle odbicie, które jest nam stosunkowo dobrze znane. Warto jednak przypomnieć kilka informacji związanych z euklidesową inwersją.

Inwersja względem okręgu o środku O i promieniu r jest to przekształcenie płaszczyzny (bez punktu O), przyporządkowujące dowolnemu punktowi X , punkt X' leżący na półprostej OX i spełniający zależność $|OX| \cdot |OX'| = r^2$.

Euklidesową inwersję zdefiniowaliśmy względem okręgu. Rozważmy jednak obcięcie płaszczyzny euklidesowej do półpłaszczyzny, której brzeg przechodzi przez środek okręgu inwersji. Zauważmy, że inwersja względem tego okręgu przekształca tę półpłaszczyznę na siebie. Bez zmniejszania ogólności przyjmijmy, że rozważana półpłaszczyzna to płaszczyzna hiperboliczna modelu, której brzegiem jest prosta brzegowa. Tak otrzymujemy inwersję względem euklidesowego półokręgu wyrażającego hiperboliczną prostą, którą określamy jako hiperboliczną symetrię osiową względem tej prostej.

Zwróćmy uwagę na cztery zasadnicze własności takich inwersji.

- 1) Inwersje zachowują hiperboliczną odległość pomiędzy parami punktów.
- 2) Inwersje są przekształceniami półpłaszczyzny modelu, różnowartościowymi i „na”.
- 3) Inwersje przekształcają hiperboliczne proste w hiperboliczne proste.
- 4) Inwersje zachowują kąty między hiperbolicznymi prostymi.

Ponieważ inwersje pełnią w tej pracy jedynie funkcję pomocniczą, dlatego pominiemy uzasadnienie powyższych własności, kierując przy tym zainteresowanego czytelnika do pozycji [1] (Rozdział 5), zamieszczonej w bibliografii. Znajdziemy tam odpowiednie uzasadnienia, jak również obszerniejsze informacje dotyczące inwersji.

Inwersje posłużą nam do uzasadnienia istotnego spostrzeżenia, które wykorzystamy w dalszej części pracy.

Celem zwięźlejszego sformułowania poniższego spostrzeżenia, hiperboliczną prostą wyrażoną przez euklidesowy półokrąg o środku w punkcie O (na brzegu modelu) i promieniu r , będziemy oznaczali jako (O, r) .

Spostrzeżenie 0.3.1. *Dowolny trójkąt prostokątny zadany w modelu półpłaszczyznowym można przekształcić poprzez hiperboliczną izometrię do postaci opisanej poniższymi warunkami.*

- *Wierzchołek kąta prostego jest punktem przecięcia hiperbolicznej prostej wyrażonej przez euklidesową półprostą o początku w punkcie O_1 (na brzegu modelu) i hiperbolicznej prostej wyrażonej przez euklidesowy półokrąg $(O_1, r_1 = 1)$.*
- *Jedna z przyprostokątnych (dowolnie wybrana) położona jest na prostej wyrażonej przez euklidesową półprostą o początku w punkcie O_1 , nad półokręgiem $(O_1, r_1 = 1)$.*
- *Druga przyprostokątna leży na prostej wyrażonej przez półokrąg $(O_1, r_1 = 1)$, po prawej stronie euklidesowej półprostej zawierającej poprzednią przyprostokątną.*

Powyższe warunki determinują położenie przeciwprostokątnej. Jest ona częścią prostej wyrażonej przez euklidesowy półokrąg (jego środek oznaczmy jako O_2 , a promień r_2).

Zanim uzasadnimy to spostrzeżenie, sformułujmy pomocniczy lemat.

Lemat pomocniczy. *Inwersja względem półokręgu S o środku w punkcie O i promieniu r spełnia poniższe warunki.*

- a) *Zachowuje punkty leżące na półokręgu S .*
- b) *Przekształca półokrąg o jednym z końców w punkcie O na półprostą.*
- c) *Przekształca półprostą przechodzącą przez O (bez punktu O) w tą samą półprostą.*
- d) *Przekształca półokrąg o środku w punkcie O i promieniu u na półokrąg o środku w punkcie O i promieniu r^2/u .*

Dowód tego lematu pomijamy, kierując zainteresowanego czytelnika do odpowiedniej literatury ([1], Rozdział 5).

Przejdźmy teraz do uzasadnienia Spostrzeżenia 0.3.1.

W poniższym dowodzie postaramy się unikać nadmiernego stosowania określeń „hiperboliczny” i „euklidesowy”. Z góry przyjmijmy, że mówiąc o izometriach, trójkącie i prostych, myślimy o nich w sensie hiperbolicznym. Natomiast inwersje, półproste i półokręgi, rozumiemy w sensie euklidesowym.

Dowód Spostrzeżenia 0.3.1: Rozpatrzmy dowolny trójkąt prostokątny zadany w modelu półpłaszczyznowym. Poprzez kolejne izometrie przekształcimy ten trójkąt do postaci opisanej w spostrzeżeniu. Zaczniemy od oznaczenia poszczególnych przyprostokątnych w takim trójkącie. Niech p_1 będzie dowolnie wybraną hiperboliczną przyprostokątną tego trójkąta. Poprzez kolejne przekształcenia dążymy do tego, żeby leżała ona na prostej wyrażonej przez półprostą o początku w punkcie O_1 , ponad półokręgiem ($O_1, r_1 = 1$). Drugą hiperboliczną przyprostokątną oznaczmy przez p_2 . Po przekształceniach powinna ona leżeć na prostej wyrażonej przez półokrąg ($O_1, r_1 = 1$), po prawej stronie p_1 . Rozumowanie podzielimy na kilka etapów. Poszczególne etapy pomijamy, jeśli warunki w nich podane są już spełnione.

Etap I. Dążymy do tego, aby p_1 leżała na prostej wyrażonej przez półprostą.

Jeżeli p_1 nie leży na półprostej, wtedy wykorzystajmy przekształcenie przez izometrię. Rozpatrzmy inwersję względem półokręgu, którego środek znajduje się w jednym z końców półokręgu zawierającego p_1 . Poprzez tę inwersję otrzymamy przystający trójkąt, w którym zgodnie z podpunktem b) Lematu pomocniczego oraz trzecią z podanych wcześniej własności inwersji, p_1 leży na półprostej.

Na koniec tego etapu zwróćmy jeszcze uwagę na wzajemne położenie boków trójkąta powstałego po powyższych przekształceniach. Pozostałe dwa boki trójkąt muszą teraz leżeć na półokręgach. Gdyby któryś z nich leżał na półprostej, to ta półprosta nie mogłaby się przeciąć z półprostą zawierającą p_1 (obie są prostopadłe do prostej brzegowej), takie przecięcie tworzy natomiast wierzchołek trójkąta.

Kolejną rzeczą wartą podkreślenia są ramiona kąta prostego w tym trójkącie. Jedna z przyprostokątnych (p_1) leży teraz na półprostej, natomiast druga (p_2) na półokręgu.

Z ich prostopadłości możemy wywnioskować, że półprosta zawierająca p_1 wychodzi ze środka półokręgu zawierającego p_2 .

Etap II. Dążymy do postaci trójkąta, która umiejscowi p_2 na półokręgu ($O_1, r_1 = 1$).

Oznaczmy środek półokręgu zawierającego p_2 jako O_1 . Jeżeli długość promienia tego półokręgu jest różna od 1, to wykonajmy kolejne przekształcenie będące izometrią. Przyjmując, że długość wspomnianego promienia wynosi $z \neq 1$ wykorzystajmy inwersję względem półokręgu (O_1, \sqrt{z}). Zgodnie z punktem d) Lematu pomocniczego taka inwersja przekształci cały trójkąt (z etapu I), tak żeby p_2 należała do półokręgu ($O_1, r_1 = 1$).

Co więcej zauważmy, że taka inwersja nadal umiejscawia przyprostokątną p_1 na półprostej wychodzącej z O_1 (zgodnie z punktem c) Lematu pomocniczego).

Etap III. Przekształcamy przyprostokątną p_1 do położenia ponad półokręgiem ($O_1, r_1 = 1$).

Jeżeli p_1 nie leży ponad półokręgiem ($O_1, r_1 = 1$), to leży wewnątrz tego półokręgu. Izometria z której skorzystamy tym razem to symetria osiowa względem prostej wyrażonej przez półokrąg zawierający p_2 . Faktycznie jest to inwersja względem tego półokręgu. Zgodnie z punktem b) Lematu pomocniczego, takie przekształcenie odwzorowuje półprostą zawierającą p_1 w samą siebie. Wystarczy jednak odwołać się do definicji inwersji, aby spostrzec, że wszystkie punkty tej prostej leżące wewnątrz półokręgu, po przekształceniu zostaną umieszczone w jego zewnętrznej części. Dodajmy jeszcze, że takie przekształcenie zgodnie z punktem a) Lematu pomocniczego, zachowuje położenie p_2 .

Etap IV: p_2 powinna leżeć na prawo od p_1 .

Jeżeli tak nie jest to wystarczy zastosować izometrię w postaci symetrii osiowej względem prostej zawierającej p_1 . Faktycznie jest to zwykła euklidesowa symetria względem półprostej zawierającej p_1 .

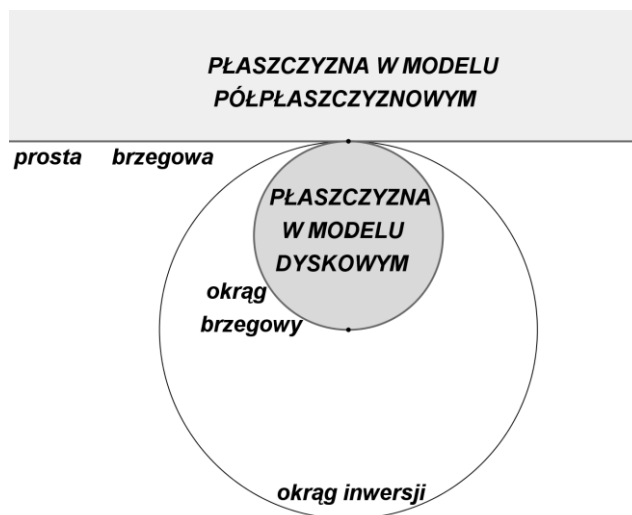
Ostatecznie po przekształceniach opisanych w powyższych etapach otrzymujemy trójkąt przystający do wyjściowego (przed Etapem I), spełniający warunki ze Spostrzeżenia 0.3.1.

0.4. Model dyskowy Poincarego – podstawowe informacje

Do graficznej prezentacji hiperbolicznych wielokątów foremnych wykorzystamy model dyskowy Poincarego. Model ten powstaje poprzez przekształcenie płaszczyzny hiperbolicznej z modelu półpłaszczyznowego (opisanego w Podrozdziale 0.1) za pomocą inwersji.

Na początek przypomnijmy, że prosta brzegowa rozważana w przypadku modelu półpłaszczyznowego, podzieliła płaszczyznę euklidesową na dwie części, z których jedną nazwaliśmy płaszczyzną hiperboliczną. W tej drugiej części umieścimy teraz euklidesowy okrąg, który ma dokładnie jeden punkt wspólny z prostą brzegową. Euklidesowa inwersja (poprzedni podrozdział) względem takiego okręgu, przekształca płaszczyznę hiperboliczną modelu półpłaszczyznowego, w płaszczyznę hiperboliczną w modelu dyskowym Poincarego.

Zwróćmy uwagę na fakt, że prosta brzegowa przekształca się poprzez inwersję w euklidesowy okrąg. Nazwijmy go **okręgiem brzegowym**. Półpłaszczyzna modelu przekształca się natomiast na wnętrze okręgu brzegowego. Płaszczyzny te wraz z okręgiem inwersji symbolicznie prezentujemy na poniższym Rysunku 0.4.1.



Rysunek 0.4.1.

Poprzez opisaną powyżej inwersję przekształcamy również poszczególne hiperboliczne obiekty geometryczne, niejako „przenosząc” je pomiędzy poszczególnymi modelami. Znając własności inwersji, możemy podać odpowiadające im definicje w modelu dyskowym. Ponieważ model ten będziemy wykorzystywać jedynie do graficznych prezentacji, dlatego tylko krótko nawiążemy do kilku podstawowych pojęć.

Rozróżniamy dwa typy **hiperbolicznych prostych w modelu dyskowym**.

- 1) Euklidesowe średnice okręgu brzegowego (bez punktów należących do tego okręgu).
- 2) Euklidesowe łuki okręgów o końcach na okręgu brzegowym, prostopadłe do tego okręgu. (z wyjątkiem punktów należących do okręgu brzegowego).

Hiperboliczne półproste, odcinki i kąty w modelu dyskowym definiujemy analogicznie jak w modelu półpłaszczyznowym (patrz Podrozdział 0.1). Podobnie z poprzedniego modelu przenosimy również sposoby mierzenia kątów. Warto jeszcze dodać, że zgodnie z własnościami podanymi na początku Podrozdziału 0.3, inwersja zachowuje miary kątów między hiperbolicznymi prostymi.

Pozwolimy sobie pominąć sposoby określania długości odcinków w modelu dyskowym. Czynności takich nie będziemy wykonywać w niniejszej pracy. Czytelnikowi wskazujemy jednak konkretny sposób określenia takiej wielkości. Poprzez odpowiednią inwersję opisaną wcześniej, możemy przekształcić dany odcinek do modelu półpłaszczyznowego i tam obliczamy jego długość.

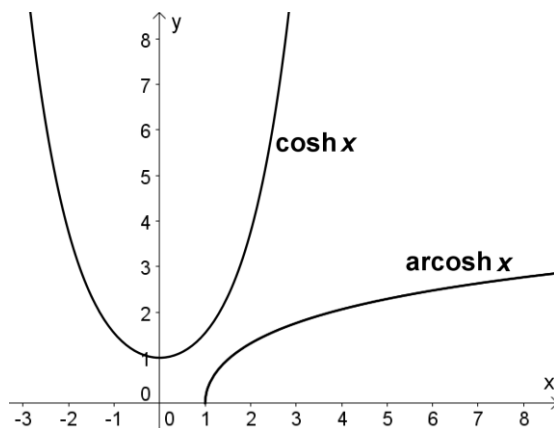
0.5. Kosinus hiperboliczny i jego odwrotność

Rozpatrując geometrię hiperboliczną pojawiają się nowe wzory i wyrażenia. W niniejszej pracy wykorzystamy funkcję zmiennej rzeczywistej określaną jako **kosinus hiperboliczny**. Taką funkcję oznaczamy $\cosh x$ i określamy następującym wzorem:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Rozważać będziemy również funkcję odwrotną do powyższej. Jednak żeby odwzorowanie było wzajemnie jednoznaczne, rozpatrujemy obcięcie funkcji $\cosh x$ do przedziału $\langle 0, \infty \rangle$. Odwrotność takiej funkcji nazywamy **arcus kosinus hiperboliczny** i oznaczamy $\operatorname{arcosh} x$.

Poniżej prezentujemy fragmenty wykresów omawianych funkcji, które ułatwią nam późniejsze rozważania związane z monotonicznością tych funkcji.



Wykres 0.5.1.

Zauważmy, że $\cosh x$ jest funkcją parzystą, która maleje dla ujemnych argumentów x , oraz rośnie dla dodatnich x . Przy $x = 0$ przyjmuje ona najmniejszą możliwą wartość równą 1. Natomiast $\operatorname{arcosh} x$ jest funkcją rosnącą, która dla argumentu $x = 1$ przyjmuje najmniejszą możliwą wartość równą 0.

Uwagi końcowe

W powyższym rozdziale krótko omówiliśmy najważniejsze pojęcia, definicje i wzory związane z modelami Poincarego geometrii hiperbolicznej. Uwzględniono w szczególności kwestie istotne i bezpośrednio wymagane dla dalszego zrozumienia pracy. Czytelników oczekujących pełniejszego i wyczerpującego omówienia poszczególnych zagadnień odsyłamy do pozycji [1] – [3] zawartych w bibliografii.

W dalszej części pracy postaramy się uniknąć nadmiernego stosowania określeń „hiperboliczny” i „euklidesowy”. Przymiotniki te opuścimy, gdy rodzaj wykorzystywanej geometrii będzie jasno wynikał z kontekstu.

1. Wielokąty foremne

Rozdział 1 poświęcimy rozważaniom dotyczącym wielokątów foremnych w geometrii euklidesowej i hiperbolicznej. Dowolny n -kąć foremny powiążemy z pewnym charakterystycznym trójkątem prostokątnym. Wykorzystując ten trójkąt przeanalizujemy dwa kluczowe parametry: długość boku i miarę kąta wewnętrznego. Wyznamy też długość promienia okręgu wpisanego w hiperboliczny wielokąt foremny.

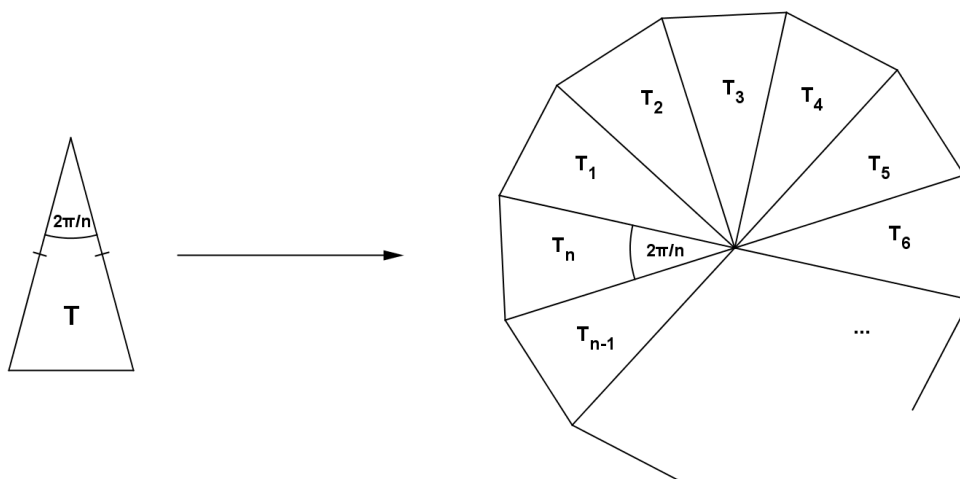
Zacniemy od przypomnienia zagadnień w geometrii euklidesowej, następnie poszukamy analogii i skupimy się na właściwych rozważaniach w geometrii hiperbolicznej.

Definicja 1.0.1. *Wielokąt foremny* to wielokąt, w którym wszystkie boki są równej długości i wszystkie kąty wewnętrzne mają równą miarę.

Wielokąt foremny, w którym liczba boków wynosi n nazywamy n -kąćem foremnym.

1.1. Pewien opis wielokątów foremnych w geometrii euklidesowej

Zwróćmy uwagę, że mając zadany trójkąt równoramienny o kącie przeciwnym do podstawy równym $2\pi/n$, możemy z takich trójkątów zbudować (skonstruować) n -kąć foremny. Odlóży n (gdzie $n \geq 3$) takich przystających trójkątów wokół wspólnego wierzchołka przy kącie $2\pi/n$, tak żeby dwa sąsiadujące trójkąty miały dokładnie jedno wspólne ramie. Przedstawiony opis prezentujemy na poniższym rysunku.



Rysunek 1.1.1.

Tak powstały wielokąt spełnia warunki opisujące wielokąt foremny (patrz definicja 1.0.1).

- Długości boków: wszystkie długości są równe, bo są to podstawy przystających trójkątów równoramiennych.
- Kąty wewnętrzne: wszystkie kąty wewnętrzne są przystające, mają równą miarę, odpowiadającą dwukrotnej mierze kąta przy podstawie w trójkącie równoramiennym.

Pojawia się wątpliwość, czy zgodnie z powyższą metodą możemy otrzymać wszystkie wielokąty foremne. Odpowiedź brzmi tak. Wiemy, że na dowolnym wielokącie foremnym można opisać okrąg. Łącząc środek takiego okręgu z kolejnymi wierzchołkami wielokąta powstaje podział wielokąta na trójkąty równoramienne opisane powyżej (Rysunek. 1.1.1).

Rozważmy rozkład n -kąta foremnego na trójkąty równoramienne, tak jak powyżej. Poprowadzenie wysokości opuszczonej na podstawę w takich trójkątach, dzieli je na dwa przystające trójkąty prostokątne. Rozważmy jeden z nich. Zauważmy, że za pomocą powyższej procedury w dowolnym wielokącie foremnym wydzielimy odpowiedni trójkąt prostokątny. Taki trójkąt nazwijmy *trójkątem prostokątnym odpowiadającym wielokątowi foremnemu*.

Spostrzeżenie 1.1.1. Długość boku i miarę kąta wewnętrznego dowolnego n -kąta foremnego można określić na podstawie parametrów odpowiadającego mu trójkąta prostokątnego.

Wyjaśnieniem tego spostrzeżenia będą poniższe rozważania.

Miara kąta wewnętrznego

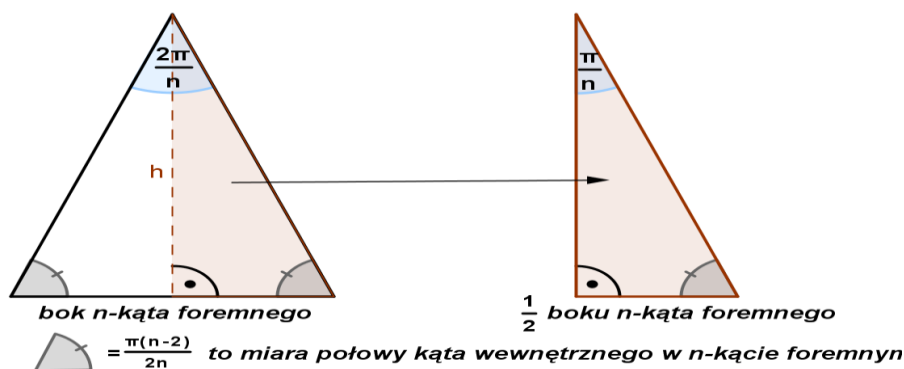
W odpowiednim trójkącie prostokątnym miara jednego z kątów wynosi π/n , ponieważ w trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę podzieliła kąt przeciwległy do podstawy równy $2\pi/n$ na dwie równe części. Korzystając z faktu, że suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi π , możemy obliczyć miarę drugiego kąta ostrego w trójkącie prostokątnym: $\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} = \frac{\pi(n-2)}{2n}$. Zauważmy teraz, że dwa takie kąty tworzą kąt wewnętrzny w n -kącie foremnym, którego miara jest zatem równa:

$$(1.1.2) \quad \frac{\pi(n-2)}{n}$$

Długość boku

Długość boku n -kąta foremnego była równa długości podstawy w trójkącie równoramiennym. Spodek wysokości opuszczonej na podstawę dzieli ją na dwa równe odcinki. Stąd przy zadanym trójkącie prostokątnym długość boku jest dwa razy dłuższa od długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta π/n w tym trójkącie.

Wyniki powyższego rozumowania przedstawiamy graficznie na poniższym rysunku.

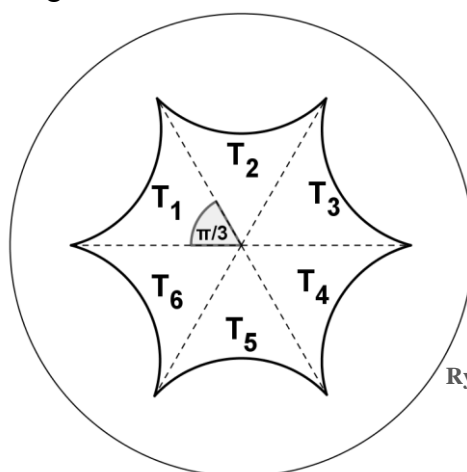


Rysunek 1.1.2.

1.2. Trójkąty tworzące hiperboliczny wielokąt foremny

W geometrii hiperbolicznej tak jak w geometrii euklidesowej dowolny wielokąt foremny powstaje poprzez odłożenie n (gdzie $n \geq 3$) przystających trójkątów równoramiennych o kącie przeciwnym do podstawy mającym miarę równą $2\pi/n$. Odkładamy je wokół wspólnego wierzchołka przy kącie $2\pi/n$, tak żeby dwa sąsiadujące trójkąty miały jedno wspólne ramię. Powyższe stwierdzenie jest prawdziwe, ale jego dowód pominiemy.

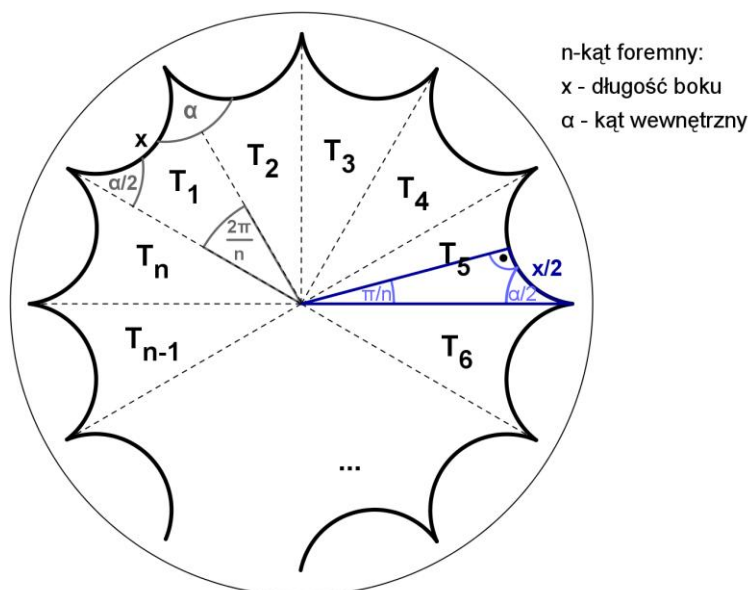
Poniżej prezentujemy sześciokąt foremny w modelu dyskowym Poincarego, przedstawiony według powyższego rozumowania.



Rysunek 1.2.1.

Sześciokąt ten składa się z sześciu przystających trójkątów równoramiennych. Kąt przeciwny do podstawy w każdym z tych trójkątów ma miarę $2\pi/6$, czyli $\pi/3$.

Analogicznie możemy przedstawić dowolny n -kąt foremny (patrz Rysunek 1.2.2).



Rysunek 1.2.2.

Podobnie jak w geometrii euklidesowej (Podrozdział 1.1) uprościmy rozważania, przez sprowadzenie analizy własności n -kąta foremnego do analizy własności odpowiadającego mu trójkąta prostokątnego o jednym z kątów ostrych równym $\frac{\pi}{n}$. Taki trójkąt wydzielimy z trójkąta równoramiennego tworzącego wielokąt foremny, poprzez opuszczenie z wierzchołka przeciwległego do podstawy odcinka prostopadłego do tej podstawy. Taki trójkąt został wyróżniony niebieskim kolorem na Rysunek 1.2.2. Przez x oznaczymy długość boku, natomiast α niech oznacza miarę kąta wewnętrznego w n -kącie foremnym. Przypomnijmy, że wtedy przyprostokątna przeciwległa do kąta $\frac{\pi}{n}$ ma długość $\frac{x}{2}$, natomiast przylegający do tej przyprostokątnej kąt ostry ma miarę $\frac{\alpha}{2}$.

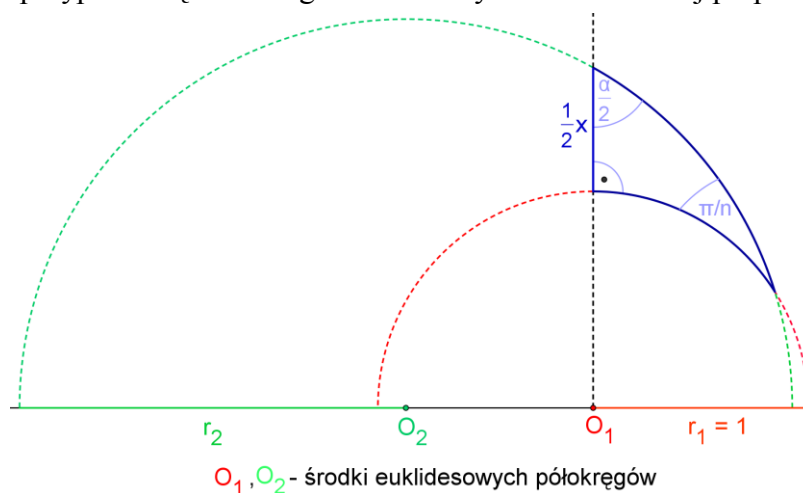
Dalszą analizę powyższego trójkąta prostokątnego poprowadzimy w modelu półpłaszczyznowym Poincarego. W tym modelu przekształcimy ten trójkąt do pewnej charakterystycznej postaci, która została opisana w Spostrzeżeniu 0.3.1. Treść spostrzeżenia przypominamy poniżej.

Dowolny trójkąt prostokątny zadany w modelu półpłaszczyznowym można przekształcić poprzez hiperboliczną izometrię do postaci opisanej poniższymi warunkami.

- Wierzchołek kąta prostego jest punktem przecięcia hiperbolicznej prostej wyrażonej przez euklidesową półprostą o początku w punkcie O_1 (na brzegu modelu) i hiperbolicznej prostej wyrażonej przez euklidesowy półokrąg $(O_1, r_1 = 1)$.
- Jedna z przyprostokątnych (dowolnie wybrana) położona jest na prostej wyrażonej przez euklidesową półprostą o początku w punkcie O_1 , nad półokręgiem $(O_1, r_1 = 1)$.
- Druga przyprostokątna leży na prostej wyrażonej przez półokrąg $(O_1, r_1 = 1)$, po prawej stronie euklidesowej półprostej zawierającej poprzednią przyprostokątną.

Powyższe warunki determinują położenie przeciwprostokątnej. Jest ona częścią prostej wyrażonej przez euklidesowy półokrąg (jego środek oznaczymy jako O_2 , a promień r_2).

Graficzny obraz naszego trójkąta po powyższych przekształceniach prezentuje Rysunek 1.2.3 (przyjmijmy, że przyprostokątna o długości $\frac{1}{2}x$ leży na euklidesowej półprostej).



Rysunek 1.2.3.

Przeanalizujmy teraz takie przedstawienie hiperbolicznego trójkąta prostokątnego.

Warunki przedstawione w Spostrzeżeniu 0.3.1 narzucają sztywne położenie hiperbolicznych prostych zawierających przyprostokątne trójkąta, czyli boków znajdujących się na euklidesowym półokręgu $(O_1, r_1 = 1)$ i euklidesowej półprostej o początku w O_1 . Promień półokręgu jest ustalony, jego środek leży na prostej brzegowej modelu. Półprosta jest prostopadła do prostej brzegowej (patrz Podrozdział. 0.1).

Trzeci bok trójkąta (przeciwprostokątna) leży na euklidesowym półokręgu (O_2, r_2) , który przecina się z półokręgiem (O_1, r_1) pod kątem ostrym o mierze równej π/n , tworząc ten kąt między bokami trójkąta.

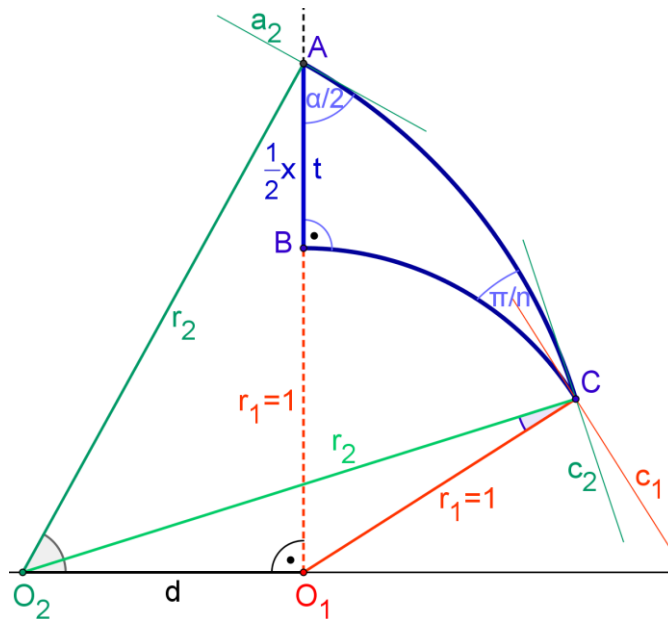
Uwaga 1.2.1. *Promień i położenie środka półokręgu (O_2, r_2) , nie są konkretnie sprecyzowane. Parametry te możemy korygować, jeśli spełnimy poniższe warunki.*

- Środek O_2 leży na prostej brzegowej modelu.
- Miara dodatnio zorientowanego kąta między półokręgami (O_2, r_2) i (O_1, r_1) wynosi π/n .

Powyzszą uwagę uściślimy w Podrozdziale 1.3. Teraz poczynmy jeszcze kilka pomocniczych kroków, które wykorzystamy później. Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia jak na Rysunku 1.2.4. Zaznaczmy elementy, które później wykorzystamy. Rozpatrujemy trójkąt w geometrii hiperbolicznej, ale do jego opisu wykorzystujemy pojęcia znane z geometrii euklidesowej. W rozumieniu euklidesowym oznaczmy:

- odcinek d jako odległość między środkami półokręgów O_1 i O_2 ,
- przez A, B, C kolejne wierzchołki trójkąta, odpowiednio przy kątach $\alpha/2, \pi/2$ i π/n ,
- odcinek O_1C , zwróćmy uwagę, że jest to promień $r_1 = 1$ półokręgu o środku w O_1 ,
- analogicznie odcinki O_2A i O_2C , jako promienie r_2 półokręgu o środku w O_2 ,
- prostą styczną do półokręgu $(O_1, r_1 = 1)$ w punkcie C oznaczmy przez c_1 ,
- proste styczne do półokręgu (O_2, r_2) w punktach A i B oznaczmy odpowiednio a_2 i c_2 .

Kluczowym odcinkiem dla naszego rozumowania będzie AB , dlatego zastosujmy podwójne oznaczenie, przez $\frac{1}{2}x$ będziemy rozumieć jako długość hiperboliczną, natomiast przez t długość euklidesową. Ostatecznie otrzymujemy szkic przedstawiony na Rysunku 1.2.4.



Rysunek 1.2.4.

Istotne w rozumowaniu będą zaznaczone kąty, $\angle O_2CO_1$ i $\angle O_1O_2A$.

Lemat 1.2.2. *Miara kąta $\angle O_2CO_1$ wynosi π/n .*

Dowód: Rozważmy jeden z kątów wewnętrznych w hiperbolicznym trójkącie ABC . Kąt w wierzchołku C wynosi π/n , jest to kąt pomiędzy łukiem CA a łukiem CB . Faktycznie zamiast łuków, jako ramiona kąta traktujemy proste styczne do tych półokręgów w punkcie C , czyli odpowiednio c_2 i c_1 .

Odcinek O_2C jest to promień półokręgu O_2 , poprowadzony do punktu styczności C , stąd jest on prostopadły do prostej c_2 , podobnie odcinek O_1C jest prostopadły do c_1 .

Skoro miara kąta między prostymi c_2 i c_1 wynosi π/n , to kąt między odpowiadającymi im odcinkami prostopadłymi poprowadzonymi do punktu przecięcia tych prostych (czyli O_2C i O_1C), też będzie miał miarę π/n . Inaczej mówiąc, kąt ten powstaje poprzez obrócenie ramion kąta między prostymi c_2 i c_1 o $\pi/2$ wokół wierzchołka C , a takie przekształcenie nie zmienia miary kąta. Ostatecznie $|\angle O_2CO_1| = \pi/n$ **c.n.d.**

Lemat 1.2.3. *Miara kąta $\angle O_1O_2A$ jest równa $\alpha/2$.*

Dowód: Miara kąta w wierzchołku A trójkąta ABC wynosi $\alpha/2$, jest to kąt pomiędzy odcinkiem AB a łukiem AC . Faktycznie zamiast łuku, jako drugie ramię kąta traktujemy prostą styczną do półokręgu O_2 w punkcie A , czyli a_2 . Zwróćmy uwagę, że odcinek O_2A jest to promień półokręgu O_2 , poprowadzony do punktu styczności A , stąd jest on prostopadły do prostej a_2 . Mamy: $\alpha/2 + |\angle O_2AO_1| = \pi/2$ więc $|\angle O_2AO_1| = \pi/2 - \alpha/2$. Sumując miary kątów wewnętrznych w trójkącie O_2O_1A i podstawiając wartość uzyskaną w poprzednim równaniu dostajemy: $|\angle O_1O_2A| + \pi/2 + \pi/2 - \alpha/2 = \pi$, stąd równość $|\angle O_1O_2A| = \alpha/2$ **c.n.d.**

1.3. Długość boku i miara kąta wewnętrznego w hiperbolicznym wielokącie foremnym

Bazując na rozważanej w poprzednim podrozdziale postaci trójkąta prostokątnego, przeanalizujemy długość boku i miarę kąta wewnętrznego dla n -kąta foremnego w geometrii hiperbolicznej.

Bez zmniejszenia ogólności, rozważania nad długością boku n -kąta foremnego ograniczymy do analizy połowy boku. W trójkącie ABC odpowiada mu przyprostokątna AB leżąca na euklidesowej półprostej. Zastanówmy się, jakie wartości przyjmuje długość boku.

Stwierdzenie 1.3.1. *Długość boku w hiperbolicznym n -kącie foremnym przyjmuje dowolną wartość dodatnią.*

Dowód: Hiperboliczna długość połowy boku jest wyrażona wzorem $\frac{x}{2} = \left| \ln \frac{1+t}{1} \right|$. Uwzględniając fakt, że t jest dodatnie, otrzymujemy: $x = 2\ln(1+t)$. Funkcja $\ln(1+t)$ jest funkcją ciągłą i rosnącą, dla $t = 0$ byłaby równa 0. Stąd udowodnienie, że x przyjmuje dowolną wartość dodatnią, sprowadza się do pokazania, że t jako euklidesowa długość odcinka AB może być dowolna. Należy sprawdzić czy dla każdej wartości $t > 0$ istnieje odpowiedni trójkąt (patrz Rysunek. 1.2.4). Uwaga 1.2.1 sugeruje, że można zmieniać parametry półokręgu zawierającego przeciwprostokątną, takie zmiany mogą jednak spowodować przemieszczenie wierzchołka A , czyli zmianę długości odcinka AB .

Dowód ogranicza się do pokazania, że dla każdej wartości $t > 0$ istnieje półokrąg (O_2, r_2) , zawierający przeciwprostokątną trójkąta. Taki półokrąg możemy wskazać poprzez podanie jego parametrów długości promienia i położenia środka (faktycznie wskażemy odległość środka O_2 tego półokręgu od O_1 , czyli d).

Wykorzystując twierdzenie kosinusów w trójkącie O_2O_1C do kąta przy wierzchołku C , równego π/n (Lemat 1.2.2), otrzymujemy: $d^2 = 1 + r_2^2 - 2r_2 \cos \frac{\pi}{n}$.

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego w trójkącie O_2O_1A dostajemy: $r_2^2 = (1+t)^2 + d^2$.

Podstawmy $1 + r_2^2 - 2r_2 \cos \frac{\pi}{n}$ za d^2 i przekształćmy: $r_2^2 = (1+t)^2 + 1 + r_2^2 - 2r_2 \cos \frac{\pi}{n}$,

stąd $2r_2 \cos \frac{\pi}{n} = 1 + (1+t)^2$, czyli $r_2 = \frac{1+(1+t)^2}{2 \cos(\pi/n)}$. Pozostaje obliczenie odległości d .

Przekształcając równanie otrzymane z tw. Pitagorasa dostajemy $r_2^2 - (1+t)^2 = d^2$.

Podstawiając wcześniejsze wyrażenie za r_2 mamy $d = \sqrt{\left(\frac{1+(1+t)^2}{2 \cos(\pi/n)}\right)^2 - (1+t)^2}$.

Ostatecznie pokazaliśmy, że dla dowolnej długości boku AB możemy tak dobrać półokrąg (O_2, r_2) , żeby otrzymać hiperboliczny trójkąt prostokątny o jednym z kątów ostrych równym π/n . Istnienie takiego trójkąta jest równoznaczne z istnieniem hiperbolicznego

n -kąta foremnego o boku długości $x = 2|AB|$ (gdzie $|AB|$ oznacza długość hiperbolicznego odcinka AB), stąd x dowolnie dodatnie **c.n.d.**

Miarę kąta wewnętrznego w hiperbolicznym n -kącie foremnym oznaczyliśmy przez α . W hiperbolicznym trójkącie ABC kąt $\alpha/2$ leży przy wierzchołku A . Jedno z jego ramion znajduje się na euklidesowym półokręgu (O_2, r_2) . Wiemy już, że położenie tego okręgu ulega zmianie wraz ze zmianą długości boku w wielokącie. Powstaje przypuszczenie, że jest jakieś powiązanie między miarą kąta α a długością boku.

Stwierdzenie 1.3.2. *Miara kąta wewnętrznego w hiperbolicznym n -kącie foremnym o długości boku x wynosi:*

$$(1.3.3) \quad \alpha = 2\arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)}$$

Dowód: W dowodzie Stwierdzenia 1.3.1 pokazaliśmy, że $r_2 = \frac{1+(1+t)^2}{2 \cos(\pi/n)}$. W Lemacie 1.2.3

dowiedliśmy, że $|\angle O_1 O_2 A| = \alpha/2$, stąd $\sin(\angle O_1 O_2 A) = \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1+t}{r_2} = \frac{(1+t) \cdot 2 \cos(\pi/n)}{1+(1+t)^2}$.

Ponieważ $\angle O_1 O_2 A$ jest kątem ostrym jako jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego $O_2 O_1 A$, otrzymujemy: $|\angle O_1 O_2 A| = \frac{\alpha}{2} = \arcsin \frac{(1+t) \cdot 2 \cos(\pi/n)}{1+(1+t)^2}$, czyli

$$(1.3.4) \quad \alpha = 2\arcsin \frac{2(1+t) \cos(\pi/n)}{1+(1+t)^2}.$$

Otrzymaliśmy zależność między miarą kąta α a długością euklidesową boku AB w naszym trójkącie. Zwróćmy jednak uwagę, że długość boku wyrażona jest w rozumieniu euklidesowym. Przypomnijmy, długość boku AB w rozumieniu hiperbolicznym oznaczyliśmy przez $\frac{x}{2}$. Z zależności między euklidesową i hiperboliczną długością boku mamy: $\frac{x}{2} = \ln(1+t)$, stąd $t = e^{x/2} - 1$. Podstawiając do równania (1.3.4) dostajemy:

$$\alpha = 2\arcsin \frac{2(1+e^{x/2}-1) \cos(\pi/n)}{1+(1+e^{x/2}-1)^2} = 2\arcsin \frac{2e^{x/2} \cos(\pi/n)}{1+e^x}.$$

Rozważmy teraz argument funkcji arcus sinus czyli $\frac{2e^{x/2} \cos(\pi/n)}{1+e^x}$. Podzielmy licznik i mianownik przez $2e^{x/2}$ otrzymujemy: $\cos \frac{\pi}{n} / \frac{1+e^x}{2e^{x/2}} = \cos \frac{\pi}{n} / \frac{e^{-x/2} + e^{x/2}}{2}$. Zwróćmy uwagę, że funkcja w mianowniku to $\cosh \frac{x}{2}$. Stąd ostatecznie $\alpha = 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)}$ **c.n.d.**

Skoro znamy już wzór wyrażający miarę kąta wewnętrznego α w wielokącie foremnym, to teraz zastanówmy się jakie wartości może przyjmować ta wielkość.

Stwierdzenie 1.3.5. *Miara kąta wewnętrznego α w n -kącie foremnym maleje wraz ze wzrostem długości boku wielokąta i przyjmuje wszystkie wartości z zakresu $(0, \frac{\pi(n-2)}{n})$.*

Dowód: Zgodnie ze wzorem 1.3.3 z poprzedniego twierdzenia, otrzymaliśmy zależność $\alpha = 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)}$, gdzie x jest hiperboliczną długością boku wielokąta. Rozważmy jedną z funkcji składowych, czyli $\cosh \frac{x}{2}$. Wiemy że funkcja ta rośnie wraz ze wzrostem $x > 0$ (patrz Podrozdział 0.5), a zatem wartość wyrażenia $\frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)}$ będzie wtedy malała. Uwzględniając fakt, że wyrażenie to jest argumentem funkcji rosnącej arcus sinus opisującej α , otrzymujemy ostatecznie, że miara α maleją wraz ze wzrostem x .

Przypomnijmy, że długość boku w hiperbolicznym n -kącie foremnym przyjmuje dowolną wartość dodatnią (patrz Stwierdzenie 1.3.1). Rozważmy graniczne wartości x . $\lim_{x \rightarrow 0} \cosh \frac{x}{2} = 1$, stąd $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)} = 2 \arcsin \cos(\pi/n)$. Ze wzorów redukcyjnych otrzymujemy:

$$2 \arcsin \cos \frac{\pi}{n} = 2 \arcsin \cos \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) \right) = 2 \arcsin \sin \frac{\pi(n-2)}{2n} = \frac{\pi(n-2)}{n}.$$

Podobnie $\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh \frac{x}{2} = \infty$, a $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)} = 2 \arcsin 0 = 0$. Podsumowując $\alpha \rightarrow 0$ dla $x \rightarrow \infty$ i $\alpha \rightarrow \frac{\pi(n-2)}{n}$ dla $x \rightarrow 0$. Dodajmy jeszcze, że funkcja opisująca α , czyli $f(x) = 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)}$ jest ciągła, jako złożenie funkcji ciągłych. Stąd wnioskujemy, że α przyjmie wszystkie wartości pośrednie od 0 do $\frac{\pi(n-2)}{n}$ **c.k.d.**

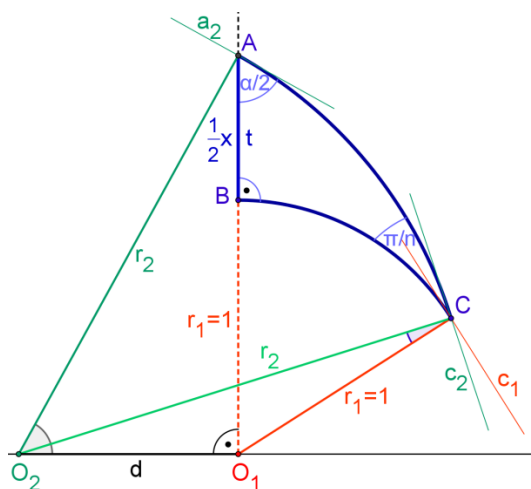
Kolejnym sposobem wykorzystania wzoru 1.3.3 jest możliwość uzyskania wyrażenia opisującego długość boku w n -kącie foremnym, przy założeniu że kąt wewnętrzny $\alpha \in (0, \frac{\pi(n-2)}{n})$ jest dany. Należy policzyć funkcję odwrotną do funkcji $f(x)$ z powyższego dowodu. Wiemy, że $\alpha = 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)}$. Dzieląc przez 2 i nakładając funkcję sinus na obie strony równania mamy: $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)}$, stąd $\cosh \frac{x}{2} = \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\alpha/2)}$, ostatecznie:

$$(1.3.6) \quad x = 2 \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\alpha/2)}.$$

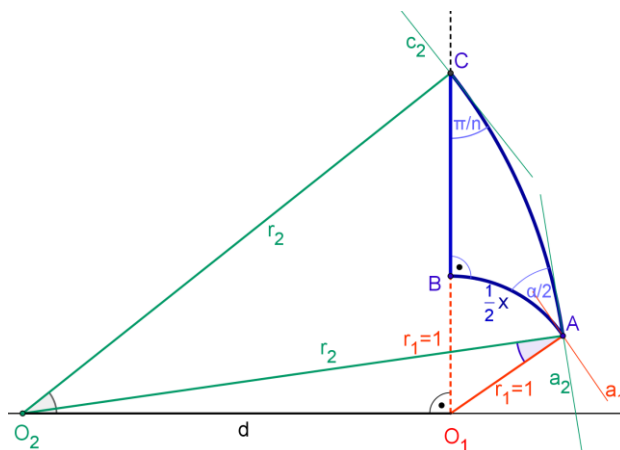
Otrzymujemy długość boku n -kąta foremnego, jako funkcję miary jego kąta wewnętrznego α .

1.4. Promień okręgu wpisanego w hiperboliczny wielokąt foremny

W poprzednich rozważaniach przyjęliśmy, że połowa boku n -kąta foremnego utożsamiana z bokiem AB naszego trójkąta, leży na euklidesowej półprostej o początku w punkcie O_1 (Rysunek 1.2.4, w tym podrozdziale powtórzony jako Rysunek 1.4.1.A). W Spozrzeniu 0.3.1 dopuszczamy też drugi wariant. Przez izometrie doprowadzamy do postaci gdy bok AB leży na euklidesowym półokręgu (O_1, r_1) (nie zmieniając przy tym długości boków trójkąta). Otrzymujemy trójkąt przedstawiony na Rysunku 1.4.1.B.



Rysunek 1.4.1.A



Rysunek 1.4.1.B

Porównując otrzymaną teraz postać trójkąta ABC (Rysunek 1.4.1.B) z jego przedstawieniem na Rysunku 1.4.1.A zauważamy, że zamieniliśmy położeniem przyprostokątne trójkąta ABC .

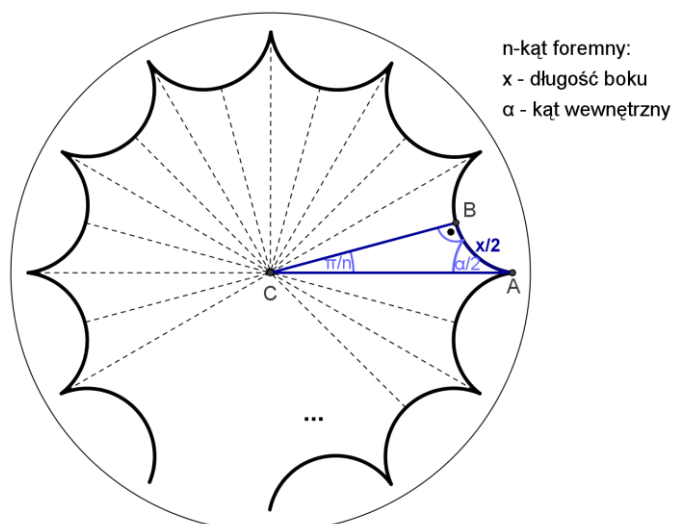
Spostrzeżenie 1.4.1. Bok BC trójkąta leży teraz na euklidesowej półprostej o początku w O_1 . Jego długość liczymy analogicznie jak długość boku AB w przypadku przedstawionym na Rysunku 1.4.1.A.

Przypomnijmy, że $|AB| = \frac{x}{2} = \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\alpha/2)}$. We wzorze wykorzystujemy miary kątów ostrych w trójkącie ABC , stąd przez analogię otrzymujemy wzór

$$(1.4.2) \quad |BC| = \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\pi/n)}.$$

Jest to wzór na długość przyprostokątnej przylegającej do kąta $\frac{\pi}{n}$, w zależności od miary kąta α . Zastanówmy się nad geometrycznym znaczeniem boku BC .

Wpierw przypomnijmy jednak, jak powstawał cały trójkąt ABC . Zgodnie z opisem przedstawionym w początkowym fragmencie Podrozdziału 1.2, n -ką foremny tworzyliśmy z $n \geq 3$ przystających trójkątów równoramiennych o kącie przeciwległym do podstawy mającym miarę równą $2\pi/n$ tak, żeby dwa sąsiadujące trójkąty miały jedno wspólne ramię. Następnie w jednym z takich trójkątów równoramiennych prowadziliśmy odcinek prostopadły do podstawy, opuszczony na nią z przeciwległego wierzchołka. Tak otrzymywaliśmy podział na dwa trójkąty przystające do trójkąta ABC . Taki podział możemy zastosować w każdym z trójkątów równoramiennych tworzących wielokąt foremny. Dzielimy więc cały wielokąt na przystające trójkąty prostokątne. Ogólny przypadek takiego podziału w modelu dyskowym Poincarego prezentujemy na kolejnym rysunku (jest to drobna modyfikacja Rysunku. 1.2.2).



Rysunek 1.4.2.

Jeden z przystających trójkątów prostokątnych tworzących n -kąt foremny został wyróżniony niebieskim kolorem na powyższym rysunku, jako trójkąt ABC . Rozważmy odcinek BC .

Spostrzeżenie 1.4.3. *Odcinek BC jest prostopadły do boku wielokąta foremnego, stąd jego długość wyraża odległość punktu C od dowolnego boku n -kąta foremnego.*

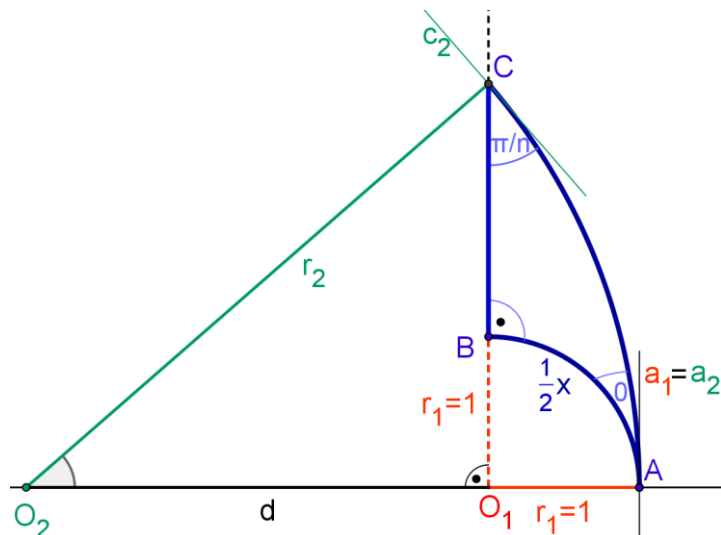
Spostrzeżenie to jest bezpośrednim wnioskiem z własności 0.2.3. Na podstawie tej samej własności możemy wyciągnąć następujący wniosek.

Wniosek 1.4.4. *Odcinek BC jest promieniem okręgu o środku w punkcie C , wpisanego w hiperboliczny n -kąt foremny.*

Przypomnijmy, że wcześniej określiliśmy długość odcinka BC (wzór 1.4.2), w zależności od miary kąta α . Wtedy faktycznie wyraziliśmy więc długość promienia okręgu wpisanego w n -kąt foremny. Oznaczając ten promień przez r otrzymujemy:

$$(1.4.5) \quad r = \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\pi/n)}.$$

Na koniec warto jeszcze zwrócić uwagę na pewien charakterystyczny przypadek zmodyfikowanego wielokąta foremnego (nazywamy go *idealnym*, patrz Podrozdział 0.1), w którym wszystkie wierzchołki leżą na prostej brzegowej modelu. Takie wierzchołki są punktami idealnymi. Formalnie przyjmujemy, że prosta brzegowa nie należy do modelu. Gdybyśmy jednak uwzględnili punkty należące do tej prostej, to w modelu półpłaszczyznowym Poincarého otrzymujemy rzeczywiste wierzchołki. Miara kąta wewnętrznego α przy takim wierzchołku wynosiłaby 0 i taką wartość będziemy umownie przyjmować dla kątów o wierzchołku idealnym. Graficznym potwierdzeniem powyższej konwencji niech będzie prezentacja trójkąta prostokątnego, odpowiadającego idealnemu wielokątowi foremnemu. Modyfikując Rysunek 1.4.1.B, otrzymujemy przedstawienie z Rysunku 1.4.3.



Rysunek 1.4.3.

Przypomnijmy, że w trójkącie ABC miara kąta przy wierzchołku A jest połową miary kąta wewnętrznego α w wielokącie foremym. Tutaj A jest wierzchołkiem idealnym i zgodnie z wcześniejszym opisem, przyjmujemy że miara kąta przy tym wierzchołku wynosi 0 .

Jako uzasadnienie powyższej konwencji dotyczącej miary kątów w wierzchołkach idealnych możemy jeszcze przywołać rozważania z geometrii euklidesowej. Miarę omawianego kąta w tym trójkącie określamy jako miarę kąta między stycznymi do półokręgów zawierających boki AB i AC (odpowiednio a_1 i a_2) tego trójkąta, w punkcie ich przecięcia, czyli wierzchołku A . Widzimy, że zarówno środki tych półokręgów (O_1 i O_2), jak i wierzchołek A leżą na jednej prostej (prosta brzegowa modelu). Styczne a_1 i a_2 , są więc prostopadłe do tej prostej, a zatem muszą się pokrywać, czyli kąt między nimi wynosi 0 .

Zauważmy jeszcze, że w zmodyfikowanym trójkącie przedstawionym na Rysunku 1.4.3, również możemy określić długość odcinka BC . Długość tą wyprowadza się tak samo jak w przypadku zwykłego trójkąta prostokątnego, który nie ma wierzchołków idealnych (patrz początek Podrozdziału 1.4). Stąd jest ona dana tym samym wzorem 1.4.2, dla wartości $\alpha = 0$. Natomiast zgodnie z Wnioskiem 1.4.4, odcinek ten możemy utożsamiać z promieniem okręgu wpisanego, tym razem jest on wpisany w idealny wielokąt foremny. Przywołując wzór 1.4.5: $r = \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\pi/n)}$, oraz wstawiając $\alpha = 0$, dostajemy długość promienia okręgu wpisanego w idealny wielokąt foremny (oznacmy go przez r_i):

$$(1.4.6) \quad r_i = \operatorname{arcosh} \frac{1}{\sin(\pi/n)}.$$

Rezultat ten wykorzystamy w kolejnej części pracy.

2. Parkietaże platońskie

Celem Rozdziału 2 będzie znalezienie wszystkich parkietaży platońskich w geometrii hiperbolicznej. Przeanalizujemy też długości boków wielokątów tworzących takie parkietaże.

Definicja 2.0.1. *Parkietaż* to pokrycie płaszczyzny wielokątami przylegającymi i niezachodzącymi na siebie.

Definicja 2.0.2. *Parkietaż platoński* to parkietaż składający się z przystających wielokątów foremnych, których jednakowa liczba schodzi się w każdym wierzchołku.

Poprzez (n, k) oznaczamy parkietaż platoński złożony z n -kątów foremnych, których k schodzi się w każdym wierzchołku.

W przystających wielokątach foremnych wszystkie kąty wewnętrzne są równe, zatem dochodzimy do poniższego spostrzeżenia.

Spostrzeżenie 2.0.3. *Wokół dowolnego wierzchołka parkietażu platońskiego skupia się k kątów o równej mierze, które w sumie mają miarę 2π .*

2.1. Parkietaże platońskie w geometrii euklidesowej

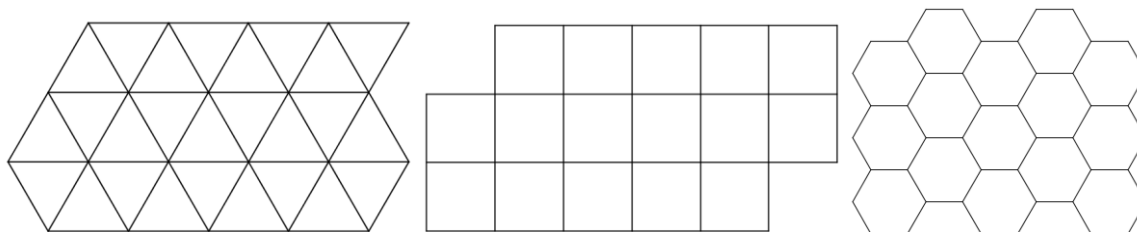
Zastanówmy się, jakie parkietaże platońskie postaci (n, k) są w geometrii euklidesowej.

Twierdzenie 2.1.1. *Istnieją trzy euklidesowe parkietaże platońskie: $(3,6)$, $(4,4)$ i $(6,3)$.*

Dowód: Analizę całego parkietażu ograniczymy do obserwacji jednego, dowolnego wierzchołka. Na jego podstawie określimy możliwe wartości parametrów n i k .

Zauważmy że $n, k \in \mathbb{N}$, ponadto $n \geq 3$ jako liczba boków w wielokącie. Kąty wewnętrzne w wielokącie foremnym są wypukłe. Suma dwóch takich kątów jest mniejsza od 2π , stąd na podstawie Spostrzeżenia 2.0.3 wnioskujemy, że $k \geq 3$. Miara każdego z kątów wewnętrznych w n -kącie foremnym wynosi $\frac{\pi(n-2)}{n}$ (wzór 1.1.2). Zgodnie ze Spostrzeżeniem 2.0.3 odkładając k razy taki kąt dochodzimy do równania: $k \cdot \frac{\pi(n-2)}{n} = 2\pi$, po przekształceniach dostajemy $k = \frac{2n}{n-2}$. Zwróćmy uwagę, że wartości wyrażenia $\frac{2n}{n-2}$ ściśle maleją wraz ze wzrostem $n \geq 3$. Zaczynając od $n = 3$, otrzymujemy kolejne parkietaże $(n, k = \frac{2n}{n-2})$: $(3,6)$, $(4,4)$, $(6,3)$, pominęliśmy $n = 5$ gdyż wtedy $k = 3\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$. Dla $n > 6$ wartości k są mniejsze od 3, co jest sprzeczne z początkowymi założeniami. Ostatecznie jedyne parkietaże platońskie to: $(3,6)$, $(4,4)$ i $(6,3)$ **c.n.d.**

Poniżej przedstawiono fragmenty poszczególnych parkietaży platońskich w geometrii euklidesowej (od lewej (3,6), (4,4) i (6,3)):



Rysunki 2.1.1.

2.2. Parkietaże platońskie w geometrii hiperbolicznej

Celem jest opisanie wszystkich parkietaży platońskich w geometrii hiperbolicznej.

Podobnie jak w geometrii euklidesowej (patrz Podrozdział 2.1) wyznaczmy wszystkie możliwe wartości parametrów n i k dla których istnieje parkietaż (n, k) . Z poprzedniego Podrozdziału 2.1 wiemy, że $n, k \in \mathbb{N}$, ponadto $n, k \geq 3$. Kluczem do dalszego rozumowania będzie Spostrzeżenie 2.0.3, mówiące że wokół dowolnego wierzchołka parkietażu platońskiego skupia się k kątów o równej mierze, które w sumie mają miarę 2π . Mówimy o kątach wewnętrznych w n -kącie foremnym. Oznaczmy taki kąt przez α . Otrzymujemy:

$$(2.2.1) \quad k \cdot \alpha = 2\pi$$

W geometrii euklidesowej mogliśmy podstawić konkretną wartość α . Tym razem jednak miara kąta wewnętrznego w n -kącie foremnym ulega zmianie, jest zależna od długości boku. Zakres wartości kąta α określiliśmy w Stwierdzeniu 1.3.5. Przypomnijmy $0 < \alpha < \frac{\pi(n-2)}{n}$, stąd $k \cdot \alpha < k \cdot \frac{\pi(n-2)}{n}$ czyli $2\pi < k \cdot \frac{\pi(n-2)}{n}$, przekształcając dostajemy ograniczenie

$$(2.2.2) \quad k > \frac{2n}{n-2}.$$

Wyrażenie $\frac{2n}{n-2}$ rozpatrywaliśmy wcześniej (Podrozdział 2.1), jego wartości ściśle maleją wraz ze wzrostem $n \geq 3$, ponadto $\frac{2n}{n-2} = 3$ dla $n = 6$. Zauważmy, że $\frac{2n}{n-2} < 3$ dla $n > 6$, wtedy każdy parametr $k \geq 3$ spełnia nierówność 2.2.2. Pozostaje rozważyć możliwe k dla $3 \leq n \leq 6$.

Lemat 2.2.3. *Nie ma hiperbolicznych parkietaży platońskich postaci:*

$$(3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,4), (5,3), (6,3).$$

Dowód: Rozpatrując kolejne wartości n otrzymujemy ograniczenia dotyczące k (wzór 2.2.2):

- | | |
|------------------------------|---|
| 1) $n = 3$, wtedy $k > 6$, | 3) $n = 5$, wtedy $k > 3\frac{1}{3}$, |
| 2) $n = 4$, wtedy $k > 4$, | 4) $n = 6$, wtedy $k > 3$. |

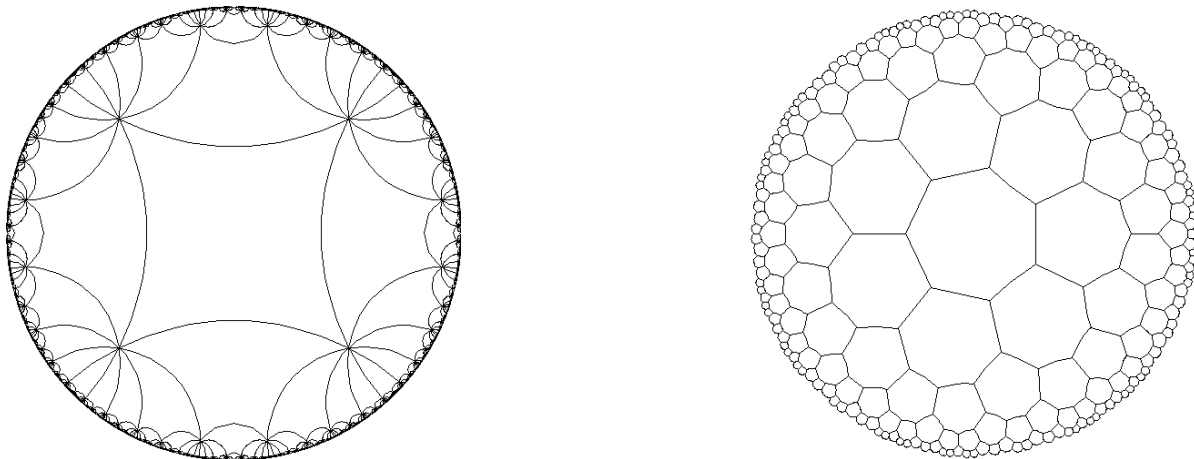
Na podstawie tych warunków, odrzucamy podane parkietaże **c.k.d.**

Powstaje pytanie o pozostałe możliwości.

Twierdzenie 2.2.4. *W geometrii hiperbolicznej istnieją następujące parkietaże platońskie: $\{(n, k): n, k \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}\} \setminus \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (5, 3), (6, 3)\}$, czyli wszystkie parkietaże postaci $(n, k): n \geq 3; k \geq 3$, z wyjątkiem tych występujących w Lemacie 2.2.3.*

Dowód: Uwzględniając Lemat 2.2.3, pozostaje uzasadnić istnienie reszty parkietaży. Zwróćmy uwagę, że istnienie konkretnego parkietażu postaci (n, k) jest równoważne z istnieniem w n -kącie foremny kątą postaci $\alpha = \frac{2\pi}{k}$ (ze wzoru 2.2.1), dla $k > \frac{2n}{n-2}$. Łącząc te zależności dostajemy, że $\alpha < \frac{\pi(n-2)}{n}$. Ze Stwierdzenia 1.3.5 wiemy jednak, że w n -kącie foremnym α przebiega wszystkie wartości z zakresu $(0, \frac{\pi(n-2)}{n})$ **c.k.d.**

Poniżej prezentujemy dwa przykłady parkietaży platońskich, przedstawionych w modelu dyskowym Poincarego (od lewej parkietaże $(4, 10)$ i $(7, 3)$).



Rysunki 2.2.1.

2.3. Określenie długości boku w hiperbolicznym parkietażu platońskim

Wyzaczyliśmy już wszystkie hiperboliczne parkietaże platońskie. Teraz postaramy się bliżej scharakteryzować takie parkietaże. Głównym elementem, na którym skupimy swoje rozważania będzie długość boku w wielokącie tworzącym parkietaż.

Na początek zwróćmy uwagę na euklidesowe parkietaże platońskie. Długość boku w euklidesowym wielokącie foremnym może być dowolna. Ta dowolność przenosi się do parkietaży, gdyż istnienie i kształt parkietażu są związane jedynie z ustaloną miarą kąta wewnętrznego w wielokącie tworzącym parkietaż (patrz dowód Twierdzenia. 2.1.1).

Pojawia się pytanie, jak będzie w geometrii hiperbolicznej.

W przeciwieństwie do geometrii euklidesowej, tutaj miara kąta wewnętrznego w wielokącie foremnym jest zależna od jego długości boku (patrz Stwierdzenie. 1.3.2). Odpowiednia miara takiego kąta decyduje o istnieniu danego parkietażu (patrz dowód Twierdzenie. 2.2.4), dlatego należy odpowiednio dobrać długość boku. Więc jak wyznaczyć taką długość?

Twierdzenie 2.3.1. *Długość boku $x_{(n,k)}$ wielokąta foremnego tworzącego hiperboliczny parkietaż (n, k) wyraża wzór:*

$$(2.3.2) \quad x_{(n,k)} = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)}.$$

Dowód: Wcześniej otrzymaliśmy zależność długości boku od miary kąta wewnętrznego w dowolnym n -kącie foremnym. Przypomnijmy $x = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\alpha/2)}$ (patrz wzór 1.3.6). Rozważając istnienie parkietażu hiperbolicznych otrzymaliśmy wzór 2.2.1: $k \cdot \alpha = 2\pi$, zatem $\alpha = \frac{2\pi}{k}$. Podstawiając to wyrażenie do wzoru 1.3.6, dostajemy tezę twierdzenia **c.n.d.**

Wniosek 2.3.3. *Długość boku w hiperbolicznym parkietażu platońskim ustalonego typu (n, k) przyjmuje tylko jedną, ustaloną wartość.*

2.4. Hiperboliczne parkietáže platońskie o najkrótszych bokach

Zastanówmy się teraz nad skrajnymi wartościami $x_{(n,k)}$. Zaczniemy od parkietażu o najmniejszych długościach boku.

Twierdzenie 2.4.1. *Hiperboliczny parkietaż platoński o najkrótszym boku to parkietaż $(7,3)$.*

Dowód: Zauważmy, że wyrażenie $\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)}$ ściśle rośnie gdy wzrasta parametr naturalny $n \geq 3$ (bo funkcja $\cos \frac{\pi}{n}$ rośnie), podobnie dla parametru naturalnego $k \geq 3$ wyrażenie to rośnie wraz ze wzrostem k (bo $\sin \frac{\pi}{k}$ maleje). Wykorzystując fakt, że funkcja arcus kosinus hiperboliczny jest ściśle rosnąca, uzyskujemy że długość boku $x_{(n,k)} = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)}$ (patrz wzór 2.3.2), rośnie wraz ze wzrostem n i k . Stąd wniosek, że najmniejsze długości boków będą przyjmowane dla parkietażu o najmniejszych parametrach n i k . Wśród nich szukamy wartości minimalnej. Pierwsza myśl to parkietaż $(3,3)$, pamiętajmy jednak o poprzednich rozważaniach. Zgodnie z Lematem 2.2.3, nie istnieją hiperboliczne parkietáže platońskie postaci: $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(4,3)$, $(4,4)$, $(5,3)$, $(6,3)$.

Lemat pomocniczy. *Wśród hiperbolicznych parkietażu platońskich najkrótszą długość boku ma jeden z parkietażu: $(3,7)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(7,3)$.*

Dowód lematu: Przedstawmy symbolicznie parkietáže o mniejszych parametrach w tabeli.

k	3	4	5	6	7	8	...
n							
3	X	X	X	X	ISTN	ISTN	ISTN
4	X	X	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN
5	X	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN
6	X	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN
7	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN
8	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN
...	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN	ISTN

Parkietaże

X nie istniejące

ISTN istniejące

ISTN wyróżnione w lemacie

Tabela 2.4.1.

Śledząc tabelę, możemy zauważyć, że poza wyróżnionymi parkietażami, dla wszystkich pozostałych znajdziemy inny parkietaż o niższym parametrze n lub k . Inaczej mówiąc znajdziemy parkietaż o mniejszej długości boku, co kończy dowód Lematu pomocniczego.

Kontynuując właściwy dowód Twierdzenia 2.4.1, pozostaje wybrać najmniejszą spośród wartości: $x_{(3,7)}$, $x_{(4,5)}$, $x_{(5,4)}$, $x_{(7,3)}$. Przypomnijmy $x_{(n,k)} = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)}$, funkcja arcus kosinus hiperboliczny jest ściśle rosnąca. Porównanie dwóch długości boków, ogranicza się do porównania argumentów tej funkcji, wyrażeń postaci $\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)}$. Należy znaleźć najmniejszą spośród wartości: $\frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/7)}$, $\frac{\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/5)}$, $\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/4)}$, $\frac{\cos(\pi/7)}{\sin(\pi/3)}$.

Zacznijmy od pokazania nierówności $\frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/7)} > \frac{\cos(\pi/7)}{\sin(\pi/3)}$. Jej udowodnienie sprowadza się do uzasadnienia równoważnej nierówności postaci:

$$(2.4.2) \quad \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} > \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7}.$$

Wiadomo, że $\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta$ (patrz [4], str. 74), stąd $\sin \beta \cos \beta = \frac{\sin 2\beta}{2}$. Zatem przekształcając nierówność 2.4.2 dochodzimy do kolejnych nierówności z nią równoważnych: $\sin \frac{2\pi}{3} > \sin \frac{2\pi}{7}$, czyli $\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6}\pi) > \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{14}\pi)$. Śledząc przebieg wykresu funkcji sinus (symetria względem argumentu równego $\frac{\pi}{2}$), oraz uwzględniając że $\frac{1}{6} < \frac{3}{14}$, potwierdzamy prawdziwość nierówności 2.4.2, jak również równoważnej nierówności $\frac{\cos(\pi/3)}{\sin(\pi/7)} > \frac{\cos(\pi/7)}{\sin(\pi/3)}$.

Analogicznie uzasadnimy nierówność $\frac{\cos(\pi/4)}{\sin(\pi/5)} > \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/4)}$, równoważną z nierównością $\sin \frac{2\pi}{4} > \sin \frac{2\pi}{5}$, a następnie z nierównością $\sin \frac{\pi}{2} > \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{10}\pi)$. Ostatecznie nierówność jest prawdziwa, gdyż sinus jest funkcją rosnącą w przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$. Stąd równoważna z nią nierówność wyjściowa jest także prawdziwa.

Pozostaje jeszcze porównanie dwóch mniejszych wartości. Wykazanie że $\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/4)} > \frac{\cos(\pi/7)}{\sin(\pi/3)}$ sprowadza się do udowodnienia równoważnej nierówności:

$$(2.4.3) \quad \cos \frac{\pi}{5} \sin \frac{\pi}{3} > \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{7}.$$

Ze związków między funkcjami trygonometrycznymi ([4], str. 75) mamy wzór: $\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{2}[\sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma)]$. Wykorzystując go w nierówności 2.4.3 otrzymamy równoważne nierówności: $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{5}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{7}\right)$. Wyliczając argumenty sinusów dostajemy $\sin\left(\frac{8}{15}\pi\right) + \sin\left(\frac{2}{15}\pi\right) > \sin\left(\frac{11}{28}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{28}\pi\right)$. Zwróćmy teraz uwagę, że $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{16}\pi\right) = \sin\left(\frac{8}{15}\pi\right) > \sin\left(\frac{11}{28}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3}{28}\pi\right)$, ponadto $\sin\left(\frac{2}{15}\pi\right) > \sin\left(\frac{3}{28}\pi\right)$. Jako uzasadnienie tych nierówności przypomnijmy tylko, że sinus to funkcją rosnącą na przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, symetryczną względem argumentu $x = \frac{\pi}{2}$. Ostatecznie potwierdzamy więc nierówność 2.4.3, jak też równoważną nierówność $\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/4)} > \frac{\cos(\pi/7)}{\sin(\pi/3)}$.

Podsumujmy jeszcze nasze rozważania. Najmniejsza z czterech rozpatrywanych wartości to $\frac{\cos(\pi/7)}{\sin(\pi/3)}$, stąd hiperboliczny parkietaż platoński o najkrótszym boku to parkietaż (7,3), w którym $x_{(7,3)} = 2\operatorname{arcosh} \frac{\cos(\pi/7)}{\sin(\pi/3)}$ **c.k.d.**

Przyjrzyjmy się teraz przybliżonym długościom boków dla poszczególnych parkietaży. Poniższa tabela została wykonana przy użyciu programu „Microsoft Excel 2010”.

$$x_{(n,k)} \approx$$

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
n												
3	X	X	X	X	1,091	1,529	1,855	2,123	2,352	2,553	2,734	
4	X	X	1,254	1,763	2,141	2,448	2,710	2,939	3,142	3,326	3,493	
5	X	1,061	1,685	2,123	2,470	2,761	3,012	3,234	3,432	3,612	3,777	
6	X	1,317	1,876	2,292	2,629	2,914	3,161	3,380	3,577	3,756	3,919	
7	0,566	1,449	1,982	2,388	2,720	3,002	3,247	3,465	3,661	3,838	4,001	
8	0,727	1,529	2,048	2,448	2,777	3,057	3,301	3,518	3,713	3,891	4,053	
9	0,819	1,581	2,092	2,489	2,816	3,094	3,338	3,554	3,749	3,926	4,089	
10	0,879	1,617	2,123	2,517	2,843	3,121	3,364	3,580	3,774	3,951	4,113	
11	0,921	1,643	2,145	2,538	2,862	3,140	3,383	3,598	3,793	3,969	4,132	
12	0,952	1,663	2,162	2,553	2,877	3,155	3,397	3,612	3,807	3,983	4,145	
13	0,975	1,678	2,175	2,565	2,889	3,166	3,408	3,623	3,817	3,994	4,156	
14	0,993	1,690	2,185	2,575	2,898	3,175	3,417	3,632	3,826	4,003	4,165	
15	1,007	1,700	2,193	2,583	2,906	3,182	3,424	3,639	3,833	4,009	4,171	
16	1,019	1,707	2,200	2,589	2,912	3,188	3,429	3,645	3,838	4,015	4,177	
17	1,028	1,714	2,206	2,594	2,916	3,193	3,434	3,649	3,843	4,020	4,182	

Tabela 2.4.2.

Widzimy, że powyższe wyniki jawnie potwierdzają wcześniejsze rozważania. Najkrótsza długość boku jest przypisana parkietażowi (7,3) i wynosi $x_{(7,3)} \approx 0,566$.

Pojawia się pytanie, jak można interpretować uzyskane powyżej konkretne długości boków w parkietażach na płaszczyźnie hiperbolicznej.

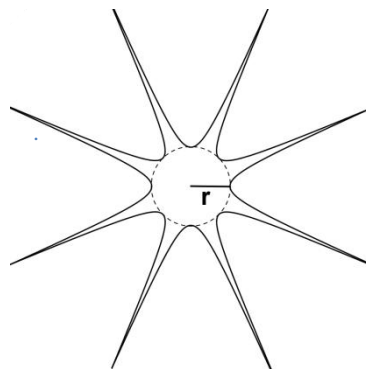
Dużo bliższa naszemu życiu codziennemu jest geometria euklidesowa. Intuicyjnie rozróżniamy w niej podstawowe pojęcia i wielkości. Możemy wyrazić długość zadanego odcinka za pomocą znanych jednostek, podobnie mając długość, dobierzemy do niej odpowiedni odcinek. Wyrażanie długości opiera się więc na porównaniu z jakąś dobrze znaną i określoną wielkością. Tak też postąpimy w geometrii hiperbolicznej. Żeby lepiej zrozumieć skalę wyliczonych długości, porównamy je z promieniem okręgu wpisanego w trójkąt idealny (patrz Podrozdział 0.1), który można uznać za pewnego rodzaju uniwersalną jednostkę w geometrii hiperbolicznej

Przypomnijmy, że w Podrozdziale 1.4 wyprowadziliśmy wzór 1.4.6 pozwalający obliczyć promień okręgu wpisanego w n -ką idealny: $r_i = \operatorname{arcosh} \frac{1}{\sin(\pi/n)}$. Dla $n = 3$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ostatecznie otrzymujemy $r = \operatorname{arcosh} \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 0,55$.

Poprzez długość powyższego promienia możemy teraz wyrażać długości boków poszczególnych parkietaży. Przykładowo stwierdzamy, że najkrótsza długość boku w parkietażu platońskim (7,3), jest w przybliżeniu równa długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt idealny.

Zaskoczeniem może być dla nas sam rezultat otrzymany dla trójkąta idealnego. Promień okręgu wpisanego wynosi jedynie około 0,55. Biorąc pod uwagę fakt, że bokami tego trójkąta są nieskończenie długie hiperboliczne proste (patrz proste w modelach Poincarego, Podrozdział 0.1), powstaje iluzja sprzeczności. Dobrze ugruntowana intuicja z geometrii euklidesowej podpowiada nam, że skoro boki trójkąta foremego są tak długie, to sam trójkąt jest „bardzo duży”, przez co wpisujemy w niego „duży” okrąg, który z pewnością ma bardzo długi promień.

Różnicę pomiędzy hiperbolicznymi długościami boku wielokąta i promienia okręgu wpisanego uwidacznia się nie tylko w przypadku wielokątów idealnych, ale również dla pozostałych wielokątów. Kluczem do wyobrażenia sobie, w jaki sposób ta różnica może być tak duża niech będzie poniższy, schematyczny rysunek, ilustrujący przykładowy kształt 8-kąta foremego o małej mierze kąta wewnętrznego.



Rysunek 2.4.3.

Powyższy obraz nie jest przedstawiony w żadnym konkretnym modelu geometrii hiperbolicznej, (może jedynie przypominać model dyskowy Poincarego). Takie przedstawienie wybraliśmy jednak celowo, żeby lepiej uwidocznić istotę rozważanego zagadnienia. Zwróćmy uwagę na wierzchołki tego wielokąta. Gdy kąt wewnętrzny ma miarę bliską zero, wtedy w pobliżu wierzchołka ramiona kąta są długie i zwięzione. Okrąg wpisany obejmuje jedynie centralną część wielokąta foremnego, stąd jego promień jest stosunkowo mały wobec długości boku łączącego dwa sąsiednie wierzchołki.

Różnicę, którą Rysunek 2.4.3 przedstawia poglądowo, poprzemy wyliczeniami długości boków i promieni przyjmując konkretne wartości miary kąta w 8-kącie foremnym.

Przykład 2.4.4. (obliczenia w arkuszu kalkulacyjnym „Microsoft Excel 2010”)

Mówimy o 8-kącie, zatem $n = 8$. W Stwierdzeniu 1.3.5 pokazaliśmy, że miara kąta wewnętrznego w hiperbolicznym n -kącie foremnym przyjmuje wszystkie wartości z zakresu $(0, \frac{\pi(n-2)}{n})$. Zatem w przypadku 8-kąta będą to wartości dodatnie mniejsze od $\frac{3}{4}\pi$. Zaczniemy od przyjęcia stosunkowo dużej miary kąta wewnętrznego α w 8-kącie, następnie rozważymy dużo mniejsze wartości.

$$1) \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Obliczymy teraz długość boku x w 8-kącie foremnym o kącie wewnętrznym $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Wykorzystamy wzór 1.3.6. Przypomnijmy: $x = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\alpha/2)}$. Podstawiając konkretne

dane mamy: $x = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/8)}{\sin(\pi/6)} \approx 2,448$. Natomiast wykorzystując wzór 1.4.5 obliczymy

promień okręgu wpisanego w wielokąt: $r = \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\pi/n)} = \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/6)}{\sin(\pi/8)} \approx 1,457$.

$$2) \alpha = \frac{\pi}{3} \cdot 10^{-3} = \frac{\pi}{3000}$$

Korzystając z tych samych wzorów co powyżej otrzymujemy:

$$x = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/8)}{\sin(\pi/6000)} \approx 16,337 \quad \text{oraz} \quad r = \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/6000)}{\sin(\pi/8)} \approx 1,6148907.$$

$$3) \alpha = \frac{\pi}{3} \cdot 10^{-6} = \frac{\pi}{3000000}$$

$$\text{Mamy: } x = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/8)}{\sin(\pi/6000000)} \approx 30,153 \quad \text{oraz} \quad r = \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/6000000)}{\sin(\pi/8)} \approx 1,6148909.$$

Zwróćmy uwagę na wyniki które otrzymaliśmy. Przyjmując „dość dużą” miarę kąta wewnętrznego czyli $\alpha = \frac{\pi}{3}$, otrzymaliśmy przybliżoną długość boku $x \approx 2,448$. Jest ona niecałe dwa razy większa od długości promienia okręgu wpisanego w wielokąt: $r \approx 1,457$. Zmniejszając jednak miarę kąta α , i to ostatecznie aż milion razy, długość boku wzrosła ponad dwunastokrotnie, do wartości $x \approx 30,153$. Tymczasem długość promienia wzrosła zaledwie o około 0,158 i jest prawie dziewiętnaście razy mniejsza od długości boku.

Co więcej, przy zmniejszeniu miary kąta wewnętrznego w hiperbolicznym 8-kącie foremnym od wartości $\frac{\pi}{3000}$ do $\frac{\pi}{3000000}$, długość promienia wzrosła zaledwie o $2 \cdot 10^{-7}$, podczas gdy długość boku prawie dwukrotnie się zwiększyła. Konkretnie wyniki liczbowe są więc zgodne z wcześniejszymi rozważaniami.

Powyższe rozważania dotyczyły 8-kąta foremnego, ale analogiczne zależność możemy wskazać w dowolnym n -kącie foremnym.

2.5. Długość promienia okręgu wpisanego w wielokąt tworzący hiperboliczny parkietaż platoński

Mówiąc o długości promienia okręgu wpisanego w wielokąt foremny, warto jest wyznaczyć taką długość dla wielokąta tworzącego hiperboliczny parkietaż platoński. Taką długość w parkietażu (n, k) oznaczmy przez $r_{(n,k)}$.

Stwierdzenie 2.5.1. *Długość promienia okręgu wpisanego w wielokąt foremny tworzący hiperboliczny parkietaż (n, k) wyraża wzór:*

$$(2.5.2) \quad r_{(n,k)} = \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\pi/k)}{\sin(\pi/n)}.$$

Dowód: Wcześniej otrzymaliśmy zależność promienia okręgu wpisanego od miary kąta wewnętrznego w dowolnym n -kącie foremnym. Przypomnijmy: $r = \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\alpha/2)}{\sin(\pi/n)}$ (patrz wzór 1.4.5). Rozważając istnienie parkietaży hiperbolicznych otrzymaliśmy wzór 2.2.1: $k \cdot \alpha = 2\pi$, zatem $\alpha = \frac{2\pi}{k}$. Wstawiając to wyrażenie do wzoru 1.4.5, dostajemy tezę **c.k.d.**

Przyjrzyjmy się jeszcze raz pewnym dwóm wzorom. Długość boku n -kąta foremnego tworzącego hiperboliczny parkietaż platoński postaci (n, k) opisuje wzór 2.3.2. Natomiast promień okręgu wpisanego w ten wielokąt opisuje wzór 2.5.2. Mamy więc dwa wyrażenia:

$$x_{(n,k)} = 2 \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} \quad \text{i} \quad r_{(n,k)} = \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\pi/k)}{\sin(\pi/n)}.$$

Stosunkowo łatwo jest dostrzec pewne analogie.

Spostrzeżenie 2.5.3. *Długość boku w hiperbolicznym parkietażu platońskim postaci (n, k) , jest równa podwojonemu promieniowi (czyli średnicy) okręgu wpisanego w wielokąt foremny, tworzący hiperboliczny parkietaż platoński postaci (k, n) , zatem $x_{(n,k)} = 2r_{(k,n)}$.*

Pojawia się jedynie drobna wątpliwość, czy aby na pewno wszystkie parkietaże platońskie o odwróconych parametrach istnieją. Wystarczy jednak tylko cofnąć się do Twierdzenia 2.2.4, aby pozytywnie rozstrzygnąć takie pytanie.

Na podstawie spostrzeżenia 2.5.3 poczyńmy pewną uwagę.

Uwaga 2.5.4. Rozważania związane z długością boku w hiperbolicznym parkietażu platońskim postaci (n, k) , są równoznaczne z rozważaniami dotyczącymi długości średnicy okręgu wpisanego w wielokąt foremny tworzący hiperboliczny parkietaż platoński postaci (k, n) .

Powyższą uwagę możemy przykładowo wykorzystać modyfikując Twierdzenie 2.4.1, mówiące że hiperboliczny parkietaż platoński o najkrótszym boku to parkietaż $(7, 3)$. Otrzymujemy poniższe stwierdzenie.

Stwierdzenie 2.5.5. Hiperboliczny parkietaż platoński, zbudowany z wielokątów foremnych o najmniejszym promieniu okręgu wpisanego to parkietaż $(3, 7)$.

2.6. Długość boku w hiperbolicznym parkietażu platońskim dla parametrów n, k dążących do nieskończoności

W tabeli 2.4.2 przybliżyliśmy wartości najmniejszych długości boków wielokątów foremnych tworzących parkietaże platońskie. Teraz zajmiemy się przypadkami gdy długości boków są duże (asymptotycznie dążą do nieskończoności), oraz wyrażeniami które je opisują. Przypomnijmy, że długość boku w parkietażu platońskim (n, k) wyrażamy następująco: $x_{(n,k)} = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)}$. Jest ona zależna od parametrów opisujących parkietaż, czyli n i k . W dowodzie Twierdzenia 2.4.1 pokazaliśmy już, że długość boku rośnie wraz ze wzrostem n lub k . Zaczniemy od rozważań związanych z parametrem n . Przyjmując, że $n \rightarrow \infty$ przy ustalonym k , otrzymujemy że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{(n,k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} = 2 \operatorname{arccosh} \frac{1}{\sin(\pi/k)}$. W Tablicach ([4], str. 289) znajdziemy wzór pozwalający inaczej przedstawić to wyrażenie:

$$(2.6.1) \quad \operatorname{arccosh} w = \ln(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

Dostajemy $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{(n,k)} = 2 \operatorname{arccosh} \frac{1}{\sin(\pi/k)} = 2 \ln \left(\frac{1}{\sin(\pi/k)} + \sqrt{\left(\frac{1}{\sin(\pi/k)}\right)^2 - 1} \right)$. Następnie

przekształćmy wyrażenie pod pierwiastkiem: $2 \ln \left(\frac{1}{\sin(\pi/k)} + \sqrt{\frac{1 - \sin^2(\pi/k)}{\sin^2(\pi/k)}} \right) = 2 \ln \frac{1 + \cos(\pi/k)}{\sin(\pi/k)}$.

Wykorzystaliśmy jedynekę trygonometryczną. Jest jeszcze jeden związek ([4], str. 74), który uprości otrzymane wyrażenie: $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \frac{1 + \cos \beta}{\sin \beta}$, gdy $\sin \beta \neq 0$. Zatem ostatecznie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{(n,k)} = 2 \ln \frac{1 + \cos(\pi/k)}{\sin(\pi/k)} = 2 \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2k} \right).$$

Podsumowując, przy ustalonym k , długość boku w hiperbolicznym parkietażu platońskim (n, k) , rośnie wraz ze wzrostem n , do skończonej, granicznej wartości $2 \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2k} \right)$.

Teraz zastanówmy się nad rosnącym parametrem k , przyjmując że ustalone jest n . Interesuje nas granica postaci $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{(n,k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)}$. Zauważmy, że

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{k} = 0$, stąd $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} = \infty$, uwzględniając fakt że $\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{arcosh} z = \infty$, ostatecznie otrzymujemy: $\lim_{k \rightarrow \infty} 2 \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} = \infty$.

Określiliśmy już granicę tego wyrażenia dla $k \rightarrow \infty$. Naszym kolejnym celem będzie znalezienie prostszego wyrażenia, które dla $k \rightarrow \infty$ dobrze przybliży wartość wyrażenia $x_{(n,k)}$. Ponadto szukamy wyrażenia, które da nam pojęcie o tempie wzrostu do nieskończoności dla $x_{(n,k)}$, przyjmując że parametr $k \rightarrow \infty$.

Zauważmy, że wyrażenie $x_{(n,k)}$ możemy przedstawić wykorzystując wzór 2.6.1:

$$(2.6.2) \quad x_{(n,k)} = 2 \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} = 2 \ln \left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} + \sqrt{\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} \right)^2 - 1} \right).$$

W tym fragmencie nasze rozumowanie będzie miało charakter nieformalny, bardziej intuicyjny. Przybliżenie, które tu otrzymamy uściślimy jednak w dalszej części pracy. Rozważmy równość 2.6.2. Przyjrzyjmy się różnicy znajdującej się pod pierwiastkiem. Przyjmując, że $k \rightarrow \infty$, odjemna będzie zbliżała się do nieskończoności, stąd jedynka w odjemniku nie będzie miała istotnego znaczenia i możemy ją pominąć. Zatem dla $k \rightarrow \infty$ otrzymujemy: $x_{(n,k)} \approx 2 \ln \frac{2 \cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)}$. Co więcej, dodajmy jeszcze że funkcja $\sin x$ dla argumentów bliskich zera przyjmuje wartości bliskie wartościom funkcji liniowej $f(x)=x$ (patrz rozwinięcie Taylora funkcji sinus). Stąd dla $k \rightarrow \infty$, $\sin \frac{\pi}{k}$ możemy zastąpić przez $\frac{\pi}{k}$, dostajemy wtedy $x_{(n,k)} \approx 2 \ln \left(k \cdot \frac{2 \cos(\pi/n)}{\pi} \right) = 2 \ln k + 2 \ln \frac{2 \cos(\pi/n)}{\pi}$. Uwzględniając zależność otrzymanego wyrażenia od $k \rightarrow \infty$, przybliżenie to jest znaczącym uproszczeniem wobec wyrażenia $x_{(n,k)} = 2 \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)}$. W przybliżeniu cała zależność skoncentrowana jest w pierwszym, prostszym składniku podanej sumy, drugi składnik jest stałą. Warto jest jednak zapytać o asymptotyczną równoważność tych wyrażeń w nieskończoności, czyli o uściślenie faktu, że jedno wyrażenie jest przybliżone przez drugie.

Definicja 2.6.3. Dwa wyrażenia, zależne od tej samej zmiennej, których wartości dążą do nieskończoności nazywamy *asymptotycznie równoważnymi w nieskończoności*, kiedy granica ilorazów tych wyrażeń wynosi jeden.

Zatem udowodnimy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.6.4. Długość boku $x_{(n,k)}$, przy $k \rightarrow \infty$, jest asymptotycznie równoważna w nieskończoności wielkości $2 \ln k + 2 \ln \frac{2 \cos(\pi/n)}{\pi}$.

Dowód: Przywołując poprzednie rozważania możemy wysnuć następujące wnioski:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{(n,k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \ln \left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} + \sqrt{\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} \right)^2 - 1} \right) = \infty.$$

Łatwo można zauważyć, że $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(2 \ln k + 2 \ln \frac{2 \cos(\pi/n)}{\pi} \right) = \infty$. Pozostaje sprawdzić asymptotyczną równoważność wyrażen $x_{(n,k)} = 2 \ln \left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} + \sqrt{\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} \right)^2 - 1} \right)$ oraz $2 \ln k + 2 \ln \frac{2 \cos(\pi/n)}{\pi} = 2 \ln \left(k \cdot \frac{2 \cos(\pi/n)}{\pi} \right)$, czyli że:

$$(2.6.5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left[2 \ln \left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} + \sqrt{\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} \right)^2 - 1} \right) / 2 \ln \frac{2k \cos(\pi/n)}{\pi} \right] = 1$$

Udowodnimy teraz pewien fakt, który pozwoli uprościć kolejne rozważania.

Fakt pomocniczy. Jeśli $a(k) \rightarrow \infty$ i $b(k) \rightarrow \infty$ są asymptotycznie równoważne w nieskończoności, tzn. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(k)}{b(k)} = 1$, to również logarytmy z $a(k)$ i $b(k)$ są równoważne w nieskończoności, tzn. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(a(k))}{\ln(b(k))} = 1$.

Dowód Faktu pomocniczego: Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy $b(k) = x$, $a(k) = x \pm \Delta$. Zaczniemy od uzasadnienia przypadku gdy $a(k) = x + \Delta$. Zauważmy, że wtedy $\ln(x + \Delta) - \ln x = \int_x^{x+\Delta} \ln'(t) dt \leq \int_x^{x+\Delta} \frac{1}{t} dt \leq \Delta \cdot \left[\sup_{t \in [x, x+\Delta]} \frac{1}{t} \right] = \Delta \cdot \frac{1}{x} = \frac{\Delta}{x}$.

Otrzymujemy, że $\ln(x + \Delta) - \ln x \leq \frac{\Delta}{x}$. Rozważmy teraz następujące nierówności, szacujące iloraz rozpatrywanych logarytmów: $1 \leq \frac{\ln(x+\Delta)}{\ln x} \leq \frac{\ln x + \frac{\Delta}{x}}{\ln x} = 1 + \frac{\Delta}{x} \cdot \frac{1}{\ln x}$. Z warunków podanych w założeniach wiemy, że $x \rightarrow \infty$, zatem $\frac{x+\Delta}{x} \rightarrow 1$, stąd $\frac{\Delta}{x} \rightarrow 0$. Ostatecznie przechodząc do granicy dostajemy: $1 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+\Delta)}{\ln x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\Delta}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} \right) = 1$, czyli $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+\Delta)}{\ln x} = 1$.

Należy jeszcze rozpatrzyć przypadek gdy $a(k) = x - \Delta$. To rozumowanie jednak pominiemy. Opiera się ono na analogicznych rozważaniach (uzasadniamy, że $\ln x - \ln(x - \Delta) \leq \frac{\Delta}{x-\Delta}$ i korzystamy z tego, że $1 \geq \frac{\ln(x-\Delta)}{\ln x} \geq \frac{\ln x - \frac{\Delta}{x-\Delta}}{\ln x} = 1 - \frac{\Delta}{x-\Delta} \cdot \frac{1}{\ln x}$), co kończy dowód faktu pomocniczego.

Kontynuujmy teraz właściwy dowód Twierdzenia 2.6.4. Na podstawie powyższego faktu, uzasadnienie równości 2.6.5, sprowadza się do pokazania prostszej równości:

$$(2.6.6) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} + \sqrt{\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} \right)^2 - 1} \right) / \frac{2k \cos(\pi/n)}{\pi} \right] = 1.$$

Zajmiemy się przekształcaniem lewej strony tego równania, dążąc do uzyskania jedynki. Upraszczając licznik wspomnianego wyrażenia dochodzimy do kolejnych postaci:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos(\pi/n) + \sqrt{\cos^2(\pi/n) - \sin^2(\pi/k)}}{\sin(\pi/k)} / \frac{2k \cos(\pi/n)}{\pi} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi [\cos(\pi/n) + \sqrt{\cos^2(\pi/n) - \sin^2(\pi/k)}]}{2k \sin(\pi/k) \cos(\pi/n)} = \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi (\cos(\pi/n) + \sqrt{\cos^2(\pi/n) - \sin^2(\pi/k)})}{2k(\pi/k) \cos(\pi/n)} \cdot \frac{\pi/k}{\sin(\pi/k)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos(\pi/n) + \sqrt{\cos^2(\pi/n) - \sin^2(\pi/k)}}{2 \cos(\pi/n)} \cdot \frac{\pi/k}{\sin(\pi/k)} \right). \end{aligned}$$

Wiemy, że granica iloczynu jest iloczynem granic poszczególnych czynników, o ile granice te istnieją i są skończone. Rozpatrzmy więc kolejne granice. Wiemy, że $\lim_{k \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{k} = 0$, zatem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi/n) + \sqrt{\cos^2(\pi/n) - \sin^2(\pi/k)}}{2 \cos(\pi/n)} = \frac{\cos(\pi/n) + \sqrt{\cos^2(\pi/n) - 0}}{2 \cos(\pi/n)} = \frac{2 \cos(\pi/n)}{2 \cos(\pi/n)} = 1.$$

Zanim rozpatrzmy drugą granicę zauważmy, że warunek postaci $k \rightarrow \infty$, jest równoważny temu, że $\frac{\pi}{k} \rightarrow 0$. Wyznaczając granicę skorzystamy również z reguły de l'Hospitala. Mamy:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi/k}{\sin(\pi/k)} = \lim_{\pi/k \rightarrow 0} \frac{\pi/k}{\sin(\pi/k)} \stackrel{d'H}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos(\pi/k)} = 1.$$

Ostatecznie uwzględniając powyższe granice, wychodząc od lewej strony równości 2.6.6, dochodzimy do wartości po prawej:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} + \sqrt{\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} \right)^2 - 1} \right) / \frac{2k \cos(\pi/n)}{\pi} \right] &= \dots = \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\cos(\pi/n) + \sqrt{\cos^2(\pi/n) - \sin^2(\pi/k)}}{2 \cos(\pi/n)} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\pi/k}{\sin(\pi/k)} &= 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Stąd równość 2.6.6 jest prawdziwa, zatem uwzględniając Fakt pomocniczy, prawdziwa jest również równość 2.6.5: $\lim_{k \rightarrow \infty} \left[2 \ln \left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} + \sqrt{\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)} \right)^2 - 1} \right) / 2 \ln \frac{2k \cos(\pi/n)}{\pi} \right] = 1$ **c.k.d.**

Nawiązując do Twierdzenia 2.6.4, poczyńmy pewną uwagę.

Uwaga 2.6.7. Długość boku $x_{(n,k)}$ w hiperbolicznym parkietażu platońskim, przy wzrastającym parametrze $k \rightarrow \infty$, rośnie stosunkowo powoli. Jest to wzrost logarytmiczny.

Faktycznie zgodnie z twierdzeniem 2.6.4, przy $k \rightarrow \infty$ długość boku jest w przybliżeniu równa $2 \ln k + 2 \ln \frac{2 \cos(\pi/n)}{\pi}$. Przy ustalonym n i zmieniającym się k wartość wyrażenia $2 \ln \left(\frac{2 \cos(\pi/n)}{\pi} \right)$ jest stałą. Jediną zmienną pozostaje k . Cała długość jest w przybliżeniu równa podwojonej funkcji $\ln k$ zwiększonej o pewną stałą, zatem długość wzrasta logarytmicznie.

Na koniec zaobserwujmy ten wzrost na konkretnych przykładach. Rozpatrzmy przykładowo parkietaż platoński zbudowane z pięciokątów ($n = 5$). Z Twierdzenia 2.2.4 wiemy, że w takich parkietażach parametr naturalny k jest większy od 3. Dobierzmy kilka wartości k , a następnie obliczmy długości boków. Wykorzystamy dwa wzory: dokładny $(x_{(n,k)} = 2 \operatorname{arcosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)})$ i przybliżony $(x_{(n,k)} \approx 2 \ln k + 2 \ln \frac{2 \cos(\pi/n)}{\pi})$. Wartość wyrażenia przybliżającego oznaczmy $x'_{(n,k)} = 2 \ln k + 2 \ln \frac{2 \cos(\pi/n)}{\pi}$

Przykład 2.6.8. (obliczenia w arkuszu kalkulacyjnym „Microsoft Excel 2010”)

$$x_{(5,k)} = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/k)} \qquad x'_{(5,k)} = 2 \ln k + 2 \ln \left(\frac{2 \cos(\pi/5)}{\pi} \right)$$

1) $k=10$	$x_{(5,k)} \approx 3,234,$	1)' $x'_{(5,k)} \approx 3,278,$
2) $k=10^2$	$x_{(5,k)} \approx 7,8828,$	2)' $x'_{(5,k)} \approx 7,8833,$
3) $k=10^6$	$x_{(5,k)} \approx 26,303984994,$	3)' $x'_{(5,k)} \approx 26,303984994,$
4) $k=10^9$	$x_{(5,k)} \approx 40,119495552.$	4)' $x'_{(5,k)} \approx 40,119495552.$

Zauważmy, że wykorzystując poszczególne wzory otrzymaliśmy bardzo podobne wyniki. Już przyjmując $k = 10$, przybliżona długość różni się zaledwie o około 0,044. Dla $k = 100$ jest to już tylko około 0,0005. Kolejne przykłady wskazują na dokładność przynajmniej do dziewiątego miejsca po przecinku. Świadczy to o bardzo dużej dokładności wzoru przybliżającego długość boku ($x'_{(n,k)} = 2 \ln k + 2 \ln \frac{2 \cos(\pi/n)}{\pi}$), i to nawet dla dość małych wartości parametru k . Kolejną rzeczą którą warto prześledzić jest wzrost długości boku, przy wzroście wartości parametru k . Rozpatrując skrajne przypadki ($k = 10$ i $k = 10^9$) zauważamy, że gdy k wzrosło aż sto milionów razy, to $x_{(5,k)}$ wzrosło zaledwie około trzynastą razy. Przykład ten uwidacznia informację podaną w Uwadze 2.6.7.

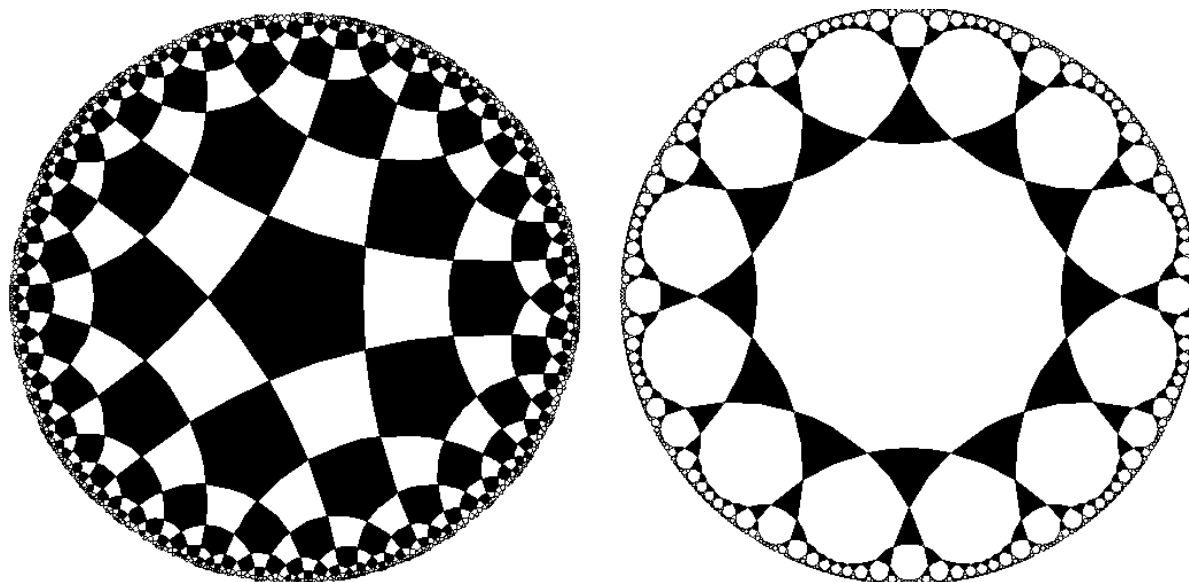
3. Szachownice archimedesowskie

W Rozdziale 3 zajmiemy się parkietażami płaszczyzny hiperbolicznej, w których występują wielokąty foremne dwóch rodzajów. Skupimy się na specyficznych układach wielokątów, które nazwiemy *szachownicami archimedesowskimi*. Celem będzie znalezienie wszystkich hiperbolicznych szachownic. Na wstępie w Podrozdziale 3.1, zaczniemy jednak od szachownic w geometrii euklidesowej.

Definicja 3.0.1. *Szachownica archimedesowska* to parkietaż składający się z co najwyżej dwóch rodzajów przystających wielokątów foremnych, których jednakowa liczba schodzi się naprzemiennie w każdym wierzchołku.

Poprzez (n, m, s) oznaczamy szachownicę archimedesowską złożoną z n - i m -kątów foremnych, których po s schodzi się w każdym wierzchołku. Nie zmniejszając ogólności przyjmiemy $n \leq m$.

Poniżej prezentujemy dwa przykłady hiperbolicznych szachownic archimedesowskich, przedstawionych w modelu dyskowym Poincarego (od lewej $(4,5,2)$ i $(3,12,2)$). Czarnym kolorem wyróżniono jeden z dwóch rodzajów wielokątów budujących dany parkietaż. Powstałe obrazy tworzą swoiste szachownice, uwidaczniając w ten sposób nazewnictwo przyjęte dla takich parkietaży.



Rysunki 3.0.1.

W przystających wielokątach foremnych wszystkie kąty wewnętrzne są równe, zatem dochodzimy do następujących spostrzeżeń.

Spostrzeżenie 3.0.2. Wokół dowolnego wierzchołka szachownicy archimedesowskiej skupia się s kątów wewnętrznych o równej mierze z n -kąta foremnego i s kątów wewnętrznych o równej mierze z m -kąta foremnego. W sumie mają one miarę 2π .

Spostrzeżenie 3.0.3. W każdym wierzchołku szachownicy archimedesowskiej schodzi się parzysta liczba wielokątów równa $2s$.

Spostrzeżenie 3.0.4. Parkietaż platoński postaci (n, k) , gdzie $2|k$ to przykład szachownicy archimedesowskiej $(n, n, s = k/2)$, zbudowanej tylko z n -kątów foremnych.

3.1. Szachownice archimedesowskie w geometrii euklidesowej

Zastanówmy się, jakie szachownice archimedesowskie postaci (n, m, s) są w geometrii euklidesowej.

Na początku warto przypomnieć parkietaże platońskie, które istnieją w geometrii euklidesowej. Zgodnie z Twierdzeniem 2.1.1 mamy trzy takie parkietaże: $(3,6)$, $(4,4)$ i $(6,3)$. Uwzględniając Spostrzeżenie 3.0.4, otrzymujemy już dwie szachownice archimedesowskie: $(3,3,3)$ i $(4,4,2)$, które są równoważne parkietażom platońskim postaci $(3,6)$ i $(4,4)$.

Twierdzenie 3.1.1. Istnieją trzy euklidesowe szachownice archimedesowskie:

$$(3,3,3), (3,6,2) \text{ i } (4,4,2).$$

Dowód: Rozumowanie przeprowadzimy podobnie jak w przypadku parkietaży platońskich. Analizę całego parkietażu ograniczymy do obserwacji jednego, dowolnego wierzchołka. Na jego podstawie określimy możliwe wartości parametrów n, m i s .

Zauważmy że $n, m, s \in \mathbb{N}$, ponadto $n, m \geq 3$ jako liczby boków w wielokącie. Kąty wewnętrzne w wielokącie foremnym są wypukłe. Suma dwóch takich kątów jest mniejsza od 2π , stąd uwzględniając Spostrzeżenie 3.0.2: $s \neq 1$, a więc $s \geq 2$. Miara kątów wewnętrznych w n -kącie foremnym wynosi $\frac{\pi(n-2)}{n}$ (wzór 1.1.2). Analogicznie miara kątów w m -kącie foremnym wynosi $\frac{\pi(m-2)}{m}$. Odłóżmy po s razy takie kąty wokół wierzchołka szachownicy archimedesowskiej. Ze Spostrzeżenia 3.0.2 otrzymamy równanie: $s \cdot \frac{\pi(n-2)}{n} + s \cdot \frac{\pi(m-2)}{m} = 2\pi$. Przekształcając dostajemy $s \cdot \left(\frac{m(n-2)}{nm} + \frac{n(m-2)}{nm} \right) = 2$, następnie $s \cdot \frac{2(nm-m-n)}{nm} = 2$, stąd $s = \left(\frac{nm-m-n}{nm} \right)^{-1}$. W szczególności zauważmy, że wartości wyrażenia $\frac{nm-m-n}{nm} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$ ściśle rosną wraz ze wzrostem parametrów $n, m \geq 3$. Weźmy odwrotność tego wyrażenia:

$$(3.1.2) \quad s = \frac{nm}{nm-m-n}.$$

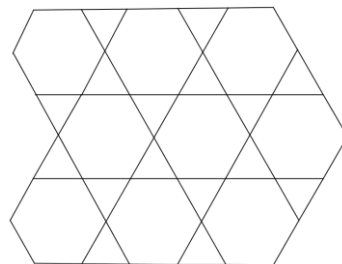
Wartości będą teraz ściśle malały wraz ze wzrostem parametrów n i m . Wiemy jednak, że najmniejsza wartość, jaką możemy przyjąć to $s = 2$. Stosunkowo prosto możemy teraz

zauważyć, że wyrażenie $\frac{nm}{nm-m-n}$ przyjmie taką wartość. Na przykład, gdy jeden z parametrów jest równy 3, a drugi 6. Kolejność parametrów nie ma znaczenia, ich położenie jest symetryczne, ale zgodnie z umownie przyjętą konwencją $n \leq m$. Wiemy już, że wartości wyrażenia opisującego s , maleją wraz ze wzrostem parametrów. Przyjmując $n = 3$ i $m = 6$ otrzymujemy najmniejszą dopuszczalną wartość $s = 2$. Zatem zwiększając teraz któryś z tych parametrów, dostajemy wartość $s < 2$, co jest sprzeczne z przyjętymi ustaleniami. Pozostaje rozpatrzyć pozostałe wartości parametrów n i m . Przeanalizujemy poszczególne przypadki.

- | | |
|--|--|
| 1) $n = 3$ i $m = 3$, wtedy $s = 3$, | 5) $n = 4$ i $m = 4$, wtedy $s = 2$, |
| 2) $n = 3$ i $m = 4$, wtedy $s = 2\frac{2}{5} \notin N$, | 6) $n = 4$ i $m = 5$, wtedy $s = 1\frac{9}{11} < 2$, |
| 3) $n = 3$ i $m = 5$, wtedy $s = 2\frac{1}{7} \notin N$, | 7) $n = 5$ i $m = 5$, wtedy $s = 1\frac{1}{3} < 2$. |
| 4) $n = 3$ i $m = 6$, wtedy $s = 2$, | |

Uwzględniając ograniczenia parametru naturalnego $s \geq 2$ odrzucamy przypadki: 2), 3), 6), 7). Ostatecznie, jedyne szachownice archimedesowskie to: $(3,3,3)$, $(3,6,3)$, $(4,4,2)$ **c.n.d.**

Przypomnijmy, że euklidesowa szachownica postaci $(3,3,3)$, to faktycznie parkietaż platoński $(3,6)$, podobnie przypadek $(4,4,2)$ odpowiada parkietażowi platońskiemu $(4,4)$. Parkietaże te przedstawiliśmy już na Rysunkach 2.1.1. Natomiast fragment nietrywialnej (tzn. nieplatońskiej) szachownicy archimedesowskiej $(3,6,3)$ prezentujemy poniżej.



Rysunek 3.1.1.

3.2. Szachownice archimedesowskie w geometrii hiperbolicznej

Celem jest opisanie wszystkich szachownic archimedesowskich w geometrii hiperbolicznej. Mimo, że taki parkietaż zbudowany jest z dwóch rodzajów wielokątów foremnych, to rozumowanie poprowadzimy podobnie jak w przypadku parkietaży platońskich (Podrozdział 2.2), wykorzystując przy tym informacje z Podrozdziału 3.1.

Podobnie jak w geometrii euklidesowej wyznaczymy wszystkie możliwe wartości parametrów n, m i s dla których istnieje szachownica (n, m, s) . Z poprzedniego podrozdziału wiemy, że $n, m, s \in N$, ponadto $n, m \geq 3$ oraz $s \geq 2$. Kluczem do dalszego rozumowania będzie Spostrzeżenie 3.0.2, mówiące że wokół dowolnego wierzchołka szachownicy archimedesowskiej skupia się s kątów wewnętrznych o równej mierze z n -kąta foremnego i s kątów wewnętrznych o równej mierze z m -kąta foremnego, które w sumie mają miarę 2π .

Mówimy o kątach wewnętrznych w n i m -kącie foremnym. Oznaczmy takie kąty odpowiednio przez α_n i α_m . Otrzymujemy więc poniższą równość:

$$(3.2.1) \quad s \cdot \alpha_n + s \cdot \alpha_m = s \cdot (\alpha_n + \alpha_m) = 2\pi.$$

W geometrii euklidesowej mogliśmy podstawić konkretną wartość α . Tym razem jednak miary kątów wewnętrznych w n i m -kącie foremnym ulegają zmianie, są zależne od długości boku. Zakres wartości kąta wewnętrznego w hiperbolicznym n -kącie foremnym określiliśmy w Stwierdzeniu 1.3.5. Taki kąt przyjmuje wszystkie wartości z zakresu $(0, \frac{\pi(n-2)}{n})$, analogicznie w m -kącie foremnym dostajemy zakres wartości dodatnich, mniejszych od $\frac{\pi(m-2)}{m}$. Uwzględniając te informacje, oraz wykorzystując równanie 3.2.1 dostajemy:

$$2\pi = s \cdot (\alpha_n + \alpha_m) < s \cdot \left(\frac{\pi(n-2)}{n} + \frac{\pi(m-2)}{m} \right), \text{ następnie: } 2\pi < s \cdot \frac{2\pi(nm-m-n)}{nm}, \text{ stąd}$$

$$(3.2.2) \quad s > \frac{nm}{nm-m-n}.$$

Przypomnijmy teraz, że zgodnie z poprzednimi ustaleniami najmniejsza wartość naturalna parametru s jaką możemy przyjąć to $s = 2$. Wyrażenie $\frac{nm}{nm-m-n}$ rozpatrywaliśmy wcześniej (wzór 3.1.2). Wiemy, że jego wartości ściśle maleją wraz ze wzrostem $n, m \geq 3$, ponadto dla $n = 3$ i $m = 6$, jest ono równe 2. Przyjmując ten przypadek za graniczny. Zwróćmy uwagę, że zwiększając teraz któryś z parametrów otrzymujemy wtedy, że $\frac{nm}{nm-m-n} < 2$, czyli każdy parametr naturalny $s \geq 2$ spełnia nierówność 3.2.2. Pozostaje rozważyć pozostałe przypadki.

Lemat 3.2.3. *Nie ma hiperbolicznych szachownic archimedesowskich postaci:*

$$(3,3,2), (3,3,3), (3,4,2), (3,5,2), (3,6,2), (4,4,2).$$

Dowód: Rozpatrując pozostałe wartości n i m otrzymujemy ograniczenia na s (wzór 3.2.2):

- | | |
|---|--|
| 1) $n = 3$ i $m = 3$, wtedy $s > 3$, | 5) $n = 4$ i $m = 4$, wtedy $s > 2$, |
| 2) $n = 3$ i $m = 4$, wtedy $s > 2\frac{2}{3}$, | 6) $n = 4$ i $m = 5$, wtedy $s > 1\frac{9}{11}$, |
| 3) $n = 3$ i $m = 5$, wtedy $s > 2\frac{1}{7}$, | 7) $n = 5$ i $m = 5$, wtedy $s > 1\frac{1}{3}$. |
| 4) $n = 3$ i $m = 6$, wtedy $s > 2$, | |

Na podstawie tych warunków, stwierdzamy nieistnienie szachownic o parametrach podanych w treści lematu **c.k.d.**

Zanim rozważymy pozostałe szachownice, poczyńmy pewne, istotne spostrzeżenie.

Spostrzeżenie 3.2.4. *W hiperbolicznej szachownicy archimedesowskiej postaci (n,m,s) , odpowiadające sobie boki poszczególnych n - i m -kątów foremnym pokrywają się, stąd wszystkie boki mają równą długość.*

Informację tę wykorzystamy w dowodzie poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 3.2.5. *Istnieją hiperboliczne szachownice archimedesowskie postaci: $\{(n, m, s): n, m \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}, s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \setminus \{(3, 3, 2), (3, 3, 3), (3, 4, 2), (3, 5, 2), (3, 6, 2), (4, 4, 2)\}$, czyli dla wszystkich wartości parametrów $(n, m, s): n \geq 3; k \geq 3; s \geq 2$ z wyjątkiem tych podanych w Lemacie 3.2.3.*

Dowód: Uwzględniając Lemat 3.2.3, pozostaje uzasadnić istnienie reszty parkietaży. Zwróćmy uwagę, że istnienie konkretnej szachownicy postaci (n, m, s) , jest równoważne z istnieniem odpowiednich n - i m -kątowników foremnych, których boki mają jednakową długość, a kąty wewnętrzne spełniają równanie 3.2.1: $s \cdot (\alpha_n + \alpha_m) = 2\pi$, czyli $\alpha_n + \alpha_m = \frac{2\pi}{s}$. Dodatkowo należy uwzględnić wzór 3.2.2: $s > \frac{nm}{nm-m-n}$. Otrzymujemy wtedy:

$$\alpha_n + \alpha_m < 2\pi / \frac{nm}{nm-m-n} = \frac{2\pi(nm-m-n)}{nm} = \frac{\pi nm - 2\pi m + \pi nm - 2\pi n}{nm} = \frac{\pi(n-2)}{n} + \frac{\pi(m-2)}{m}.$$

Udowodnimy silniejsze warunki. Przyjmując tę samą długość boku x w n - i m -kątownikach foremnych, pokażemy że suma miar kątów $\alpha_n + \alpha_m$ przyjmuje wszystkie wartości z zakresu $(0, \frac{\pi(n-2)}{n} + \frac{\pi(m-2)}{m})$, w szczególności więc wartości postaci $\frac{2\pi}{s}$, dla $s > \frac{nm}{nm-m-n}$. Zgodnie ze wzorem 1.3.3: $\alpha_n = 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)}$, podobnie $\alpha_m = 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/m)}{\cosh(x/2)}$. Oba wyrażenia są zależne od długości boku x . Zgodnie ze Stwierdzeniem 1.3.1, długość boku w hiperbolicznym wielokącie foremnym przyjmuje wszystkie wartości dodatnie.

W dowodzie Stwierdzenia 1.3.5 pokazaliśmy, że w n -kątowniku foremnym wartości wyrażenia $\alpha_n = 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)}$ maleją wraz ze wzrostem wartości x , co więcej $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha_n = \frac{\pi(n-2)}{n}$, oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Analogiczne własności dotyczą wyrażenia α_m . Stąd wnioskujemy, że wyrażenie $\alpha_n + \alpha_m = 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)} + 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/m)}{\cosh(x/2)}$ również będzie malało wraz ze wzrostem x . Zwróćmy też uwagę na poniższe granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\alpha_n + \alpha_m) = \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_n + \lim_{x \rightarrow 0} \alpha_m = \frac{\pi(n-2)}{n} + \frac{\pi(m-2)}{m},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\alpha_n + \alpha_m) = \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_n + \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha_m = 0.$$

Wyrażenie $\alpha_n + \alpha_m$ jest sumą funkcji ciągłych, stąd samo też jest funkcją ciągłą, zależną od x . Zatem uwzględniając powyższe granice, $\alpha_n + \alpha_m$ przyjmuje wszystkie wartości z zakresu $(0, \frac{\pi(n-2)}{n} + \frac{\pi(m-2)}{m})$ **c.k.d.**

Przykłady hiperbolicznych szachownic archimedesowskich przedstawiliśmy już na początku tego rozdziału (Rysunek 3.0.1). Warto jeszcze wspomnieć o artyście, który w swojej twórczości prezentuje barwne parkietaże hiperboliczne. Jest nim holenderski malarz i grafik Maurits Cornelis Escher. Na kolejnej stronie prezentujemy jedno

z jego dzieł (*Circle Limit III*), które możemy utożsamiać z hiperboliczną szachownicą archimedesowską (3,4,3), przedstawioną w modelu dyskowym Poincarego (Rysunek 3.2.1).



Rysunek 3.2.1.

3.3. Długość boku w hiperbolicznej szachownicy archimedesowskiej

Wyznaczyliśmy już wszystkie hiperboliczne szachownice archimedesowskie. Teraz skupimy się na wyznaczeniu długości boku w wielokątach tworzących takie parkietaże.

Wpierw zwróćmy tylko uwagę, że w szachownicach euklidesowych (Podrozdział 3.1) długość boku nie jest niczym uwarunkowana i może przyjąć dowolną wartość dodatnią. Pojawia się pytanie, jak będzie w geometrii hiperbolicznej.

W przeciwieństwie do geometrii euklidesowej, długość boku w wielokątach foremnych tworzących szachownicę, jest zależna od miary odpowiadających im kątów wewnętrznych (patrz wzór 1.3.6). Określając długość boku w hiperbolicznej szachownicy archimedesowskiej należy uwzględnić miary tych kątów.

Długość boku w hiperbolicznej szachownicy archimedesowskiej oznaczmy przez y .

Twierdzenie 3.3.1. *Długość boku wielokątów foremnych tworzących hiperboliczną szachownicę archimedesowską (n, m, s) wyraża wzór:*

$$(3.3.2) \quad y = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\sqrt{2 \cos(\pi/n) \cos(\pi/m) \cos(\pi/s) + \cos^2(\pi/n) + \cos^2(\pi/m)}}{\sin(\pi/s)}.$$

Dowód: Zgodnie ze Spostrzeżeniem 3.2.4, w hiperbolicznej szachownicy wszystkie długości boków są równe. Pozostaje określić tę długość. Będzie ona oczywiście zależna od wartości parametrów n , m i s odpowiedniej szachownicy.

Zacznijmy od przekształcenia równania 3.2.1, otrzymamy wtedy:

$$(3.3.3) \quad \alpha_n + \alpha_m = \frac{2\pi}{s},$$

gdzie α_n i α_m to odpowiednie kąty wewnętrzne w n - i m -kątach foremnych tworzących hiperboliczną szachownicę. Przypomnijmy, że wcześniej otrzymaliśmy już zależność miary kąta wewnętrznego od długości boku w dowolnym wielokącie foremnym (wzór 1.3.3).

Według naszych oznaczeń mamy wtedy: $\alpha_n = 2\arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(y/2)}$ i $\alpha_m = 2\arcsin \frac{\cos(\pi/m)}{\cosh(y/2)}$.

Podstawiając to do równania 3.3.3, skracając przy okazji dwójki dostajemy:

$$(3.3.4) \quad \arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(y/2)} + \arcsin \frac{\cos(\pi/m)}{\cosh(y/2)} = \frac{\pi}{s}.$$

Będzie to dla nas wyjściowe równanie, z którego wyznaczymy y . Najpierw powiemy jednak jak dodać dwie wartości funkcji arcus sinus. Zgodnie ze wzorami z Tablic ([4], str. 77) mamy:

$$(3.3.5) \quad \arcsin a + \arcsin b = \begin{cases} \arcsin(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}) & \text{dla } a \cdot b \leq 0 \text{ lub } a^2 + b^2 \leq 1 \\ \pi - \arcsin(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}) & \text{dla } a > 0, b > 0 \text{ i } a^2 + b^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}) & \text{dla } a < 0, b < 0 \text{ i } a^2 + b^2 > 1. \end{cases}$$

Zauważmy najpierw, że w naszej sytuacji ostatni wariant powyższego wzoru nigdy nie będzie potrzebny, gdyż $\frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(y/2)} > 0$, jak i $\frac{\cos(\pi/m)}{\cosh(y/2)} > 0$. Rozważmy dwa pozostałe warianty.

Wykorzystując pierwszy z nich przekształcimy równanie 3.3.4 do postaci:

$$\frac{\pi}{s} = \arcsin \left(\frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(y/2)} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos(\pi/m)}{\cosh(y/2)} \right)^2} + \frac{\cos(\pi/m)}{\cosh(y/2)} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(y/2)} \right)^2} \right).$$

Nakładając funkcję sinus na obie strony równania mamy

$$(3.3.6) \quad \sin \frac{\pi}{s} = \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(y/2)} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos(\pi/m)}{\cosh(y/2)} \right)^2} + \frac{\cos(\pi/m)}{\cosh(y/2)} \sqrt{1 - \left(\frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(y/2)} \right)^2}.$$

Podobnie w drugim przypadku otrzymamy $\frac{\pi}{s} = \pi - \arcsin(\dots)$, następnie $\pi - \frac{\pi}{s} = \arcsin(\dots)$, pomijamy przy tym oczywistą postać wyrażenia w argumentie funkcji arcus sinus (patrz równanie poprzedzające wzór 3.3.6). Zaś nakładając funkcję sinus na obie strony równania i stosując wzory redukcyjne dochodzimy do tego samego wzoru (3.3.6). Poprzez kolejne przekształcenia wyznaczymy z tego wzoru długość boku y , w zależności od parametrów n , m i s . Otrzymujemy kolejne równania równoważne.

$$\sin \frac{\pi}{s} = \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(y/2)} \sqrt{\frac{\cosh^2(y/2) - \cos^2(\pi/m)}{\cosh^2(y/2)}} + \frac{\cos(\pi/m)}{\cosh(y/2)} \sqrt{\frac{\cosh^2(y/2) - \cos^2(\pi/n)}{\cosh^2(y/2)}} \quad / \cdot \cosh^2 \frac{y}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{s} \cosh^2 \frac{y}{2} = \cos \frac{\pi}{n} \sqrt{\cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{m}} + \cos \frac{\pi}{m} \sqrt{\cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{n}} \quad / \dots^2$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{\pi}{s} \cosh^4 \frac{y}{2} &= \cos^2 \frac{\pi}{n} \cosh^2 \frac{y}{2} - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{m} + \\ &+ 2 \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{m} \sqrt{\left(\cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{m}\right)\left(\cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{n}\right)} + \cos^2 \frac{\pi}{m} \cosh^2 \frac{y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh^2 \frac{y}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{s} \cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m} \right) + 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{m} &= \\ = 2 \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{m} \sqrt{\left(\cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{m}\right)\left(\cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{n}\right)} \quad / \dots^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cosh^4 \frac{y}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{s} \cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m} \right)^2 + \\ + 4 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{m} \cosh^2 \frac{y}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{s} \cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m} \right) + 4 \cos^4 \frac{\pi}{n} \cos^4 \frac{\pi}{m} &= \\ = 4 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{m} \left(\cosh^4 \frac{y}{2} - \cosh^2 \frac{y}{2} \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cosh^2 \frac{y}{2} \cos^2 \frac{\pi}{m} + \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{m} \right). \end{aligned}$$

Wymnażając poszczególne wyrażenia w nawiasach (oprócz pierwszego) i redukując wyrazy podobne dochodzimy do kolejnych równań:

$$\begin{aligned} \cosh^4 \frac{y}{2} \left(\sin^2 \frac{\pi}{s} \cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m} \right)^2 + 4 \cosh^4 \frac{y}{2} \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{\pi}{s} &= \\ = 4 \cosh^4 \frac{y}{2} \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{m} \quad /: \cosh^4 \frac{y}{2} \end{aligned}$$

$$\left(\sin^2 \frac{\pi}{s} \cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m} \right)^2 = 4 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{m} - 4 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{\pi}{s}$$

$$\left(\sin^2 \frac{\pi}{s} \cosh^2 \frac{y}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m} \right)^2 = 4 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{m} \left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{s} \right)$$

$$(3.3.7) \quad \left(\cosh^2 \frac{y}{2} \sin^2 \frac{\pi}{s} - \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m} \right)^2 = \left(2 \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{m} \cos \frac{\pi}{s} \right)^2.$$

Przed dalszymi przekształceniami, zastanowimy się nad znakiem dla wartości wyrażenia

$$(3.3.8) \quad \cosh^2 \frac{y}{2} \sin^2 \frac{\pi}{s} - \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m}.$$

Lemat pomocniczy. Wartość wyrażenia $\cosh^2 \frac{y}{2} \sin^2 \frac{\pi}{s} - \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m}$ jest nieujemna.

Dowód: Przypomnijmy wzór 1.3.3, zgodnie z którym miara kąta wewnętrznego α

w hiperbolicznym wielokącie foremnym o długości boku x wynosi $\alpha = 2 \arcsin \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)}$.

Dzieląc przez dwa i nakładając funkcję sinus na obie strony równania, otrzymujemy że $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos(\pi/n)}{\cosh(x/2)}$, stąd $\cosh \frac{x}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\pi}{n}$. Uwzględniając oznaczenia przyjęte dla wielokątów foremnych tworzących hiperboliczną szachownicę otrzymujemy układy równań:

$$\begin{cases} \cosh \frac{y}{2} \sin \frac{\alpha_n}{2} = \cos \frac{\pi}{n} / \dots^2 \\ \cosh \frac{y}{2} \sin \frac{\alpha_m}{2} = \cos \frac{\pi}{m} / \dots^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cosh^2 \frac{y}{2} \sin^2 \frac{\alpha_n}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{n} \\ \cosh^2 \frac{y}{2} \sin^2 \frac{\alpha_m}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{m} \end{cases}$$

Dodając te równania otrzymamy $\cosh^2 \frac{y}{2} \sin^2 \frac{\alpha_n}{2} + \cosh^2 \frac{y}{2} \sin^2 \frac{\alpha_m}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{\pi}{m}$, stąd

$$(3.3.9) \quad \cosh^2 \frac{y}{2} (\sin^2 \frac{\alpha_n}{2} + \sin^2 \frac{\alpha_m}{2}) - \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m} = 0.$$

W szczególności zwróćmy uwagę na analogię między tą równością, a wzorem 3.3.8. Zastępując $\sin^2 \frac{\pi}{s}$ we wzorze 3.3.8, wyrażeniem $\sin^2 \frac{\alpha_n}{2} + \sin^2 \frac{\alpha_m}{2}$, otrzymujemy, że wartość wyrażenia ze wzoru 3.3.8 jest równa 0. Na tej podstawie poczyńmy pewne spostrzeżenie.

Spostrzeżenie pomocnicze. Wykazanie nierówności $\cosh^2 \frac{y}{2} \sin^2 \frac{\pi}{s} - \cos^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m} \geq 0$ sprowadza się do uzasadnienia, że

$$(3.3.10) \quad \sin^2 \frac{\alpha_n}{2} + \sin^2 \frac{\alpha_m}{2} \leq \sin^2 \frac{\pi}{s}.$$

Zanim udowodnimy powyższą nierówność przypomnijmy wzór 3.3.3: $\alpha_n + \alpha_m = \frac{2\pi}{s}$, stąd po przekształceniu otrzymujemy $\frac{\alpha_n}{2} + \frac{\alpha_m}{2} = \frac{\pi}{s}$. Nie zmniejszając ogólności możemy przyjąć, że $\frac{\alpha_n}{2} = \frac{\pi}{2s} + \epsilon$ oraz $\frac{\alpha_m}{2} = \frac{\pi}{2s} - \epsilon$, dla $\epsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2s}\right)$. Stąd udowadniamy nierówność

$$(3.3.11) \quad \sin^2 \left(\frac{\pi}{2s} + \epsilon \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2s} - \epsilon \right) \leq \sin^2 \frac{\pi}{s}.$$

Ze wzorów trygonometrycznych ([4] str. 75) wiemy, że $\sin^2 \beta = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\beta))$. Wykorzystując ten wzór w nierówności 3.3.11, dostajemy kolejne nierówności równoważne:

$$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{s} + 2\epsilon \right) \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{s} - 2\epsilon \right) \right) \leq \sin^2 \frac{\pi}{s} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{s}$$

$$1 - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{s} + 2\epsilon \right) - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{s} - 2\epsilon \right) \leq 1 - \cos^2 \frac{\pi}{s}$$

$$\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{s} + 2\epsilon \right) + \cos \left(\frac{\pi}{s} - 2\epsilon \right) \right) \geq \cos^2 \frac{\pi}{s}.$$

Wykorzystując związek $\cos(\beta \pm \gamma) = \cos\beta\cos\gamma \mp \sin\beta\sin\gamma$ (patrz [4], str. 75), otrzymujemy poniższe nierówności równoważne:

$$\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{s}\cos(2\epsilon) - \sin\frac{\pi}{s}\sin(2\epsilon) + \cos\frac{\pi}{s}\cos(2\epsilon) + \sin\frac{\pi}{s}\sin(2\epsilon)) \geq \cos^2\frac{\pi}{s}$$

$$\cos\frac{\pi}{s}\cos(2\epsilon) \geq \cos^2\frac{\pi}{s}$$

$$(3.3.12) \quad \cos(2\epsilon) \geq \cos\frac{\pi}{s}$$

Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami $\epsilon \in \left(0, \frac{\pi}{2s}\right)$, czyli $2\epsilon \in \left(0, \frac{\pi}{s}\right)$, gdzie $s \geq 2$. Uwzględniając fakt, że funkcja kosinus jest malejąca w przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, wnioskujemy że nierówność 3.3.12 jest prawdziwa. Zatem nierówności z nią równoważne również są prawdziwe. W szczególności nierówność 3.3.10: $\sin^2\frac{\alpha_n}{2} + \sin^2\frac{\alpha_m}{2} \leq \sin^2\frac{\pi}{s}$. Zgodnie ze spostrzeżeniem pomocniczym uzasadnia ona tezę postawioną w lemacie pomocniczym, co kończy dowód tegoż lematu.

Kontynuując właściwy dowód Twierdzenia 3.3.1 przypomnijmy ostatnio otrzymaną równość 3.3.7: $\left(\cosh^2\frac{y}{2}\sin^2\frac{\pi}{s} - \cos^2\frac{\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{m}\right)^2 = \left(2\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{s}\right)^2$. Z lematu pomocniczego wiemy już, że $\cosh^2\frac{y}{2}\sin^2\frac{\pi}{s} - \cos^2\frac{\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{m} \geq 0$. Stosunkowo łatwo jest również zauważyć, że $2\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{s} > 0$. Pierwiastkując obie strony równania 3.3.7 otrzymamy zatem równość: $\cosh^2\frac{y}{2}\sin^2\frac{\pi}{s} - \cos^2\frac{\pi}{n} - \cos^2\frac{\pi}{m} = 2\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{s}$, stąd

$$\cosh^2\frac{y}{2} = \frac{2\cos(\pi/n)\cos(\pi/m)\cos(\pi/s) + \cos^2(\pi/n) + \cos^2(\pi/m)}{\sin^2(\pi/s)},$$

zatem ostatecznie

$$y = 2\operatorname{arccosh}\frac{\sqrt{2\cos(\pi/n)\cos(\pi/m)\cos(\pi/s) + \cos^2(\pi/n) + \cos^2(\pi/m)}}{\sin(\pi/s)} \quad \text{c. n. d.}$$

Wniosek 3.3.13. *Długość boku w konkretnej hiperbolicznej szachownicy archimedesowskiej przyjmuje tylko jedną, ustaloną wartość.*

Na koniec zwróćmy uwagę na jeszcze jeden sposób częściowego potwierdzenia poprawności Twierdzenia 3.3.1. Rozpatrzmy najprostsze szachownice archimedesowskie, zbudowane z jednego rodzaju wielokątów. Są one postaci (n, n, s) . Faktycznie są to jednak parkietaże platońskie postaci $(n, k = 2s)$ (patrz Spostrzeżenie 3.0.4). W Twierdzeniu 2.3.1 określiliśmy już hiperboliczną długość boku $x_{(n,k)}$ w parkietażach platońskich.

Przypomnijmy, że zgodnie z tym wzorem mamy $x_{(n,k)} = 2\operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/k)}$. Możemy teraz sprawdzić, czy długość boku w szachownicy (n, n, s) wyliczona z otrzymanego wzoru 3.3.2 jest równa długości boku w parkietaż platońskim $(n, k = 2s)$, którą obliczamy według wspomnianego wzoru z Twierdzenia 2.3.1. Obie te wielkości są opisane za pomocą funkcji arcus kosinus hiperboliczny. Wiemy, że jest to funkcja różnowartościowa, zatem porównując powyższe długości wystarczy porównać argumenty tej funkcji. Dla szachownicy będzie to wyrażenie $\frac{\sqrt{2\cos(\pi/n)\cos(\pi/m)\cos(\pi/s)+\cos^2(\pi/n)+\cos^2(\pi/m)}}{\sin(\pi/s)}$. Przyjmujemy teraz, że $m = n$, to:

$$\frac{\sqrt{2\cos^2(\pi/n)\cos(\pi/s)+2\cos^2(\pi/n)}}{\sin(\pi/s)} = \cos \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sqrt{2(\cos(\pi/s)+1)}}{\sin(\pi/s)} = \cos \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{4 \cdot \frac{1+\cos(\pi/s)}{2}} / \sin \frac{\pi}{s}.$$

Ze związków pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi ([4], str. 74), otrzymujemy następujące zależności: $\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} = \cos \frac{\beta}{2}$ dla $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, oraz $\sin(2\beta) = 2\sin\beta\cos\beta$, zatem:

$$\cos \frac{\pi}{n} \cdot \sqrt{4 \cdot \frac{1+\cos(\pi/s)}{2}} / \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{2s} \right) = \frac{2\cos(\pi/n)\cos(\pi/2s)}{2\sin(\pi/2s)\cos(\pi/2s)} = \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/2s)}.$$

Długość boku w parkietaż platońskim postaci $(n, 2s)$ wynosi $x_{(n,k)} = 2\operatorname{arccosh} \frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/2s)}$. Ostatecznie potwierdzamy wzór 3.3.2 w przypadku szachownic będących parkietażami platońskimi.

Bibliografia

- [1] R. Doman, *Wykłady z geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001.
- [2] A. Sznajder–Otfinowska, *Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej Skrypt do zajęć na specjalności nauczycielskiej*, Praca magisterska napisana pod kierunkiem prof. Jacka Świątkowskiego, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2005.
- [3] I. Przedzink, *Geometria Poincarego i Kleina. Skrypt do zajęć: Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej*, Praca magisterska napisana pod kierunkiem prof. Jacka Świątkowskiego, Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego, Wrocław 2010.
- [4] Praca zbiorowa pod redakcją Witolda Mizerskiego, *Tablice Matematyczne*, Wydawnictwo Adamantan, Warszawa 2002.