

UNIwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki

Lidia GNIADKOWSKA

WZÓR PICKA DLA FIGUR WIELOKĄTNYCH

Praca magisterska
Napisana pod kierunkiem

DOKTORA JACKA ŚWIĄTKOWSKIEGO

Wrocław 2000

SPIS TREŚCI

Wstęp	4
1. Wzór Picka dla prostych wielokątów.	5
1.1 Wielokąty o wierzchołkach kratowych	5
1.2 Uzasadnienie wzoru Picka dla prostokątów o wierzchołkach kratowych	7
1.3 Uzasadnienie wzoru Picka dla trójkątów prostokątnych o wierzchołkach kratowych	9
1.4 Addytywność funkcji Q	10
1.5 Uzasadnienie wzoru Picka dla dowolnego trójkąta o wierzchołkach	12
1.6 Uzasadnienie wzoru Picka dla dowolnego wielokąta prostego o wierzchołkach kratowych	14
2. Figury wielokątne o wierzchołkach kratowych i charakterystyka Eulera dla takich figur.	17
2.1 Figury wielokątne o wierzchołkach kratowych	17
2.2 Charakterystyka Eulera	20
2.3 Charakterystyka Eulera dla wielokąta prostego	21
2.4 Charakterystyka Eulera dla wielokąta z „porządnymi dziurami”	23
2.5 Charakterystyka Eulera dla wielokąta z „dziurami”, które nie są porządne	25
2.6 Charakterystyka Eulera brzegu figury wielokątnej	28
3. Jaką postać ma wzór Picka dla figur wielokątnych o wierzchołkach kratowych?	29
3.1 Wzór Picka dla wielokątów z „porządnymi dziurami”	29

3.2 Wzór Picka dla wielokątów z „dziurami”, posiadających punkty osobliwe_____	31
3.3 Punkty osobliwe i charakterystyka Eulera brzegu figury wielokątnej o wierzchołkach kratowych_____	36
4. Uzasadnienie wzoru Picka dla dowolnej figury wielokątnej o wierzchołkach kratowych._____	40
Literatura_____	44

Wstęp

Celem mojej pracy jest udowodnienie wzoru, za pomocą którego można obliczyć pole dowolnej figury wielokątnej, spełniającej jeden warunek: wszystkie jej wierzchołki muszą leżeć na przecięciu się prostych, które tworzą kratę na płaszczyźnie.

Wzór ten nazwany został wzorem Picka od nazwiska austriackiego matematyka, który odkrył go pod koniec zeszłego stulecia.

Pomysł został zaczerpnięty z książki J. A. Szaszki pt. *Charakterystyka Eulera*. W wielu pozycjach naukowych wzór Picka traktowany jest jako ciekawostka. Dlatego podaje się go w takiej postaci, aby można było policzyć pole najprostszych wielokątów. Uzasadnienie prawdziwości wzoru Picka dla takich wielokątów, nazwanych wielokątami prostymi, zaprezentowane jest w rozdziale pierwszym.

Rozdział drugi zawiera definicje figury wielokątnej oraz pewnych klas figur wielokątnych. Definicje te zostały stworzone dla potrzeb tej pracy. W tym samym rozdziale pojawia się pojęcie charakterystyki Eulera oraz wyliczane są wartości jakie ta charakterystyka przyjmuje dla różnych klas figur wielokątnych.

Rozważania z rozdziału pierwszego i drugiego będą wykorzystane z celu podania odpowiedzi na pytanie postawione w tytule rozdziału trzeciego: Jaką postać ma wzór Picka dla figur wielokątnych? Zatem rozdział trzeci to stopniowe dochodzenie do uogólnionej postaci wzoru Picka, prawdziwej dla dowolnej figury wielokątnej.

Ostatnia część pracy poświęcona jest uzasadnieniu wzoru Picka dla figur wielokątnych.

Sposób w jaki przedstawiłam temat tej pracy, wynika z mojego spojrzenia na całe zagadnienie wzoru Picka, które pojawiło się gdy po raz pierwszy spotkałam się z tym pojęciem i krystalizowało się w trakcie moich badań.

Oczywiście praca ma taki, a nie inny kształt dzięki uwagom pierwszego Czytelnika doktora Jacka Świątkowskiego, któremu chciałabym podziękować za rady, sugestie i życzliwą krytykę.

Rozdział 1.

Wzór Picka dla prostych wielokątów.

W rozdziale pierwszym wprowadzony jest, a następnie uzasadniony wzór Picka, pozwalający obliczyć pole wielokątów o wierzchołkach kratowych. Pole to wyraża się pewną funkcją Q zależną tylko od ilości punktów kratowych, znajdujących się wewnątrz wielokąta oraz na jego brzegu. Pod uwagę wzięte są najprostsze wielokąty. O figurach wielokątnych (na przykład wielokąt z „dziurą” lub wielokąt składający się z rozłącznych elementów) mowa będzie później.

Wzór Picka uzasadniony jest najpierw dla prostokątów o bokach równoległych do linii siatki (paragraf 1.2), następnie dla trójkątów (paragraf 1.5) oraz dla dowolnych wielokątów (paragraf 1.6).

W paragrafie 1.6 zostało wykorzystane twierdzenie o podziale dowolnego wielokąta na skończoną liczbę trójkątów oraz addytywność pola P i funkcji Q .

1.1 Wielokąty o wierzchołkach kratowych.

Niech na płaszczyźnie będą poprowadzone równoległe proste (linie) tak, że odległość między każdą parą sąsiednich prostych jest równa 1 oraz proste prostopadłe do danych, spełniające taki sam warunek. Takie proste tworzą siatkę i dzielą płaszczyznę na kwadraty o polu równym 1. Wierzchołki tych kwadratów będziemy nazywać punktami kratowymi.

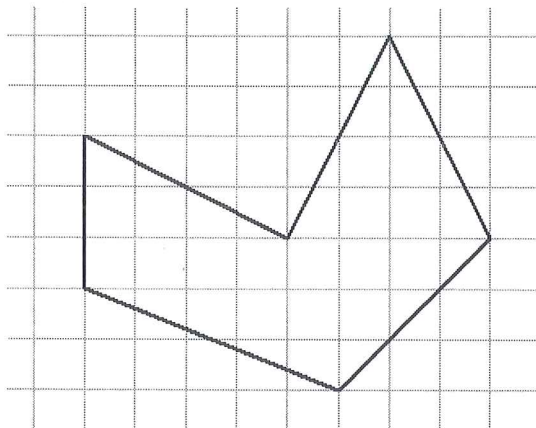
Wprowadźmy pojęcie linii łamanej. Łamaną nie zamkniętą nazywamy linię utworzoną z odcinków $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, które łączą kolejno punkty A_1, \dots, A_n . Jeśli $n \geq 3$ i $A_1 = A_n$, to wtedy otrzymujemy łamaną zamkniętą.

Część płaszczyzny ograniczona linią łamaną zamkniętą, której każde dwa nie przyległe odcinki nie mają punktów wspólnych nazywamy wielokątem prostym.

Jeśli łamana zamknięta utworzona jest z odcinków łączących kolejno punkty kratowe, to wtedy wielokąt prosty nazywamy wielokątem prostym o wierzchołkach kratowych.

W rozdziale pierwszym rozważać będziemy wielokąty proste, których wszystkie wierzchołki są punktami kratowymi.

Przykład wielokąta prostego o wierzchołkach kratowych przedstawia rysunek 1.



Rysunek 1.

Dla takiego wielokąta W rozpatrzmy wielkość:

$$Q(W) = w + \frac{1}{2}b - 1, \quad (1.1)$$

gdzie w jest liczbą punktów kratowych wewnątrz wielokąta W , b jest liczbą punktów kratowych leżących na jego brzegu.

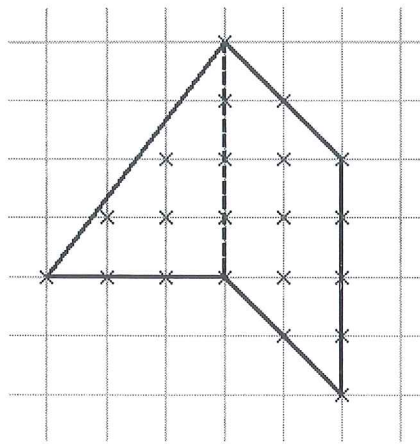
Okazuje się, że wielkość (1.1) jest równa polu $P(W)$ wielokąta W . Ściślej mówiąc dla dowolnego wielokąta W zachodzi wzór:

$$P(W) = w + \frac{1}{2}b - 1 \quad (1.2)$$

lub inaczej

$$P(W) = Q(W). \quad (1.3)$$

Na przykład dla wielokąta przedstawionego na rysunku 2,



Rysunek 2.

$w = 9$, $b = 12$, stąd otrzymujemy:

$$Q(W) = 9 + \frac{1}{2} \cdot 12 - 1 = 14.$$

Łatwo policzyć pole wielokąta W . Można zauważyć, że składa się on z trójkąta prostokątnego i równoległoboku. Zatem:

$$P(W) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 14.$$

Rzeczywiście pole wielokąta W wyraża się wzorem (1.2).

Równanie (1.2) otrzymał w roku 1899 austriacki matematyk Georg Pick.¹

W kolejnych paragrafach tego rozdziału uzasadnimy prawdziwość wzoru Picka, poczynając od prostokątów i trójkątów, a kończąc na dowolnych wielokątach prostych.

1.2 Uzasadnienie wzoru Picka dla prostokątów o wierzchołkach kratowych.

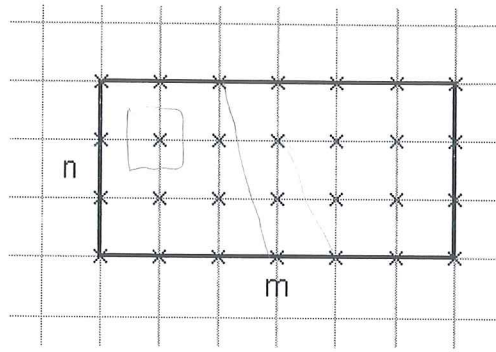
Rozpatrzmy prostokąt W o bokach równoległych do linii siatki.

Taki prostokąt wypełniają kwadraty jednostkowe (mające pole równe 1).

Pole takiego prostokąta to ilość kwadratów jednostkowych, które są w nim zawarte. Uzasadnimy, że dla prostokąta W zachodzi równość (1.3).

Oznaczmy długości boków prostokąta przez m i n jak na rysunku 3.

¹ J. A. Szaszkin, *Charakterystyka Eulera*, Nauka, Moskwa 1984, s. 35.



Rysunek 3.

Chcemy obliczyć ilość punktów kratowych na brzegu i wewnątrz prostokąta W , wykorzystując długości boków prostokąta m i n .

Bok prostokąta W o długości m zawiera $m+1$ punktów kratowych (w tym punkty kratowe odpowiadające dwóm wierzchołkom prostokąta), a bok o długości n zawiera $n+1$ takich punktów kratowych. Skoro prostokąt W posiada dwie pary boków o długościach m i n , więc jego boki zawierają $2(m+1)+2(n+1)$ punktów kratowych, w tym punkty kratowe odpowiadające czterem wierzchołkom, które zostały policzone dwa razy. W rezultacie ilość punktów kratowych na brzegu prostokąta W wynosi:

$$b = 2(m+1) + 2(n+1) - 4 = 2m + 2n. \quad (1.4)$$

Aby obliczyć ilość punktów kratowych wewnątrz prostokąta W zauważmy, że tworzą one $n-1$ rzędów po $m-1$ punktów kratowych w każdym rzędzie. Zatem ich ilość wynosi:

$$w = (m-1)(n-1). \quad (1.5)$$

Sprawdźmy czy zachodzi równość (1.3).

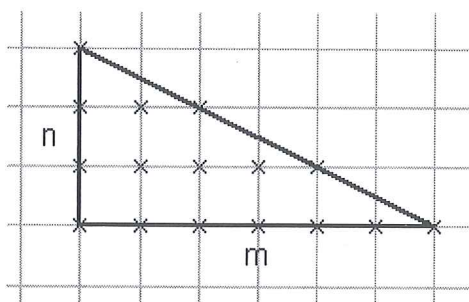
Wykorzystując zależności (1.4) i (1.5), otrzymujemy:

$$Q(W) = w + \frac{1}{2}b - 1 = (m-1)(n-1) + \frac{1}{2}(2m+2n) - 1 = m \cdot n = P(W).$$

c.n.d.

1.3 Uzasadnienie wzoru Picka dla trójkątów prostokątnych o wierzchołkach kratowych.

Równość (1.3) zachodzi również dla wszystkich trójkątów powstałych z podziału przekątną prostokątów o bokach równoległych do linii siatki. Oznaczmy długości przyprostokątnych trójkąta T przez m i n , tak jak na rysunku 4.



Rysunek 4.

Niech p oznacza ilość punktów kratowych znajdujących się na przeciwprostokątnej trójkąta T , ale bez punktów odpowiadających dwóm wierzchołkom trójkąta T .

Chcemy obliczyć ilość punktów kratowych brzegowych i wewnętrznych w trójkącie T . Wykorzystamy w tym celu wielkości m , n , p .

Punkty kratowe brzegowe znajdują się na przyprostokątnych o długościach m i n oraz na przeciwprostokątnej trójkąta T . Zatem jest ich $m+1+n+1+p$, w tym jeden punkt kratowy odpowiadający wierzchołkowi trójkąta T , policzony podwójnie.

Reasumując, otrzymujemy ilość punktów kratowych na brzegu trójkąta T wynoszącą:

$$b = m + n + 1 + p. \quad (1.6)$$

Policzmy teraz ilość punktów kratowych wewnątrz trójkąta T . Jeśli trójkąt T dopełnimy do prostokąta W , to przekątna prostokąta W będzie przeciwprostokątną trójkąta T . Biorąc pod uwagę (1.5), ilość punktów kratowych wewnątrz prostokąta W , z wyjątkiem punktów kratowych znajdujących się na jego przekątnej, wynosi: $(m-1)(n-1) - p$.

Ponieważ trójkąt T jest połową prostokąta W , dlatego ilość punktów kratowych wewnątrz trójkąta T wynosi:

$$w = \frac{1}{2}((m-1)(n-1) - p). \quad (1.7)$$

Wykorzystując zależności (1.6) i (1.7), otrzymujemy:

$$Q(T) = w + \frac{1}{2}b - 1 = \frac{1}{2}((m-1)(n-1) - p) + \frac{1}{2}(m+n+1+p) - 1 = \frac{1}{2}m \cdot n = P(T).$$

c.n.d.

1.4 Addytywność funkcji Q .

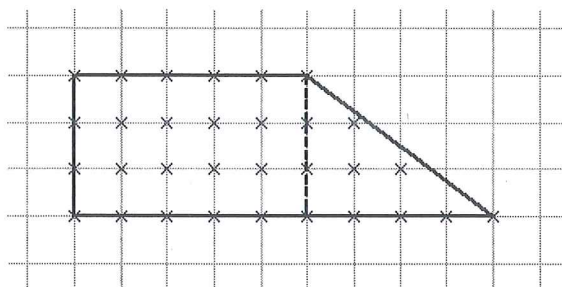
Przyporządkujmy każdemu wielokątowi o wierzchołkach kratowych W liczbę rzeczywistą $G(W)$. Addytywnością funkcji G nazywamy własność polegającą na tym, że przy dowolnym podziale wielokąta prostego W na nie zachodzące na siebie wielokąty proste W_1 i W_2 również o wierzchołkach kratowych (tzn. $W = W_1 \cup W_2$), zachodzi równość:

$$G(W) = G(W_1 \cup W_2) = G(W_1) + G(W_2).$$

Pole obszaru ograniczonego P jest oczywiście funkcją addytywną.

Podobnie funkcja Q , zdefiniowana jako zależność (1.1), również jest funkcją addytywną. Uzasadnimy ten fakt.

Rozpatrzmy przykład, w którym wielokąt W składa się z prostokąta P i trójkąta prostokątnego T mających jeden bok wspólny jak na rysunku 5, to znaczy $W = P \cup T$.



Rysunek 5.

Sprawdźmy czy:

$$Q(P \cup T) = Q(P) + Q(T). \quad (1.8)$$

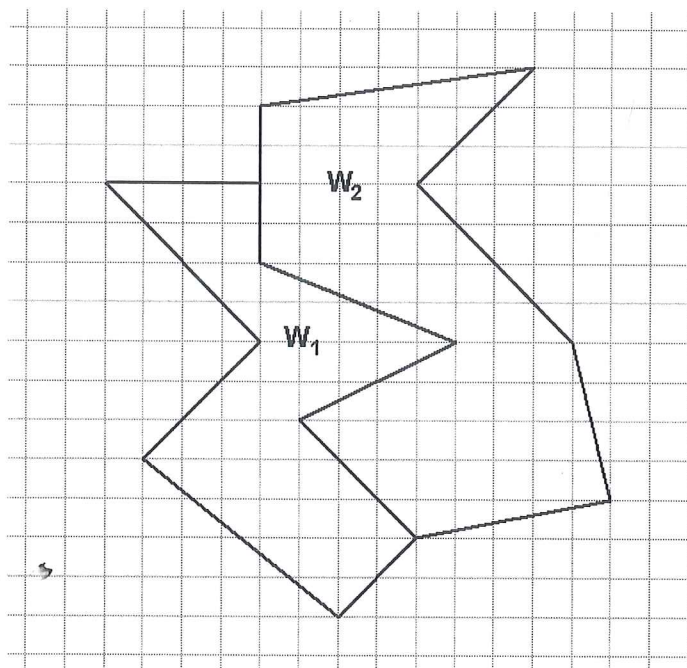
Rzeczywiście, zliczając punkty kratowe wewnętrzne i brzegowe wielokąta W otrzymujemy, że $Q(P \cup T) = 13 + \frac{1}{2} \cdot 18 - 1 = 21$. Z drugiej strony

$Q(P) = 8 + \frac{1}{2} \cdot 16 - 1 = 15$ oraz $Q(T) = 3 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 6$, a więc równość (1.8) jest spełniona.

Ogólnie sprawdzimy czy zachodzi równość:

$$Q(W_1 \cup W_2) = Q(W_1) + Q(W_2), \quad (1.9)$$

gdzie W_1 , W_2 , $W_1 \cup W_2$ są wielokątami prostymi, przy czym W_1 , W_2 nie zachodzą na siebie, a ich częścią wspólną jest łamana nie zamknięta L zdefiniowana w paragrafie 1.1. Opisane wielokąty proste przedstawia rysunek 6.



Rysunek 6.

Niech

$$Q(W_1 \cup W_2) = w + \frac{1}{2}b - 1,$$

gdzie w i b oznaczają ilości punktów kratowych wewnętrznych i brzegowych sumy wielokątów $W_1 \cup W_2$.

Oraz

$$Q(W_1) = w_1 + \frac{1}{2}b_1 - 1,$$

$$Q(W_2) = w_2 + \frac{1}{2}b_2 - 1,$$

gdzie w_1 i w_2 oznaczają ilości wewnętrznych punktów kratowych, b_1 i b_2 ilości brzegowych punktów kratowych odpowiednio wielokątów W_1 i W_2 .

Oznaczmy przez q ilość punktów kratowych znajdujących się wewnątrz wspólnej łamanej nie zamkniętej L , która jest częścią wspólną wielokątów prostych W_1 i W_2 (bez punktów kratowych znajdujących się na końcach łamanej L). Obliczmy ilość punktów kratowych wewnętrznych i brzegowych oznaczoną odpowiednio przez w i b , wykorzystując wielkości w_1 , w_2 , b_1 , b_2 oraz q .

Wewnętrzne punkty kratowe sumy $W_1 \cup W_2$ odpowiadają wewnętrznym punktom kratowym wielokątów prostych W_1 i W_2 oraz punktom kratowym znajdującym się wewnątrz łamanej nie zamkniętej L . Zatem ich ilość wynosi:

$$w = w_1 + w_2 + q. \quad (1.10)$$

Podobnie brzegowym punktom kratowym sumy $W_1 \cup W_2$ odpowiadają brzegowe punkty kratowe wielokąta W_1 oraz wielokąta W_2 . W jednym i drugim przypadku musimy odjąć punkty kratowe znajdujące się na tym fragmencie brzegu, który odpowiada łamanej nie zamkniętej L . Dlatego jest ich: $b_1 - q + b_2 - q$, w tym dwa punkty kratowe znajdujące się na końcach łamanej nie zamkniętej L , policzone podwójnie. W rezultacie ilość brzegowych punktów kratowych sumy $W_1 \cup W_2$ wynosi:

$$b = b_1 + b_2 - q - q - 2. \quad (1.11)$$

Wykorzystując (1.10) i (1.11), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} Q(W_1 \cup W_2) &= w + \frac{1}{2}b - 1 = w_1 + w_2 + q + \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - q - q - 2) - 1 = \\ &= w_1 + \frac{1}{2}b_1 - 1 + w_2 + \frac{1}{2}b_2 - 1 = Q(W_1) + Q(W_2). \end{aligned}$$

c.n.d.

1.5 Uzasadnienie wzoru Picka dla dowolnego trójkąta o wierzchołkach kratowych.

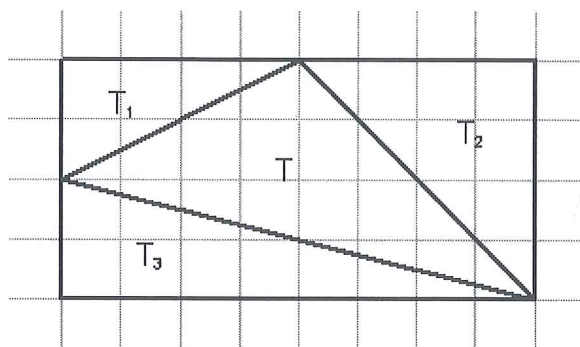
Aby wykazać równość funkcji Q i pola P dla dowolnego trójkąta T wykorzystam następujące fakty:

a) każdy trójkąt można dopełnić do prostokąta,

b) $Q(W) = P(W)$, dla prostokąta W o bokach równoległych do linii siatki oraz dla trójkąta, który powstał przez podział przekątną takiego prostokąta,

c) addytywność funkcji Q i pola P .

Rozpatrzmy dowolny trójkąt T mający wierzchołki w punktach kratowych. Dopełnijmy trójkąt T do prostokąta W o bokach równoległych do linii siatki w sposób przedstawiony na rysunku 7.



Rysunek 7.

Niech wielokąt prosty W_1 składa się z trójkąta T oraz trójkąta T_1 , tzn. $W_1 = T \cup T_1$ (sytuacja przedstawiona jest na rysunku 7).

Na mocy (1.9) zachodzi równość:

$$Q(W_1) = Q(T \cup T_1) = Q(T) + Q(T_1). \quad (i)$$

Następnie do wielokąta prostego W_1 dołączmy trójkąt T_2 (tak jak na rysunku 7). W ten sposób otrzymamy wielokąt prosty W_2 taki, że $W_2 = W_1 \cup T_2 = T \cup T_1 \cup T_2$.

Ponownie korzystając z równania (1.9) oraz (i), otrzymujemy:

$$Q(W_2) = Q(W_1 \cup T_2) = Q(W_1) + Q(T_2) = Q(T) + Q(T_1) + Q(T_2). \quad (ii)$$

W następnym kroku dołączmy do wielokąta prostego W_2 , trójkąt prostokątny T_3 o bokach równoległych do linii siatki, przedstawiony na rysunku 7, tzn. $W = W_2 \cup T_3 = W_1 \cup T_2 \cup T_3 = T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$.

Wykorzystując równość (1.9) oraz (ii), otrzymujemy:

$$Q(W) = Q(W_2 \cup T_3) = Q(W_2) + Q(T_3) = Q(T) + Q(T_1) + Q(T_2) + Q(T_3). \quad (1.12)$$

Skoro pole P jest addytywne, to zachodzi również równość:

$$P(W) = P(T \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3) = P(T) + P(T_1) + P(T_2) + P(T_3). \quad (1.13)$$

Ponieważ $Q(W) = P(W)$, bo W jest prostokątem o bokach równoległych do linii siatki, zatem (1.12) i (1.13) można zapisać w postaci równości:

$$Q(T) + Q(T_1) + Q(T_2) + Q(T_3) = P(T) + P(T_1) + P(T_2) + P(T_3).$$

Wobec faktu:

$$Q(T_i) = P(T_i), \quad (1.14)$$

gdzie $i \in \{1, 2, 3\}$ dla trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych równoległych do linii siatki, otrzymujemy:

$$Q(T) = P(T), \quad (1.15)$$

dla dowolnego trójkąta T o wierzchołkach kratowych.

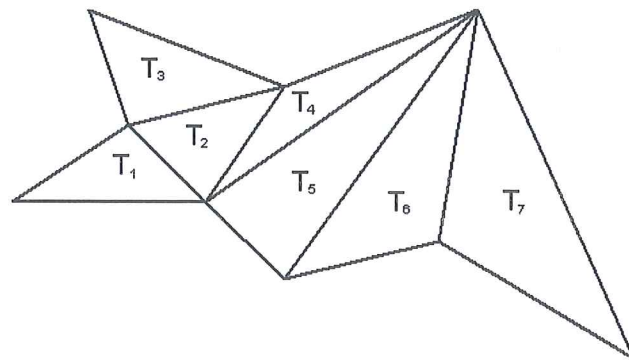
1.6 Uzasadnienie wzoru Picka dla dowolnego wielokąta prostego o wierzchołkach kratowych.

Uzasadnienie równości $Q(W) = P(W)$, dla dowolnego wielokąta prostego W o wierzchołkach kratowych wymaga zastosowania twierdzenia, które mówi, że:

Każdy wielokąt W można podzielić na skończoną liczbę nie zachodzących na siebie trójkątów, oznaczonych: T_1, \dots, T_n , gdzie $n \in \mathbb{N}$. Podziału można dokonać w taki sposób, że kolejne sumy: $T_1 \cup \dots \cup T_k$ dla każdego $k \in \{2, \dots, n\}$, są wielokątami prostymi oraz wielokąty proste: $T_1 \cup \dots \cup T_k$ i T_{k+1} dla każdego $k \in \{1, \dots, n-1\}$, mają część wspólną, będącą łamaną nie zamkniętą.

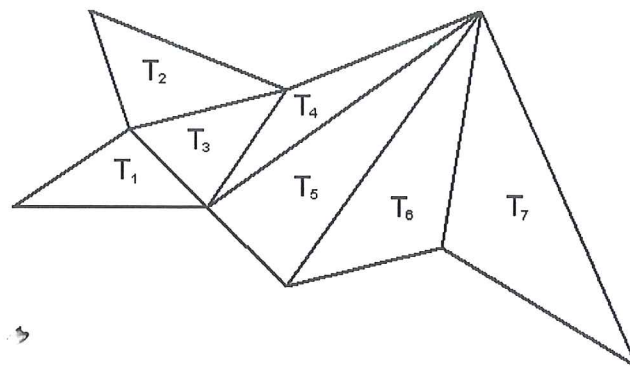
Ponadto jeśli W jest wielokątem o wierzchołkach kratowych, to podziału (sposób podziału opisany jest wyżej) można dokonać tak, żeby wszystkie trójkąty T_i dla $i \in \{1, \dots, n\}$, miały wierzchołki w punktach kratowych.

Na przykład rysunek 8 przedstawia wielokąt prosty podzielony na kilka trójkątów, które spełniają powyższe warunki.



Rysunek 8.

Natomiast ten sam wielokąt przedstawiony na rysunku 9,



Rysunek 9.

podzielony jest na takie trójkąty, że nie wszystkie kolejne sumy $T_1 \cup \dots \cup T_k$ dla $k \in \{2, \dots, 7\}$, są wielokątami prostymi, ponieważ w tym przypadku suma $T_1 \cup T_2$ nie jest wielokątem prostym.

Dowód powyższego twierdzenia pomijamy. Z pewnością w każdym konkretnym przypadku wielokąta, Czytelnik bez trudu znajdzie odpowiedni podział tego wielokąta na trójkąty.

Aby uzasadnić równość (1.3), rozpatrzmy dowolny wielokąt W o wierzchołkach kratowych.

Jeśli wielokąt W podzielimy na skończoną liczbę trójkątów również o wierzchołkach kratowych: $W = T_1 \cup \dots \cup T_n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ w sposób opisany wyżej, to prawdziwa jest równość:

$$Q(W) = Q(T_1 \cup \dots \cup T_n) = Q(T_1) + \dots + Q(T_n), \quad (1.16)$$

dzięki równaniu (1.9) oraz na mocy indukcji matematycznej.

Wykorzystując równość (1.14) dla $i = \{1, \dots, n\}$, równanie (1.16) można zapisać następująco:

$$Q(W) = P(T_1) + \dots + P(T_n). \quad (1.17)$$

Wykorzystując addytywność pola P , otrzymujemy:

$$Q(W) = P(W), \quad (1.18)$$

dla dowolnego wielokąta prostego W o wierzchołkach kratowych.

Rozdział 2.

Figury wielokątne o wierzchołkach kratowych i charakterystyka Eulera dla takich figur.

Rozdział drugi ma charakter opisowy. Chodzi o to by Czytelnik bez trudu mógł wyobrazić sobie zdefiniowane w nim pojęcie figury wielokątnej oraz pojęcie triangulacji figury wielokątnej.

W paragrafie 2.2 zdefiniowana jest wielkość nazwana charakterystyką Eulera, która opisuje własność figury wielokątnej niezależnie od sposobu podziału tej figury na nie zachodzące na siebie trójkąty (rozłączne albo mające wspólne wierzchołki lub boki).

Aby uściślić pojęcie charakterystyki Eulera, podajemy jakie wartości przyjmuje ta wielkość dla linii łamanych oraz dla różnych klas figur wielokątnych, między innymi dla wielokąta prostego, dla wielokąta z „porządnymi dziurami” oraz dla wielokąta z „dziurami”, które nie muszą być porządne.

Ostatnia część rozdziału drugiego poświęcona jest charakterystyce Eulera brzegu figury wielokątnej.

2.1 Figury wielokątne o wierzchołkach kratowych.

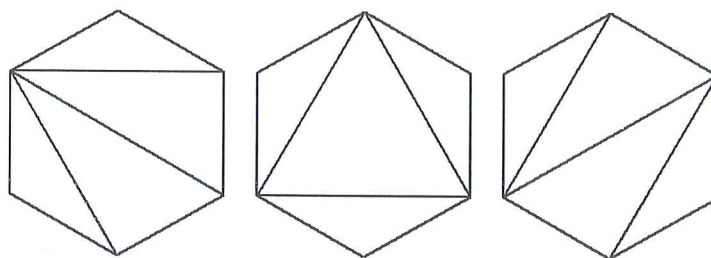
Zdefiniujmy pojęcie figury wielokątnej.

Figurą wielokątną nazywamy sumę skończonej ilości nie zachodzących na siebie trójkątów takich, że dowolne dwa trójkąty są albo rozłączne, albo ich częścią wspólną jest wspólny wierzchołek lub bok.

Na podstawie tej definicji można powiedzieć, że dowolna figura wielokątna podzielona jest na trójkąty spełniające powyższe warunki. Taki podział figury wielokątnej nazywamy „triangulacją” tej figury.²

Dana figura wielokątna może mieć różne triangulacje. Na przykład na rysunku 10 przedstawione są trzy różne triangulacje sześciokąta.

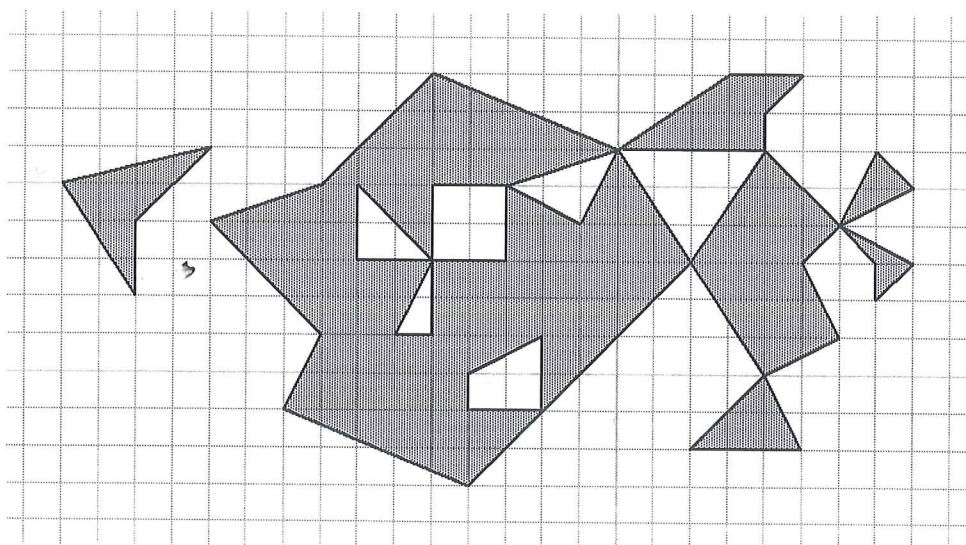
² R. Courant, H. Robins, *Co to jest matematyka?*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998, s. 236.



Rysunek 10.

Jeśli wszystkie trójkąty, z których składa się figura wielokątna są trójkątami o wierzchołkach kratowych, to tę figurę nazywamy figurą wielokątną o wierzchołkach kratowych.

Przykład figury wielokątnej o wierzchołkach kratowych przedstawiony jest na rysunku 11.



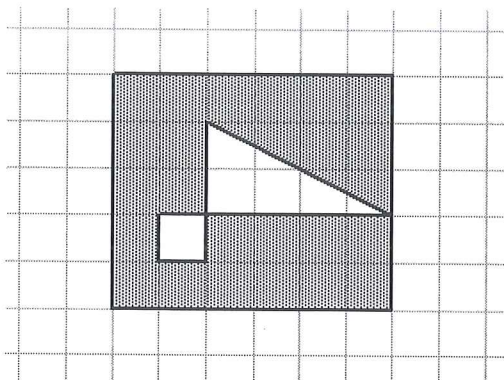
Rysunek 11.

Wielokąty proste również są przykładami figur wielokątnych w świetle twierdzenia z paragrafu 1.6.

Nawiązując do rozdziału pierwszego, celem dalszej pracy będzie uogólnienie wzoru Picka (tzn. wzoru (1.2)) na wszystkie figury wielokątne, ponieważ wzór (1.2) nie jest prawdziwy dla dowolnej figury wielokątnej.

Podajmy przykład.

Rozpatrzmy figurę wielokątną F , która jest przedstawiona na rysunku 12.



Rysunek 12.

Dla figury F $w=9$, $b=32$. Zatem podstawiając te wartości do (1.1), otrzymujemy, że:

$$Q(F) = 9 + \frac{1}{2} \cdot 32 - 1 = 9 + 16 - 1 = 24.$$

Z drugiej strony pole figury F obliczmy w taki sposób, że od wartości pola prostokąta o bokach 5 i 6 odejmiemy wartość pola trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 2 i 4 oraz wartość pola kwadratu o boku 1. W rezultacie:

$$P(F) = 5 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 25.$$

W przypadku figury F , równość (1.3) nie jest prawdziwa. Zatem wzór (1.2) również nie jest prawdziwy dla dowolnej figury wielokątnej o wierzchołkach kratowych (z wyjątkiem wielokątów prostych).

Uogólnimy wzór Picka, aby za jego pomocą obliczyć pole dowolnej figury wielokątnej o wierzchołkach kratowych. Niezbędne jednak będą pewne pojęcia, o których powiemy w następnych paragrafach rozdziału 2.

2.2 Charakterystyka Eulera.

Niech figura wielokątna F będzie podzielona na skończoną liczbę trójkątów o wierzchołkach kratowych, nie zachodzących na siebie takich, że dowolne dwa trójkąty są albo rozłączne albo ich częścią wspólną jest wspólny wierzchołek lub bok (tzn. figura F jest striangulowana). Trójkąty te nazywamy trójkątami podziału.

To znaczy, że figura F rozbita jest na części zdefiniowane jako:

1. wierzchołki triangulacji (punkty odpowiadające wierzchołkom trójkątów podziału),
2. krawędzie triangulacji (boki trójkątów podziału),
3. obszary ograniczone, tzn. trójkąty podziału.

Oznaczmy liczbę wierzchołków triangulacji, krawędzi triangulacji i trójkątów podziału odpowiednio przez W , K , S .

Rozpatrzmy wielkość:

$$\chi(F) = W - K + S. \quad (2.1)$$

Przytoczmy bardzo ważne twierdzenie, które mówi, że:

Niezależnie do sposobu podziału figury wielokątnej F na trójkąty, suma $W - K + S$ zachowuje stałą wartość.

Uzasadnienie tego twierdzenia oraz więcej informacji na zbliżony temat znaleźć można w książce pod tytułem: „*Szkoła Geometrii. Odczyty Kaliskie*” w rozdziale szóstym, zatytułowanym „*Wzór Eulera*”, który opracowała Danuta Sterna na podstawie odczytu Zbigniewa Marciniaka (WSiP, Warszawa 1993).

Wielkość (2.1) nazywa się charakterystyką Eulera figury wielokątnej F .

Zatem skoro charakterystyka Eulera figury F jest niezmienną względem sposobu podziału tej figury, to wyraża w ten sposób własność samej figury wielokątnej F .

Na samym początku jednak wyliczymy charakterystykę Eulera dla linii łamanych. Będzie ona zależała tylko od ilości wierzchołków i krawędzi, ponieważ w przypadku linii łamanych ilość obszarów ograniczonych S jest równa zero.

Charakterystyka Eulera dla łamanej nie zamkniętej L , zdefiniowanej w paragrafie 1.1, wynosi:

$$\chi(L) = W - K = 1. \quad (2.2)$$

Można wytłumaczyć to w ten sposób, że jeśli łamana nie zamknięta L ma W wierzchołków, to dzielą ją one na $W-1$ odcinków (krawędzi). Stąd $W - K = 1$.

Podobnie charakterystyka Eulera dla łamanej zamkniętej L wynosi:

$$\chi(L) = W - K = 0. \quad (2.3)$$

W tym przypadku jeśli łamana zamknięta L ma W wierzchołków, to te wierzchołki dzielą ją na taką samą ilość krawędzi. Dlatego $W - K = 0$.

Charakterystyka Eulera $\chi(L)$ nie zmieni się jeśli wstawimy dowolną liczbę m nowych wierzchołków wewnątrz dowolnej krawędzi, dzieląc ją przy tym na $m+1$ krawędzi lub odwrotnie jeśli zastąpimy jedną krawędzią kilka kolejnych krawędzi zawartych w jednej prostej. To świadczy o niezmienności $\chi(L)$ względem podziału łamanej.

Następnie obliczymy charakterystykę Eulera dla dowolnego trójkąta T . Jak łatwo zauważyć wynosi ona:

$$\chi(T) = W - K + S = 1, \quad (2.4)$$

ponieważ trójkąt T ma trzy wierzchołki W , trzy krawędzie K i jeden obszar ograniczony S .

Aby przybliżyć pojęcie charakterystyki Eulera, w następnych paragrafach policzymy jakie wartości przyjmuje suma $W - K + S$ dla różnych klas figur wielokątnych.

2.3 Charakterystyka Eulera dla wielokąta prostego.

Obliczmy teraz charakterystykę Eulera dla dowolnego wielokąta prostego.

W tym celu wykorzystamy następujące stwierdzenie, które mówi, że jeśli dowolną figurę F można striangulować tak, aby odpowiednie podzbiory wierzchołków, krawędzi i trójkątów podziału tej triangulacji tworzyły triangulacje figur wielokątnych F_1 i F_2 , gdzie $F = F_1 \cup F_2$, to:

$$\chi(F) = \chi(F_1 \cup F_2) = \chi(F_1) + \chi(F_2) - \chi(F_1 \cap F_2).$$

Dowód tego stwierdzenia bezpośrednio wynika z faktów:

$$W(F) = W(F_1) + W(F_2) - W(F_1 \cap F_2),$$

$$K(F) = K(F_1) + K(F_2) - K(F_1 \cap F_2),$$

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2) - S(F_1 \cap F_2),$$

bo za każdym razem trzeba odjąć liczbę liczonych podwójnie (raz w F_1 i raz w F_2) wierzchołków W , krawędzi K i obszarów ograniczonych S .³

Charakterystykę Eulera dla wielokąta prostego określimy w paru etapach.

W pierwszym kroku weźmy taki wielokąt prosty oznaczony przez W_2 , który składa się z dwóch nie zachodzących na siebie trójkątów T_1 i T_2 . To znaczy $W_1 = T_1 \cup T_2$ (trójkąty T_1 i T_2 mają wspólny bok). Ponieważ $\chi(T_1) = \chi(T_2) = 1$ (korzystamy z faktu (2.4)) oraz $\chi(T_1 \cap T_2) = 1$, bo częścią wspólną trójkątów T_1 i T_2 jest ich bok czyli łamana nie zamknięta (korzystamy z faktu (2.2)), więc:

$$\chi(W_2) = \chi(T_1) + \chi(T_2) - \chi(T_1 \cap T_2) = 1 + 1 - 1 = 1. \quad (*)$$

W drugim kroku dołączmy do wielokąta prostego W_2 inny trójkąt T_3 tak, że częścią wspólną W_2 i T_3 będzie jeden wspólny bok lub łamana złożona z dwóch boków wielokąta W_2 , jeśli nie był on wypukły (ogólnie łamana nie zamknięta). Otrzymamy w ten sposób wielokąt prosty W_3 . Wtedy:

$$\chi(W_3) = \chi(W_2) + \chi(T_3) - \chi(W_2 \cap T_3) = 1,$$

ponieważ $\chi(W_2) = \chi(T_3) = 1$ oraz $\chi(W_2 \cap T_3) = 1$, co wynika natychmiast z faktów (*) i (2.4) oraz faktu (2.2).

Procedurę można kontynuować skończoną ilość razy, w rezultacie otrzymując wielokąt prosty W_n .

Zgodnie z twierdzeniem z paragrafu 1.6, $W_n = T_1 \cup \dots \cup T_n$, gdzie T_1, \dots, T_n oznaczają trójkąty takie, że kolejne sumy $T_1 \cup \dots \cup T_i$ dla $i = \{2, \dots, n\}$, są wielokątami prostymi i wielokąty proste $T_1 \cup \dots \cup T_i$ oraz T_{i+1} mają część wspólną, będącą łamaną nie zamkniętą.

Dzięki temu otrzymujemy:

$$\chi(W_n) = \chi(T_1 \cup \dots \cup T_n) = 1. \quad (2.5)$$

³ Z. Marciniak, *Wzór Eulera*, [w:] *Szkoła Geometrii. Odczyty Kaliskie*, pod red. W. Jędrychowski, M. Kordos, WSiP, Warszawa 1993, s. 75.

2.4 Charakterystyka Eulera dla wielokąta z „porządnymi dziurami”.

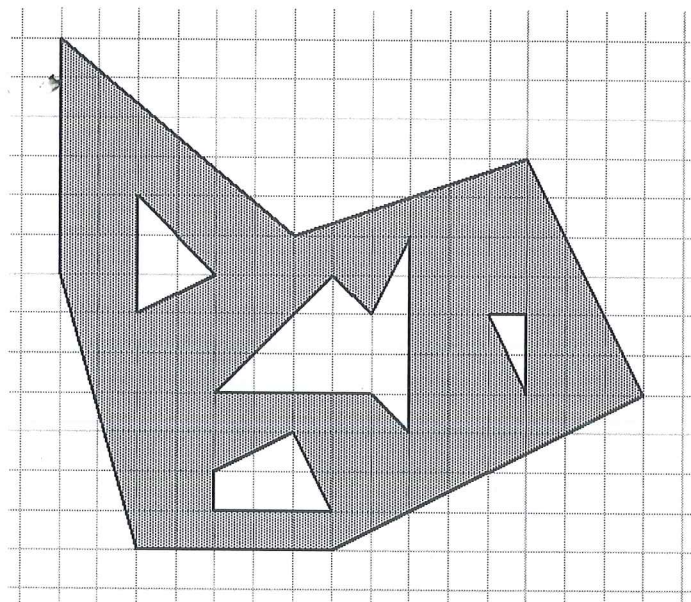
Następną klasą figur wielokątnych, dla których wyliczymy charakterystykę Eulera są wielokąty, które mają skończoną liczbę „porządných dziur”.

Zdefiniujemy pojęcie wielokąta z „porządnymi dziurami”.

Niech \bar{W} oraz D_i będą wielokątami prostymi na płaszczyźnie takimi, że dla każdego $i \in N$ $D_i \subset \bar{W}$. Jeśli dla każdego i , D_i nie ma punktów wspólnych z brzegiem wielokąta \bar{W} oraz dla każdych i, j , D_i nie ma punktów wspólnych z D_j (dla $i \neq j$), tzn. $D_i \cap D_j = \emptyset$, to figurę W powstałą przez usunięcie z wielokąta \bar{W} wnętrza wielokątów D_i dla każdego i , nazywamy wielokątem z porządnymi dziurami.

Jeśli wielokąty proste \bar{W} oraz D_i dla każdego i , są wielokątami prostymi o wierzchołkach kratowych, to wielokąt W nazywamy wielokątem z porządnymi dziurami o wierzchołkach kratowych.

Przykład wielokąta z porządnymi dziurami o wierzchołkach kratowych przedstawia rysunek 13.



Rysunek 13.

Naszym zadaniem będzie wyliczenie charakterystyki Eulera dla wielokąta z n porządnymi dziurami, gdzie $n \in \mathcal{N}$.

Ponieważ wiemy, jaką wartość ma charakterystyka Eulera dla wielokąta prostego, wykorzystamy to obliczając charakterystykę Eulera dla wielokąta W z n porządnymi dziurami.

W tym celu striangujemy wielokąt W i wielokąty proste D_1, \dots, D_n . W ten sposób otrzymamy już striangulowany wielokąt prosty \bar{W} taki, że $\bar{W} = W \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$.

Wiemy, że dziury D_1, \dots, D_n są porządne, tzn. dla każdego i , D_i nie ma punktów wspólnych z brzegiem wielokąta \bar{W} oraz dla każdych i, j , D_i nie ma punktów wspólnych z D_j , ($i \neq j$). Zatem częścią wspólną W oraz D_i dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$, jest łamana zamknięta oznaczona jako $W \cap D_i$. Wszystkie łamane zamknięte $W \cap D_1, \dots, W \cap D_n$ są parami rozłączne oraz żaden z wielokątów: W, D_1, \dots, D_n nie zachodzi na siebie.

Dzięki temu prawdziwa jest równość:

$$\chi(\bar{W}) = \chi(W) + \chi(D_1) + \dots + \chi(D_n) - \chi(W \cap D_1) - \dots - \chi(W \cap D_n),$$

gdzie $\chi(\bar{W})$, $\chi(D_i)$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$, są wartościami charakterystyki Eulera dla prostych wielokątów, natomiast $\chi(W \cap D_i)$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$, jest wartością charakterystyki Eulera dla łamanej zamkniętej. Korzystając z faktów (2.3) i (2.5) wiemy, że $\chi(W \cap D_i) = 0$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$ oraz $\chi(\bar{W}) = \chi(D_1) = \dots = \chi(D_n) = 1$.

Dlatego otrzymujemy równość: $1 = \chi(W) + \underbrace{1 + \dots + 1}_n$.

W rezultacie dostajemy: $\chi(W) = 1 - n$.

Wniosek:

Charakterystyka Eulera dla wielokąta W z n porządnymi dziurami wynosi:

$$\chi(W) = 1 - n. \tag{2.6}$$

2.5 Charakterystyka Eulera dla wielokąta z „dziurami”, które nie są porządne.

Zdefiniujmy pojęcie wielokąta z „dziurami”. Niech wielokąty \bar{W} oraz D_i będą wielokątami prostymi na płaszczyźnie takimi, że dla każdego $i \in N$, $D_i \subset \bar{W}$. Częścią wspólną wielokąta \bar{W} oraz D_i , jak również częścią wspólną wielokątów D_i oraz D_j dla $i \neq j$, może być co najwyżej skończony zbiór punktów. Jeśli z wielokąta \bar{W} usuniemy wnętrza wielokąta D_i dla każdego i , to otrzymamy wielokąt F , który nazywamy wielokątem z dziurami. Jeśli każdy z wielokątów \bar{W} oraz D_i dla każdego i , jest wielokątem o wierzchołkach kratowych, to wielokąt F nazywamy wielokątem o wierzchołkach kratowych z dziurami.

Rozpatrzmy wielokąt F ze skończoną ilością dziur, które są wielokątami prostymi, nie zachodzącymi na siebie oraz mogą mieć wspólne punkty kratowe z brzegiem wielokąta F lub innymi dziurami (tzn. wspólne wierzchołki).

Wartość charakterystyki Eulera dla wielokąta F wynosi:

$$\chi(F) = 1 - n, \quad (2.7)$$

gdzie $n \in N$ i oznacza ilość dziur wielokąta F , tak samo jak dla wielokątów z porządnymi dziurami.

Aby uzasadnić równość (2.7) najpierw przeprowadźmy pewne rozumowanie.

Rozpatrzmy dowolny wielokąt prosty A . Striangulujmy wielokąt A , to znaczy podzielmy go na skończoną liczbę trójkątów, nie zachodzących na siebie (nazwanych trójkątami podziału) w sposób opisany w paragrafie 2.1.

Każdy trójkąt podziału składa się z krawędzi oraz wierzchołków triangulacji.

Rozważmy dwa rodzaje krawędzi i wierzchołków triangulacji: wewnętrzne oraz brzegowe.

Wewnętrzne krawędzie i wierzchołki triangulacji znajdują się wewnątrz wielokąta prostego A , natomiast brzegowe krawędzie i wierzchołki triangulacji, jak sama nazwa wskazuje, na brzegu wielokąta A .

Charakterystyka Eulera dla wielokąta prostego A , podzielonego na trójkąty w sposób opisany wyżej ma postać:

$$\chi(A) = W - K + T, \quad (2.8)$$

gdzie W jest ilością wierzchołków triangulacji, K jest ilością krawędzi triangulacji, natomiast T oznacza ilość trójkątów podziału.

Rozważmy sumę: $W'-K'+T$, gdzie W' oraz K' oznaczają odpowiednio ilości wewnętrznych wierzchołków oraz krawędzi triangulacji.

Wnioskujemy, że zachodzi równość:

$$\chi(A) = W' - K' + T, \quad (2.9)$$

ponieważ w każdym wielokącie prostym ilość brzegowych wierzchołków triangulacji jest równa ilości brzegowych krawędzi triangulacji. Zatem jeśli będziemy brać pod uwagę tylko wewnętrzne wierzchołki i krawędzie triangulacji, to również możemy policzyć wartość charakterystyki Eulera dla wielokąta prostego.

Teraz możemy uzasadnić równość (2.7).

Ponieważ charakterystyka Eulera dla wielokątów prostych wynosi 1, wykorzystajmy ten fakt, obliczając charakterystykę Eulera dla wielokąta F . Na samym początku striangulujemy wielokąt F oraz wszystkie dziury wielokąta F , D_1, \dots, D_n . Wprowadźmy oznaczenia. Niech W oraz K oznaczają odpowiednio ilości wierzchołków oraz krawędzi triangulacji wielokąta F , natomiast niech T oznacza ilość trójkątów podziału, na które został podzielony wielokąt F .

Charakterystyka Eulera dla wielokąta F będzie miała postać:

$$\chi(F) = W - K + T. \quad (2.10)$$

Ponieważ dziura D_i dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$, jest wielokątem prostym, dlatego charakterystykę Eulera dla wielokąta D_i możemy obliczyć wykorzystując zależność (2.8). Zatem:

$$\chi(D_i) = W'_i - K'_i + T_i, \quad (2.11)$$

gdzie $i \in \{1, \dots, n\}$, W'_i oraz K'_i oznaczają odpowiednio ilości wewnętrznych wierzchołków oraz krawędzi triangulacji wielokąta D_i , natomiast T_i oznacza ilość trójkątów podziału, na które został podzielony wielokąt D_i .

W następnym kroku zaklejmy wszystkie dziury D_1, \dots, D_n wielokąta F . W ten sposób otrzymamy wielokąt prosty \bar{F} taki, że $\bar{F} = F \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$ i żaden z wielokątów: F, D_1, \dots, D_n nie zachodzi na siebie.

Oznaczmy przez \bar{W} oraz \bar{K} odpowiednio ilości wierzchołków oraz krawędzi triangulacji wielokąta \bar{F} , natomiast przez \bar{T} ilość trójkątów podziału, z których składa się wielokąt \bar{F} . Charakterystyka Eulera dla wielokąta \bar{F} ma postać:

$$\chi(\bar{F}) = \bar{W} - \bar{K} + \bar{T}. \quad (2.12)$$

Wyrażmy za pomocą wielkości: $\bar{W}, \bar{K}, \bar{T}, W_i', K_i', T_i$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$, ilości wierzchołków i krawędzi triangulacji oraz ilość trójkątów podziału wielokąta F .

Wierzchołkom oraz krawędziom triangulacji wielokąta F odpowiadają odpowiednio wierzchołki oraz krawędzie triangulacji wielokąta \bar{F} , ale z wyjątkiem wewnętrznych wierzchołków oraz krawędzi triangulacji dziur D_1, \dots, D_n . Dlatego:

$$W = \bar{W} - W_1' - \dots - W_n' \quad (2.13)$$

oraz

$$K = \bar{K} - K_1' - \dots - K_n'. \quad (2.14)$$

Natomiast trójkątom podziału wielokąta F odpowiadają trójkąty podziału wielokąta \bar{F} , ale nie biorąc pod uwagę trójkątów podziału dziur D_1, \dots, D_n .

Zatem:

$$T = \bar{T} - T_1 - \dots - T_n. \quad (2.15)$$

Wykorzystując zależności (2.13), (2.14) i (2.15), równanie (2.10) możemy zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \chi(F) &= \bar{W} - W_1' - \dots - W_n' - \bar{K} + K_1' + \dots + K_n' + \bar{T} - T_1 - \dots - T_n = \\ &= \bar{W} - \bar{K} + \bar{T} - (W_1' - K_1' + T_1) - \dots - (W_n' - K_n' + T_n) = \\ &= \chi(F) - \chi(D_1) - \dots - \chi(D_n) = (*). \end{aligned}$$

W ostatnim przekształceniu wykorzystaliśmy równości (2.11) i (2.12).

Ponieważ $\chi(\bar{F}) = \chi(D_1) = \dots = \chi(D_n) = 1$, bo \bar{F}, D_1, \dots, D_n są wielokątami prostymi, zatem:

$$(*) = 1 - \underbrace{(1 + \dots + 1)}_n = 1 - n.$$

c.n.d.

Uzasadniliśmy równość (2.7).

2.6 Charakterystyka Eulera brzegu figury wielokątnej o wierzchołkach kratowych.

Striangulujmy dowolną figurę wielokątną F .

Brzegiem figury wielokątnej F jest suma tych krawędzi triangulacji, które zawierają się tylko w jednym trójkącie podziału. Suma ta nie zależy od wyboru triangulacji figury wielokątnej. Brzeg figury wielokątnej F oznaczamy: ∂F .

Dla dowolnej figury wielokątnej F określmy wielkość:

$$\chi(\partial F) = W - K, \quad (2.16)$$

gdzie W oznacza ilość wierzchołków triangulacji na brzegu figury F , K oznacza ilość krawędzi tworzących brzeg figury F .

Wielkość (2.16) jest stała dla różnych klas figur wielokątnych.

Na przykład dla wielokątów prostych W , charakterystyka brzegu $\chi(\partial W)$ wynosi 0. Podobnie jest dla wielokątów z porządnymi dziurami. Wynika to stąd, że ilość wierzchołków na brzegu takich wielokątów jest równa ilości krawędzi brzegowych.

Problem komplikuje się, gdy figura wielokątna F składa się z nie zachodzących na siebie wielokątów prostych oraz wielokątów z dziurami, gdzie zarówno wielokąty jak i dziury mają wspólne wierzchołki.

Taka figura F przedstawiona jest na rysunku 11 w paragrafie 2.1.

W tym przypadku krawędzi jest więcej niż wierzchołków, zatem charakterystyka brzegu będzie miała niezerową wartość, która zależy od ilości i rodzaju wspólnych punktów kratowych wielokątów i dziur.

Tym zagadnieniem zajmiemy się w rozdziale trzecim.

Rozdział 3.

Jaką postać ma wzór Picka dla figur wielokątnych o wierzchołkach kratowych?

Celem naszej pracy będzie odpowiedź na pytanie postawione w tytule rozdziału 3. Będziemy zajmować się różnymi klasami figur wielokątnych o wierzchołkach kratowych.

Na początku wyprowadzimy wzór Picka dla wielokątów z porządnymi dziurami (paragraf 3.1). Następnie zdefiniujemy pojęcie punktów osobliwych oraz powiemy co to jest krotność brzegowego punktu kratowego.

Wykorzystamy te pojęcia, aby podać nową postać wzoru Picka, za pomocą którego będzie można policzyć pole dowolnego wielokąta z dziurami (niekoniecznie porządnymi). W paragrafie 3.3 podamy związek między ilością punktów osobliwych, a charakterystyką Eulera brzegu dowolnego wielokąta z dziurami. W rezultacie otrzymamy nową postać wzoru Picka, prawdziwą dla dowolnej figury wielokątnej o wierzchołkach kratowych, ale to uzasadnimy w rozdziale 4.

3.1 Wzór Picka dla wielokątów o wierzchołkach kratowych z „porządnymi dziurami”.

Naszym celem będzie poprawienie wzoru (1.2) tak, aby można było policzyć pole wielokąta o wierzchołkach kratowych, który posiada skończoną ilość porządných dziur.

Jak będzie wyglądał wzór Picka dla takiego wielokąta?

Aby odpowiedzieć na to pytanie rozważmy wielokąt W o wierzchołkach kratowych, który posiada n porządných dziur D_1, \dots, D_n , gdzie $n \in \mathbb{N}$. Dziura D_i jest wielokątem prostym o wierzchołkach kratowych dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$.

Wprowadźmy oznaczenia. Niech w i b oznaczają odpowiednio ilości wewnętrznych i brzegowych punktów kratowych wielokąta W oraz niech w_1, \dots, w_n , oznaczają odpowiednio ilości punktów kratowych wewnątrz dziur D_1, \dots, D_n . Analogicznie niech b_1, \dots, b_n oznaczają odpowiednio ilości brzegowych punktów kratowych dziur D_1, \dots, D_n . Następnie „zaklejmy” każdą dziurę D_i dla $i \in \{1, \dots, n\}$. W ten sposób otrzymamy wielokąt prosty \bar{W} o wierzchołkach kratowych, składający się z nie zachodzących na siebie wielokątów: W, D_1, \dots, D_n . Niech wielokąt \bar{W} posiada \bar{w} wewnętrznych punktów kratowych oraz \bar{b} brzegowych punktów kratowych. Wyrażmy za pomocą wielkości $w, w_1, \dots, w_n, b, b_1, \dots, b_n$, ilości wewnętrznych i brzegowych punktów kratowych wielokąta \bar{W} .

Zauważmy, że ilość wewnętrznych punktów kratowych wielokąta \bar{W} jest równa sumie ilości wewnętrznych punktów kratowych wielokąta W , dziur D_1, \dots, D_n oraz ilości brzegowych punktów kratowych dziur D_1, \dots, D_n . Zatem

$$\bar{w} = w + w_1 + \dots + w_n + b_1 + \dots + b_n. \quad (3.1)$$

Z drugiej strony brzegowe punkty kratowe wielokąta \bar{W} odpowiadają brzegowym punktom kratowym wielokąta W , ale z wyjątkiem brzegowych punktów kratowych dziur D_1, \dots, D_n .

W rezultacie otrzymujemy:

$$\bar{b} = b - b_1 - \dots - b_n. \quad (3.2)$$

Wykorzystując fakt, że $\bar{W} = W \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$ oraz addytywność pola P , otrzymujemy równanie:

$$P(\bar{W}) = P(W \cup D_1 \cup \dots \cup D_n) = P(W) + P(D_1) + \dots + P(D_n). \quad (3.3)$$

Z drugiej strony określimy wielkość $P(\bar{W})$, wykorzystując zależności (3.1) i (3.2). Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P(\bar{W}) &= \bar{w} + \frac{1}{2}\bar{b} - 1 = w + w_1 + \dots + w_n + b_1 + \dots + b_n + \frac{1}{2}(b - b_1 - \dots - b_n) - 1 = \\ &= w + \frac{1}{2}b + w_1 + \frac{1}{2}b_1 + \dots + w_n + \frac{1}{2}b_n - 1 = w + \frac{1}{2}\bar{b} + w_1 + \frac{1}{2}b_1 - 1 + \dots + w_n + \frac{1}{2}b_n - 1 + n - 1. \end{aligned}$$

W ostatnim kroku odjęliśmy i jednocześnie dodaliśmy n jedynek po to, aby $P(\bar{W})$ zapisać w postaci:

$$P(\bar{W}) = w + \frac{1}{2}b + P(D_1) + \dots + P(D_n) - (1 - n),$$

gdzie $P(D_i) = w_i + \frac{1}{2}b_i - 1$ dla wielokąta prostego D_i o wierzchołkach kratowych, dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$.

Wykorzystując równość (3.3), otrzymujemy:

$$P(W) = w + \frac{1}{2}b - (1 - n). \quad (3.4)$$

Zauważmy, że charakterystyka Eulera dla wielokąta W wynosi $1 - n$ (uzasadnienie tego faktu przedstawione jest w paragrafie 2.4). Podsumowując, wzór (3.4) możemy zapisać w postaci:

$$P(W) = w + \frac{1}{2}b - \chi(W). \quad (3.5)$$

Wzór Picka dla wielokąta W o wierzchołkach kratowych, posiadającego skończoną liczbę porządných dziur ma postać (3.5).

3.2 Wzór Picka dla wielokątów z „dziurami” posiadających punkty osobliwe.

Na samym początku uzasadnimy fakt, że ilość krawędzi brzegowych wychodzących z dowolnego wierzchołka figury wielokątnej jest parzysta.

W tym celu rozpatrzmy małe otoczenie dowolnego wierzchołka figury wielokątnej. Wychodzące z wierzchołka krawędzie brzegowe dzielą płaszczyznę na sektory. W co drugim sektorze mamy część figury wielokątnej. Zatem mamy zawsze parzystą ilość sektorów, a co za tym idzie parzystą ilość krawędzi brzegowych.

Dokonyamy podziału brzegowych punktów kratowych na porządne punkty kratowe oraz punkty osobliwe.

Porządny punkt kratowy to taki punkt na brzegu figury wielokątnej, z którego wychodzą tylko dwie krawędzie, tzn. może to być wierzchołek lub punkt kratowy nie będący wierzchołkiem, który zawiera się tylko w jednej krawędzi.

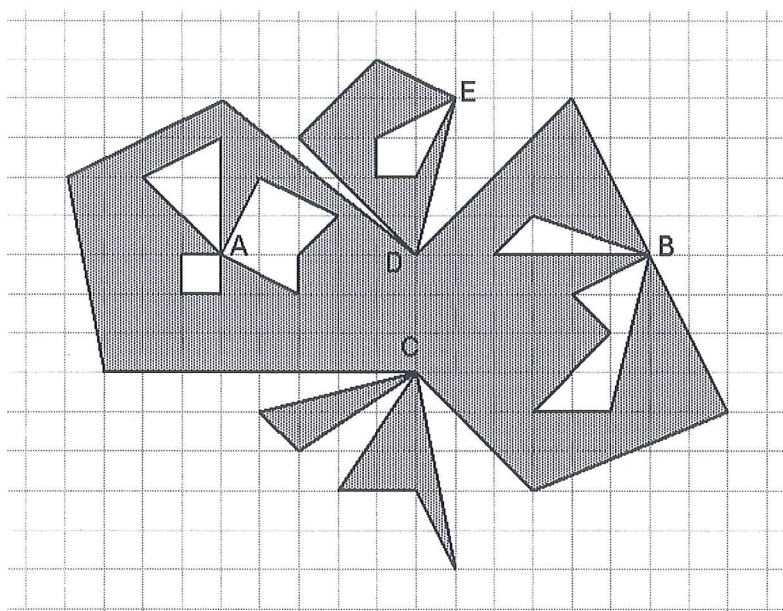
Natomiast punktem osobliwym nazywamy punkt na brzegu figury wielokątnej, który nie jest porządnym punktem kratowym, tzn. punkt, z którego wychodzi $2k$ krawędzi brzegowych, gdzie $k \in \mathbb{N}$ i $k \geq 2$.

Na przykład punktem osobliwym może być:

- a) brzegowy punkt kratowy, który jest częścią wspólną skończonej ilości $i \geq 2$ dziur, np. punkt A na rysunku 14,
- b) brzegowy punkt kratowy, będący częścią wspólną skończonej ilości $i \geq 1$ dziur i „brzegu zewnętrznego” figury wielokątnej, np. punkt B na rysunku 14,

- c) brzegowy punkt kratowy będący częścią wspólną wielokątów prostych lub wielokątów z dziurami, które tworzą figurę wielokątną o wierzchołkach kratowych, np. punkt C na rysunku 14.

Punkty osobliwe przedstawia rysunek 14.



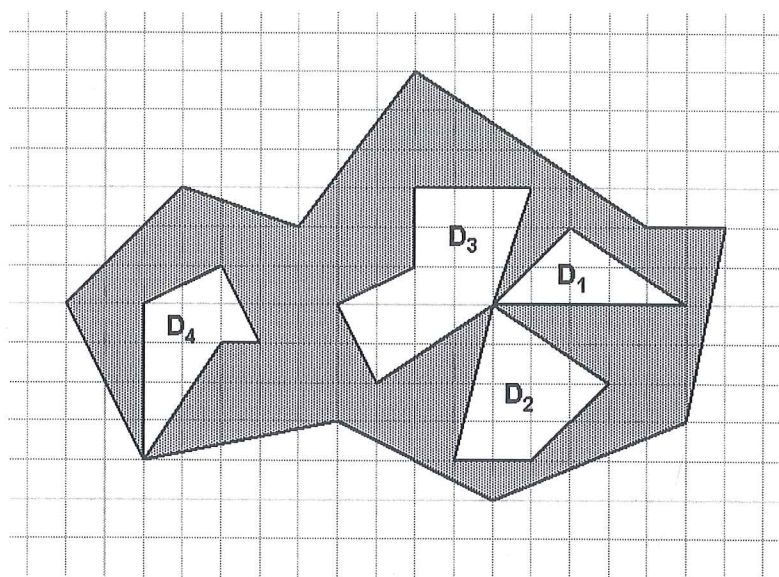
Rysunek 14.

Wielkość k nazywamy krotnością brzegowego punktu kratowego. Na przykład każdy porządnny punkt kratowy ma krotność równą 1, natomiast na rysunku 14 mamy trzy punkty osobliwe krotności 3 (punkty A, B, C) oraz dwa punkty osobliwe krotności 2 (punkty D, E). Wprowadźmy jeszcze jedno oznaczenie. Niech p_k oznacza ilość punktów osobliwych krotności k .

Naszym zadaniem jest poprawienie wzoru (3.5) w taki sposób, aby za jego pomocą można było obliczyć pole wielokątów o wierzchołkach kratowych, które posiadają skończoną liczbę dziur niekoniecznie porządnnych.

Rozpatrzmy przykład wielokąta W o wierzchołkach kratowych, który ma cztery dziury D_1, \dots, D_4 , które są wielokątami prostymi o wierzchołkach kratowych.

Wielokąt W przedstawiony jest na rysunku 15.



Rysunek 15.

W wielokącie W jest jeden punkt osobliwy krotności 3 (część wspólna trzech dziur D_1, D_2, D_3), zatem p_3 wynosi 1 oraz jeden punkt krotności 2 (część wspólna dziury D_4 i brzegu wielokąta W), więc p_2 wynosi 1.

Aby podać „poprawioną” postać wzoru Picka dla wielokąta W , „zaklejmy” wszystkie dziury. Otrzymamy wielokąt prosty \bar{W} o wierzchołkach kratowych taki, że $\bar{W} = W \cup D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ i wielokąty: W, D_1, \dots, D_4 nie zachodzą na siebie. Wykorzystując addytywność pola P , otrzymujemy równość:

$$P(\bar{W}) = P(W) + P(D_1) + \dots + P(D_4). \quad (3.6)$$

Wprowadźmy oznaczenia. Niech $\bar{w}, w, w_1, \dots, w_4$ oznaczają odpowiednio ilości wewnętrznych punktów kratowych wielokątów $\bar{W}, W, D_1, \dots, D_4$. Analogicznie niech $\bar{b}, b, b_1, \dots, b_4$ oznaczają odpowiednio ilości brzegowych punktów kratowych wielokątów $\bar{W}, W, D_1, \dots, D_4$.

Policzmy ile wewnętrznych punktów kratowych ma wielokąt \bar{W} wykorzystując w tym celu wielkości: w, w_1, \dots, w_4 oraz p_2 i p_3 .

Wewnętrznym punktom kratowym wielokąta \bar{W} odpowiadają wewnętrzne punkty kratowe wielokąta W oraz dziur D_1, \dots, D_4 , ale również brzegowe punkty kratowe dziur D_1, \dots, D_4 , w tym dwa punkty osobliwe. Musimy tutaj pamiętać, żeby każdy z obydwu punktów osobliwych był

policzony tylko jeden raz. Podczas sumowania wszystkich brzegowych punktów kratowych dziur D_1, \dots, D_4 , jeden z punktów osobliwych, w którym spotykają się dziury D_1, D_2, D_3 , został policzony potrójnie, dlatego musimy odjąć go dwa razy, natomiast drugi punkt osobliwy będący częścią wspólną dziury D_4 i brzegu wielokąta W jest brzegowym punktem kratowym, dlatego również go odejmujemy. Zatem punktów kratowych wewnątrz wielokąta \bar{W} jest:

$$\bar{w} = w + w_1 + \dots + w_4 + b_1 + \dots + b_4 - (p_2 + 2p_3). \quad (3.7)$$

Brzegowym punktom kratowym wielokąta \bar{W} odpowiadają brzegowe punkty kratowe wielokąta W z wyjątkiem punktów kratowych znajdujących się na brzegu dziur D_1, \dots, D_4 , których jest: $b_1 + \dots + b_4 - (p_2 + 2p_3)$ w tym punkty osobliwe krotności 2 i 3 (dlatego odejmujemy nadwyżkę: $(p_2 + 2p_3)$, powstałą podczas liczenia brzegowych punktów kratowych dziur D_1, \dots, D_4).

Zatem ilość brzegowych punktów kratowych wielokąta \bar{W} , wynosi:

$$\bar{b} = b - (b_1 + \dots + b_4 - (p_2 + 2p_3)) = b - b_1 - \dots - b_4 + (p_2 + 2p_3). \quad (3.8)$$

Wykorzystując zależności (3.7) i (3.8), obliczmy $P(\bar{W})$:

$$\begin{aligned} P(\bar{W}) &= \bar{w} + \frac{1}{2}\bar{b} - 1 = w + w_1 + \dots + w_4 + b_1 + \dots + b_4 - (p_2 + 2p_3) + \\ &+ \frac{1}{2}(b - b_1 - \dots - b_4 + (p_2 + 2p_3)) - 1 = w + \frac{1}{2}b + w_1 + \frac{1}{2}b_1 + \dots + w_4 + \frac{1}{2}b_4 - \\ &- \frac{1}{2}(p_2 + 2p_3) - 1 = (*). \end{aligned}$$

Ponieważ $P(D_i) = w_i + \frac{1}{2}b_i - 1$ dla wielokąta prostego D_i , dla każdego $i \in \{1, \dots, 4\}$, więc odejmijmy i jednocześnie dodajmy cztery jedyńki. Stąd otrzymamy, że:

$$\begin{aligned} (*) &= w + \frac{1}{2}b + w_1 + \frac{1}{2}b_1 - 1 + \dots + w_4 + \frac{1}{2}b_4 - 1 - \frac{1}{2}(p_2 + 2p_3) - 1 + 4 = \\ &= w + \frac{1}{2}b + P(D_1) + \dots + P(D_4) - \frac{1}{2}(p_2 + 2p_3) + 3. \end{aligned}$$

Jeśli skorzystamy z równości (3.6), to otrzymamy:

$$P(W) = w + \frac{1}{2}b + 3 - \frac{1}{2}(p_2 + 2p_3). \quad (3.9)$$

Wiemy, że charakterystyka Eulera dla wielokąta W wynosi -3 , ponieważ posiada on cztery dziury (uzasadnienie tego faktu przedstawione jest w paragrafie 2.5). Jeśli wielokąt W posiadałby inną ilość dziur, to jego

charakterystyka Eulera miałyby inną wartość. Dlatego wartość -3 z równania (3.9) zastąpimy ogólnie przez $\chi(W)$.

Stąd wzór Picka dla wielokąta W ma postać:

$$P(W) = w + \frac{1}{2}b - \chi(W) - \frac{1}{2}(p_2 + 2p_3). \quad (3.10)$$

Natomiast wielkość $p_2 + 2p_3$ to nadwyżka powstała podczas liczenia brzegowych punktów kratowych wielokąta W .

Problem komplikuje się, gdy wielokąt W będzie posiadał więcej punktów osobliwych różnej krotności. W takim przypadku nadwyżka powstała podczas liczenia brzegowych punktów kratowych wielokąta W będzie miała inną postać. Podamy ją i uzasadnimy.

Niech wielokąt W posiada punkty osobliwe o największej krotności równej m .

Nadwyżka powstała podczas liczenia brzegowych punktów kratowych wielokąta W będzie miała postać:

$$p = p_2 + 2p_3 + 3p_4 + \dots + (m-1)p_m = \sum_{k=2}^m (k-1)p_k. \quad (3.11)$$

Uzasadnijmy powyższy fakt (3.11).

Rozróżnimy dwa przypadki. Każdy punkt osobliwy wielokąta W o krotności k , gdzie $k \in \{2, \dots, m\}$ (znajdujący się wewnątrz wielokąta \overline{W}), podczas liczenia brzegowych punktów kratowych wielokąta W został policzony k razy. Z drugiej strony każdy punkt kratowy musi być policzony tylko jeden raz. Natomiast każdy punkt osobliwy wielokąta W o krotności k , gdzie $k \in \{2, \dots, m\}$ (znajdujący się na brzegu wielokąta \overline{W}), został policzony $k-1$ razy, a nie powinien być policzony wcale.

Zarówno w pierwszym jak i w drugim przypadku nadwyżka dla takiego punktu wynosi $k-1$, zaś nadwyżka dla wszystkich punktów tej krotności wynosi $(k-1)p_k$.

Sumując wszystkie punkty brzegowe różnej krotności, otrzymujemy całkowitą nadwyżkę powstałą podczas liczenia wszystkich punktów brzegowych wielokąta W , która będzie miała postać (3.11), co kończy uzasadnienie.

Reasumując:

Wzór Picka dla dowolnego wielokąta W o wierzchołkach kratowych ze skończoną ilością dziur, które są wielokątami prostymi o wierzchołkach kratowych oraz które nie muszą być porządnymi dziurami, ma postać:

$$P(W) = w + \frac{1}{2}b - \chi(W) - \frac{1}{2}p, \quad (3.12)$$

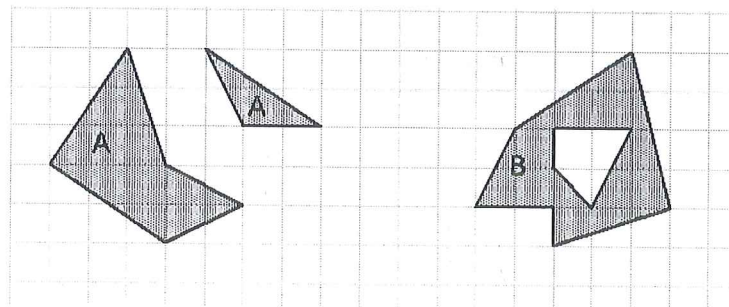
gdzie w i b oznaczają ilości punktów kratowych odpowiednio wewnątrz i na brzegu wielokąta W , $\chi(W)$ jest charakterystyką Eulera dla wielokąta W oraz $p = \sum_{k=2}^m (k-1)p_k$, gdzie m jest maksymalną krotnością wśród wierzchołków brzegowych wielokąta W , zaś p_k jest ilością punktów osobliwych (wierzchołków) krotności k .

3.3 Punkty osobliwe i charakterystyka Eulera brzegu figury wielokątnej o wierzchołkach kratowych.

W paragrafie 2.6 zdefiniowana jest charakterystyka Eulera brzegu figury wielokątnej F . Jej wartość zależy od ilości krawędzi oraz wierzchołków brzegowych figury F .

Jeśli figura F ma punkty osobliwe różnej krotności, to charakterystyka Eulera brzegu będzie zależała od ilości tych punktów jak również od ich rodzaju (krotności).

Rozpatrzmy przykłady figur wielokątnych przedstawionych na rysunkach 16.1 – 16.4.

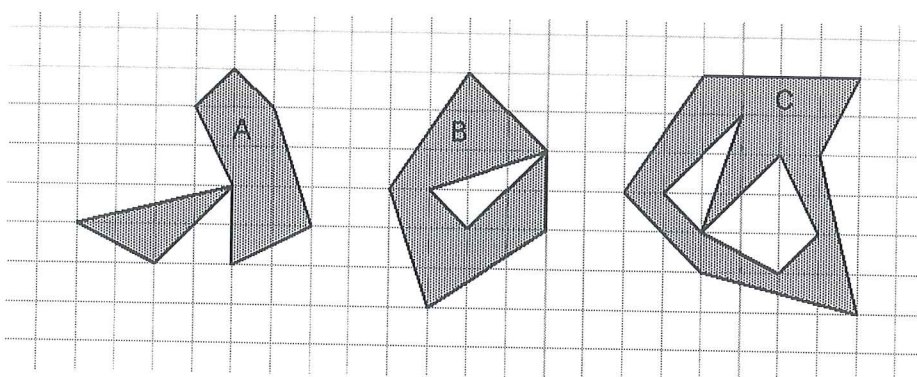


Rysunek 16.1.

Zarówno dla figury wielokątnej A jak i B , charakterystyka Eulera brzegu wynosi:

$$\chi(\partial A) = \chi(\partial B) = 0.$$

Z drugiej strony nie ma punktów osobliwych.



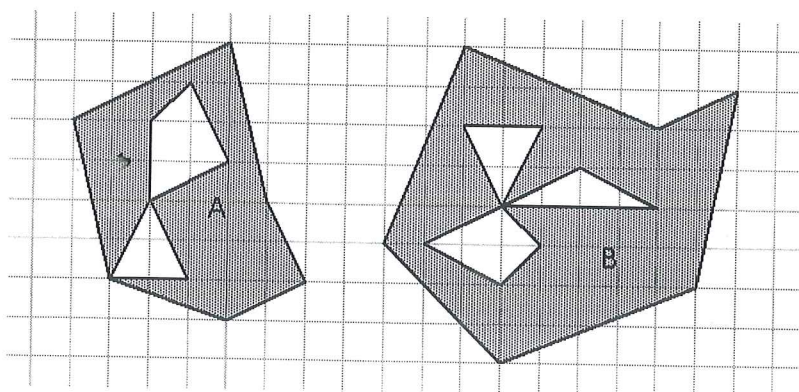
Rysunek 16.2.

Rysunek 16.2 przedstawia figury wielokątne A , B , C , dla których charakterystyka Eulera brzegu wynosi:

$$\chi(\partial A) = \chi(\partial B) = \chi(\partial C) = -1.$$

Jak łatwo zauważyć każda z tych figur posiada jeden punkt osobliwy, w którym spotykają się cztery krawędzie brzegowe, zatem $p_2 = 1$, dla każdej z tych figur, czyli $p = 1$ (na mocy (3.11)).

Dla figur wielokątnych A i B na rysunku 16.3,



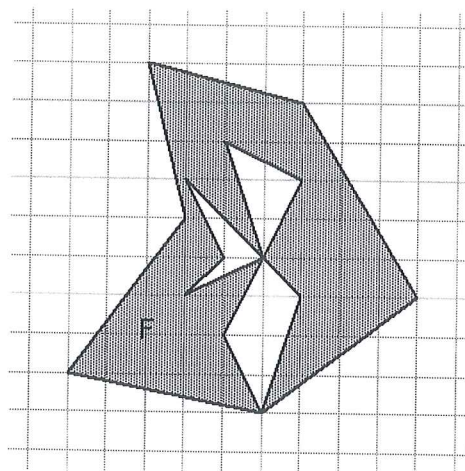
Rysunek 16.3.

charakterystyka Eulera brzegu wynosi:

$$\chi(\partial A) = \chi(\partial B) = -2.$$

Figura A ma dwa punkty osobliwe krotności 2, ponieważ w każdym z nich spotykają się cztery krawędzie brzegowe. W rezultacie $p = 2$ dla figury A . Figura B ma jeden punkt osobliwy, który jest częścią wspólną sześciu krawędzi brzegowych, zatem $p_3 = 1$. Sumując punkty osobliwe otrzymujemy, że $p = 2$ (na mocy (3.11)) dla figury B .

Rozpatrzmy jeszcze jedną figurę wielokątną F , przedstawioną na rysunku 16.4.



Rysunek 16.4.

Charakterystyka Eulera brzegu figury F wynosi:

$$\chi(\partial F) = -3.$$

Figura F posiada dwa punkty osobliwe. W jednym z nich spotyka się sześć krawędzi brzegowych, więc $p_3 = 1$, w drugim dwie, zatem $p_2 = 1$. W rezultacie: $p = p_2 + 2p_3 = 1 + 2 \cdot 1 = 3$, na mocy (3.11).

W każdym przypadku wielkość p zależy do charakterystyki Eulera brzegu dowolnej figury wielokątnej o wierzchołkach kratowych. Zapiszemy to jako fakt, a następnie uzasadnimy go w pełnej ogólności.

Fakt:

Dla dowolnej figury wielokątnej F o wierzchołkach kratowych zachodzi zależność:

$$\chi(\partial F) = -p, \tag{3.13}$$

gdzie $\chi(\partial F)$ jest charakterystyką Eulera brzegu figury F , natomiast p określone jest wzorem (3.11).

Uzasadnienie:

Niech figura wielokątna F ma punkty osobliwe o najwyższej krotności równej m . Wiemy, że p_k dla $k = \{1, \dots, m\}$, oznacza ilość wierzchołków figury F

o krotności k , tzn. z każdego wierzchołka o krotności k wychodzi $2k$ krawędzi czyli k par krawędzi figury F .

Z drugiej strony $2k \cdot p_k$ oznacza ilość krawędzi wychodzących z wszystkich wierzchołków o krotności k .

Oznaczmy przez W ilość wierzchołków figury F . Łatwo zauważyć, że:

$$W = p_1 + \dots + p_m. \quad (3.14)$$

Niech K oznacza ilość krawędzi figury F . Zauważmy, że wielkość:

$$2p_1 + 4p_2 + 6p_3 + \dots + 2mp_m = \sum_{k=1}^m 2kp_k \quad (3.15)$$

jest ilością wszystkich krawędzi wychodzących ze wszystkich wierzchołków, ale każda z tych krawędzi została policzona podwójnie, ponieważ każda jednocześnie wychodzi z dwóch wierzchołków. Zatem jeśli wielkość (3.15) podzielimy przez dwa to otrzymamy ilość krawędzi figury F równą:

$$K = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + mp_m = \sum_{k=1}^m kp_k. \quad (3.16)$$

Sprawdźmy jaką wartość będzie miała $\chi(\partial F)$ jeśli wykorzystamy zależności (3.14) i (3.16):

$$\chi(\partial F) = W - K = \sum_{k=1}^m p_k - \sum_{k=1}^m kp_k = \sum_{k=1}^m (1-k)p_k = -\sum_{k=1}^m (k-1)p_k = -p.$$

c.n.d.

Wykorzystując wzór (3.12) oraz zależność (3.13), dochodzimy do nowej postaci wzoru Picka dla wielokątów z dziurami. Zapiszmy to jako wniosek.

Wniosek:

Niech F będzie wielokątem z dziurami (niekoniecznie porządnymi).

Wówczas:

$$P(F) = w + \frac{1}{2}b - \chi(F) + \frac{1}{2}\chi(\partial F). \quad (3.17)$$

Następnym zadaniem będzie udowodnienie wzoru (3.17) w pełnej ogólności czyli dla dowolnej figury wielokątnej, ale tym zajmiemy się w następnym rozdziale.

Rozdział 4.

Uzasadnienie wzoru Picka dla dowolnej figury wielokątnej o wierzchołkach kratowych.

Uzasadnimy wzór Picka, którego postać otrzymaliśmy w poprzednim rozdziale. W tym celu rozpatrzmy dowolną figurę wielokątną F o wierzchołkach kratowych.

Striangulujemy figurę wielokątną F (triangulacja istnieje na mocy definicji z paragrafu 2.1).

Uzasadnimy wzór (3.17), wykorzystując ilości krawędzi i wierzchołków triangulacji (krawędzie i wierzchołki triangulacji zostały zdefiniowane w paragrafie 2.2).

Dowód wzoru (3.17) będzie jednoznaczny z uzasadnieniem prawdziwości równości:

$$P(F) - w - \frac{1}{2}b + \chi(F) - \frac{1}{2}\chi(\partial F) = 0, \quad (4.1)$$

gdzie w i b oznaczają odpowiednio ilości wewnętrznych i brzegowych punktów kratowych figury wielokątnej F , $\chi(F)$ i $\chi(\partial F)$ oznaczają charakterystykę Eulera i charakterystykę Eulera brzegu figury F , a $P(F)$ jest polem figury F .

Określmy wielkości: $P(F)$, w , b , $\chi(F)$ i $\chi(\partial F)$ wykorzystując krawędzie i wierzchołki triangulacji oraz trójkąty podziału figury F .

W pierwszym kroku uzasadnienia równości (4.1) określimy wielkość $P(F)$.

W tym celu oznaczmy przez S ilość trójkątów podziału (o wierzchołkach kratowych) T_1, \dots, T_S , które powstały podczas triangulacji figury F .

Rozpatrzmy dwa rodzaje krawędzi triangulacji: wewnętrzne oraz brzegowe krawędzie triangulacji, zdefiniowane w paragrafie 2.5.

Niech p oznacza ilość wewnętrznych krawędzi triangulacji oraz niech α_i dla $i \in \{1, \dots, p\}$, oznacza ilość punktów kratowych znajdujących się wewnątrz i -tej krawędzi wewnętrznej (ale bez wierzchołków tej krawędzi). Analogicznie niech q oznacza ilość brzegowych krawędzi triangulacji oraz niech β_i dla $i \in \{1, \dots, q\}$, oznacza ilość punktów kratowych znajdujących się wewnątrz i -tej krawędzi brzegowej (nie licząc punktów kratowych odpowiadających końcom tej krawędzi).

W sumie ilość wszystkich krawędzi wynosi:

$$K = p + q. \quad (4.2)$$

Następnie skorzystajmy z addytywności pola P , określając wielkość $P(F)$. Otrzymamy:

$$P(F) = \sum_{i=1}^S P(T_i). \quad (4.3)$$

Oznaczmy przez w_i ilość wewnętrznych punktów kratowych w trójkącie T_i oraz niech b_i oznacza ilość brzegowych punktów kratowych w trójkącie T_i dla $i \in \{1, \dots, S\}$.

Zatem na mocy (1.2), otrzymujemy:

$$P(T_i) = w_i + \frac{1}{2}b_i - 1. \quad (4.4)$$

Wykorzystując wzór (4.4), równość (4.3) możemy zapisać w postaci:

$$P(F) = \sum_{i=1}^S \left(w_i + \frac{1}{2}b_i - 1 \right) = \sum_{i=1}^S w_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^S b_i - S = (*),$$

gdzie $\sum_{i=1}^S w_i$ oznacza ilość wewnętrznych punktów kratowych wszystkich

trójkątów podziału oraz $\sum_{i=1}^S b_i$ oznacza ilość punktów kratowych zawartych w krawędziach triangulacji wszystkich trójkątów podziału, licząc również końce tych krawędzi.

Ściślej mówiąc brzegowym punktom kratowym wszystkich trójkątów podziału odpowiadają: punkty kratowe znajdujące się wewnątrz brzegowych krawędzi triangulacji, których ilość wynosi: $\sum_{i=1}^q \beta_i$, punkty kratowe znajdujące się wewnątrz wewnętrznych krawędzi triangulacji, ale policzone podwójnie, ponieważ każda wewnętrzna krawędź triangulacji należy do dwóch trójkątów podziału, więc jest ich $2 \sum_{i=1}^p \alpha_i$ oraz punkty kratowe odpowiadające wierzchołkom triangulacji, których jest $3S$, ponieważ każdy z S trójkątów podziału posiada trzy wierzchołki.

Podsumowując:

$$\sum_{i=1}^S b_i = \sum_{i=1}^q \beta_i + 2 \sum_{i=1}^p \alpha_i + 3S. \quad (4.5)$$

Wykorzystując zależność (4.5), otrzymujemy:

$$(*) = \sum_{i=1}^S w_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^q \beta_i + 2 \sum_{i=1}^p \alpha_i + 3S \right) - S = \sum_{i=1}^S w_i + \sum_{i=1}^p \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \beta_i + \frac{1}{2} S.$$

W rezultacie:

$$P(F) = \sum_{i=1}^S w_i + \sum_{i=1}^p \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \beta_i + \frac{1}{2} S. \quad (4.6)$$

W drugim kroku zajmiemy się wielkościami: w i b .

Oznaczmy przez r ilość wewnętrznych, a przez ρ ilość brzegowych wierzchołków triangulacji. Wewnętrzne i brzegowe wierzchołki triangulacji zostały zdefiniowane w paragrafie 2.2. Wszystkich wierzchołków triangulacji jest:

$$W = r + \rho. \quad (4.7)$$

Określmy wielkości w i b wykorzystując ilości wewnętrznych i brzegowych wierzchołków triangulacji.

Punktom kratowym znajdującym się wewnątrz figury wielokątnej F odpowiadają: wewnętrzne punkty kratowe każdego z trójkątów podziału, punkty kratowe znajdujące się wewnątrz każdej z wewnętrznych krawędzi triangulacji oraz punkty kratowe będące wewnętrznymi wierzchołkami triangulacji. Zatem ilość wewnętrznych punktów kratowych figury F wynosi:

$$w = \sum_{i=1}^S w_i + \sum_{i=1}^p \alpha_i + r. \quad (4.8)$$

Podobnie brzegowym punktom kratowym figury F odpowiadają: punkty kratowe znajdujące się wewnątrz brzegowych krawędzi triangulacji oraz punkty kratowe, które są brzegowymi wierzchołkami triangulacji. W sumie otrzymujemy:

$$b = \sum_{i=1}^q \beta_i + \rho. \quad (4.9)$$

W trzecim kroku dowodu równości (4.1) wyrażmy charakterystykę Eulera i charakterystykę brzegu figury wielokątnej F za pomocą wielkości: p , q , r , ρ i S .

Wykorzystując zależności (4.7) i (4.2), charakterystyka Eulera figury F , zdefiniowana w paragrafie 2.2, przyjmuje postać:

$$\chi(F) = W - K + S = r + \rho - (p + q) + S. \quad (4.10)$$

Charakterystykę brzegu figury wielokątnej F wyrazimy przez ilość brzegowych wierzchołków i krawędzi triangulacji. Ponieważ brzegowych wierzchołków triangulacji jest ρ , a brzegowych krawędzi triangulacji jest q , zatem korzystając z definicji charakterystyki brzegu figury wielokątnej F z paragrafu 2.4, otrzymujemy:

$$\chi(\partial F) = \rho - q. \quad (4.11)$$

W ostatnim kroku sprawdzimy czy prawdziwa jest równość (4.1).

Wykorzystując zależności: (4.6), (4.8), (4.9) oraz (4.10) i (4.11), równość (4.1) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} P(F) - w - \frac{1}{2}b + \chi(F) - \frac{1}{2}\chi(\partial F) &= \\ &= \sum_{i=1}^S w_i + \sum_{i=1}^p \alpha_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \beta_i + \frac{1}{2}S - \left(\sum_{i=1}^S w_i + \sum_{i=1}^p \alpha_i + r \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^q \beta_i + \rho \right) + \\ &+ r + \rho - (p+q) + S - \frac{1}{2}(\rho - q) = \frac{3}{2}S - p - \frac{1}{2}q = \frac{3S - 2p - q}{2} = (*). \end{aligned}$$

Zauważmy, że $3S$ jest sumą krawędzi wszystkich trójkątów podziału (wziętych pod uwagę osobno), ponieważ każdy z S trójkątów podziału ma trzy krawędzie.

Z drugiej strony $2p+q$ to suma brzegowych krawędzi triangulacji oraz wewnętrznych krawędzi triangulacji policzonych podwójnie. Ponieważ każda wewnętrzna krawędź triangulacji jest częścią wspólną dwóch trójkątów podziału, dlatego prawdziwa będzie równość:

$$3S = 2p + q. \quad (4.12)$$

Wykorzystując równość (3.12), otrzymujemy:

$$(*) = 0.$$

c.n.d.

Reasumując, równość (4.1) jest prawdziwa dla dowolnej figury wielokątnej F o wierzchołkach kratowych. Zapiszmy to jako wniosek.

Wniosek:

Dla dowolnej figury wielokątnej F o wierzchołkach kratowych zachodzi uogólniony wzór Picka:

$$P(F) = w + \frac{1}{2}b - \chi(F) + \frac{1}{2}\chi(\partial F),$$

gdzie w i b oznaczają ilości punktów kratowych odpowiednio wewnątrz i na brzegu figury F oraz $\chi(F)$ oznacza charakterystykę Eulera figury F , a $\chi(\partial F)$ oznacza charakterystykę Eulera brzegu figury F .

Literatura

R. Courant, H. Robins, *Co to jest matematyka?*, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998.

D. Hilbert, S. Conh-Vossen, *Geometria Poglądowa*, PWN, Warszawa 1956.

M. Iżycki, M. Szurek, *Liczymy kropki* [w:] „Delta” 1980, nr 3.

W. Jędrychowski, M. Kordos (red.), *Szkoła Geometrii. Odczyty Kaliskie*, WSiP, Warszawa 1993.

W. Kryszicki, H. Pisarewska, T. Świątkowski, *Z geometrią za pan brat*, Iskry, Warszawa 1992.

E. Puczyłowski, *Twierdzenie Picka* [w:] „Delta” 1993, nr 4.

J. A. Szaszkin, *Charakterystyka Eulera*, Nauka, Moskwa 1984 (w języku rosyjskim).