

**Uniwersytet Wrocławski**  
**Wydział Matematyki i Informatyki**  
**Instytut Matematyczny**  
*specjalność: nauczycielska*

Paulina Hareża

**Elementarny dowód twierdzeń Pappusa-Guldina**

Praca magisterska  
napisana pod kierunkiem  
prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2016

.....  
(imiona i nazwisko)

.....  
(aktualny adres do korespondencji)

.....  
(numer PESEL)

.....  
(adres e-mail)

.....  
(wydział)

.....  
(kierunek studiów)

.....  
(poziom i forma studiów)

.....  
(numer albumu)

### OŚWIADCZENIE O PRAWACH AUTORSKICH I DANYCH OSOBOWYCH

Ja niżej podpisany/a ..... student/ka Wydziału .....  
..... kierunek ..... oświadczam, że przedkładana praca  
dyplomowa na temat: .....  
.....

- jest mojego autorstwa i nie narusza autorskich praw w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tekst jednolity: Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631, z późn. zm.) oraz dóbr osobistych chronionych prawem;
- nie zawiera danych i informacji uzyskanych w sposób niedozwolony;
- nie była wcześniej przedmiotem innej urzędowej procedury związanej z nadaniem dyplomu uczelni wyższej lub tytułu zawodowego;
- treść pracy dyplomowej przedstawionej do obrony, zawarta na przekazanym nośniku elektronicznym, jest identyczna z jej wersją drukowaną. Oświadczam, iż zostałem/am poinformowany/a o prawie dostępu do treści moich danych osobowych oraz ich poprawiania. Udostępnienie przez mnie danych osobowych ma charakter dobrowolny.

Wyrażam zgodę, na:

- udostępnienie mojej pracy dla celów naukowych i dydaktycznych;
- przetwarzanie moich danych osobowych w myśl ustawy z dnia 29 sierpnia 1997 r. o ochronie danych osobowych (tekst jednolity: Dz. U. z 2014 r., poz. 1182, z późn. zm.);
- umieszczenie mojej pracy w bazie danych Uczelni i jej przechowywanie przez okres stosowny do potrzeb Uczelni;
- wykorzystanie mojej pracy jako elementu komparatywnej bazy danych Uczelni;
- udostępnienie mojej pracy innym podmiotom celem prowadzenia kontroli antyplagiatowej prac dyplomowych i innych tekstów, które zostaną opracowane w przyszłości;
- porównywanie tekstu mojej pracy z tekstami innych prac znajdujących się w bazie porównawczej systemu antyplagiatowego i zasobach Internetu.

Wrocław, .....  
(rrrr - mm - dd)

.....  
(czytelny podpis autora pracy)

## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	<b>5</b>
1. Wprowadzenie. ....	7
<b>CZĘŚĆ I. Pierwsze twierdzenie Pappusa-Guldina</b> .....	<b>10</b>
2. Prawdziwość wzoru Pappusa-Guldina dla bryły $B(T)$ powstałej przez obrót dowolnego trójkąta $T$ wokół osi. ....	10
2.1. Obliczenie objętości bryły $B(T)$ z wykorzystaniem „tradycyjnych” metod.....	10
2.2. Obliczenie wyrażenia ze wzoru Pappusa-Guldina. ....	20
2.3. Wzór z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina dla figury $F$ będącej trójkątem.....	27
3. Addytywność.....	29
4. Sprawdzenie wzoru Pappusa-Guldina dla dowolnej figury wielokątnej. ....	31
5. Sprawdzenie wzoru Pappusa-Guldina dla dowolnej figury mierzalnej.....	31
<b>CZĘŚĆ II. Drugie twierdzenie Pappusa-Guldina</b> .....	<b>34</b>
6. Okręgi, wycinki okręgów i łamane jako krzywe mierzalne. ....	34
7. Krzywe wagowo mierzalne i dowód drugiego twierdzenia Pappusa-Guldina. ....	40
<b>Bibliografia</b> .....	<b>45</b>



## Wstęp

Celem pracy jest udowodnienie dwóch twierdzeń Pappusa-Guldina. Pierwsze z nich dotyczy wyliczenia objętości brył powstałych przez obrót figury mierzalnej wokół osi, co zostało pokazane w Części I. Drugie twierdzenie mówi o wyliczaniu pól powierzchni wyznaczonych przez obrót krzywej mierzalnej i wagowo mierzalnej wokół osi. Temu zagadnieniu poświęcona jest Część II.

Dowody obu twierdzeń można przeprowadzić korzystając z zaawansowanego rachunku różniczkowego i całkowego, jednak w tej pracy pokażemy, że mogą być one całkowicie elementarne. Będą wykorzystane jedynie podstawowe i nieskomplikowane fakty, definicje i twierdzenia matematyczne. Jedynym pojęciem, które może być uznane za nieco bardziej zaawansowane jest pojęcie granicy.

Wartością tak przeprowadzonych dowodów jest fakt, że mogą być one wykorzystane w szkole średniej na zajęciach pozalekcyjnych dedykowanych uczniom zdolnym. Uczniowie mogą przekonać się, że twierdzenia z pozoru zaawansowane nie wymagają dużej wiedzy matematycznej, by można było ich dowieść.

Zastosowane w pracy ujęcie tematu nie jest zaczerpnięte z literatury, lecz przeprowadzone samodzielnie.



## 1. Wprowadzenie.

W tym rozdziale zapoznamy się z oznaczeniami i założeniami, które będą wykorzystane w niniejszej pracy. Poznamy także dwa twierdzenia, które będą tematem dalszych rozważań.

### Oznaczenia i założenia.

W pracy będziemy stosować oznaczenia i założenia zapisane poniżej.

- $F$ , to figura płaska obracana wokół osi  $L$ , leżącej w tej samej płaszczyźnie co figura  $F$ , w taki sposób, że cała figura znajduje się po jednej stronie osi.
- $F$  jest figurą mierzalną.

Z pojęciem figury mierzalnej dokładniej zapoznamy się w Rozdziale 5. Póki co należy wiedzieć, że pojęcie to obejmuje bardzo dużo figur, w tym wszystkie wielokąty, koła, figury ograniczone wykresami funkcji ciągłych i wiele innych. Wspólną cechą figur mierzalnych jest to, że mają ściśle określone pole. Ponadto figury mierzalne mają dobrze zdefiniowany środek ciężkości.

- $B(F)$ , to bryła powstała przez obrót figury  $F$  wokół osi  $L$ .
- $V_{B(F)}$ , to objętość bryły  $B(F)$ .
- $P(F)$ , to pole figury  $F$ .
- $d_F$ , to odległość środka ciężkości figury  $F$  od osi obrotu  $L$ .
- $\gamma$ , to płaska krzywa obracana wokół osi  $L$ , która leży w tej samej płaszczyźnie, co krzywa  $\gamma$ , w taki sposób, że cała krzywa znajduje się po jednej stronie osi.
- $\gamma$  jest krzywą mierzalną oraz wagowo mierzalną.

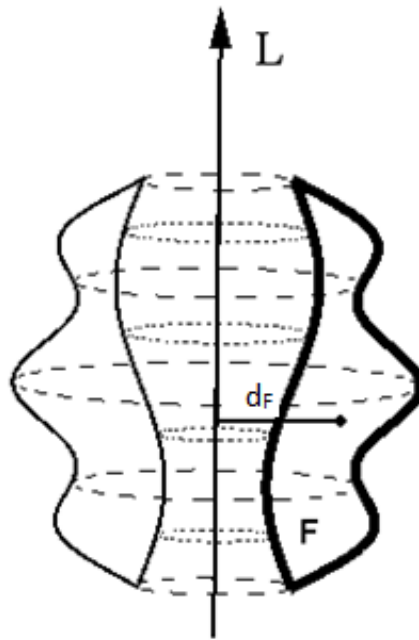
Pojęciu krzywej mierzalnej oraz wagowo mierzalnej dokładniej przyjrzymy się w Rozdziale 6 i 7. Na tę chwilę należy wiedzieć, że rodzina wspomnianych krzywych obejmuje między innymi łamane, okręgi, łuki okręgów, kombinacje złożone łamanych i łuków okręgów i wiele innych. Krzywe te mają ściśle określoną długość i dobrze zdefiniowany środek ciężkości.

- $D(\gamma)$  jest długością krzywej  $\gamma$ .
- $d_\gamma$  jest odległością środka ciężkości krzywej  $\gamma$  od osi obrotu  $L$ .
- $\Sigma_\gamma$  oznacza powierzchnię powstałą przez obrót krzywej  $\gamma$  wokół osi obrotu  $L$ .
- $P(\Sigma_\gamma)$ , to pole powierzchni  $\Sigma_\gamma$ .

### Twierdzenia.

Przedmiotem rozważań będą poniższe twierdzenia.

**Twierdzenie 1.1** (Pierwsze twierdzenie Pappusa-Guldina). *Objętość bryły powstałej przy obrocie płaskiej, mierzalnej figury  $F$  dookoła osi  $L$ , leżącej w płaszczyźnie tej figury i nie przecinającej jej, jest równa polu powierzchni figury  $F$  pomnożonemu przez długość okręgu o promieniu  $d_F$ , gdzie  $d_F$  jest odległością środka ciężkości figury  $F$  od osi obrotu  $L$ .*

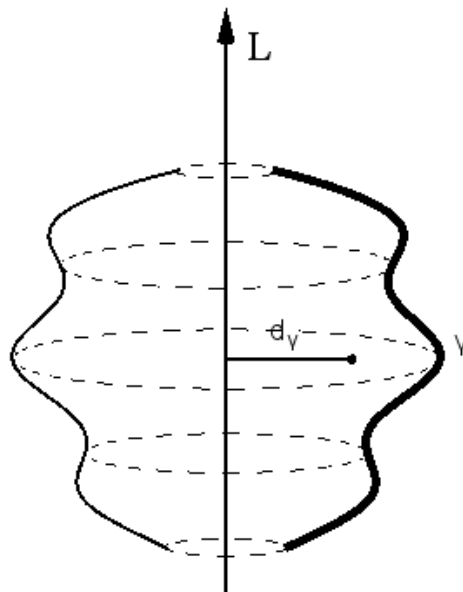


Rysunek 1.

Powyższe twierdzenie wyraża się wzorem

$$V_{B(F)} = P(F) \cdot 2\pi d_F. \quad (1.1)$$

**Twierdzenie 1.2** (Drugie twierdzenie Pappusa-Guldina). *Pole powierzchni powstałej przy obrocie mierzalnej oraz wagowo mierzalnej płaskiej krzywej  $\gamma$  dookoła osi  $L$ , leżącej w płaszczyźnie tej krzywej i nie przecinającej jej, jest równe długości krzywej  $\gamma$  pomnożonej przez długość okręgu o promieniu  $d_\gamma$ , gdzie  $d_\gamma$  jest odległością środka ciężkości krzywej  $\gamma$  od osi obrotu  $L$ .*



Rysunek 2.



Powyższe twierdzenie wyraża się wzorem

$$P(\Sigma_\gamma) = D(\gamma) \cdot 2\pi d_\gamma. \quad (1.2)$$

# CZĘŚĆ I. Pierwsze twierdzenie Pappusa-Guldina.

W tej części pracy, w Rozdziałach 2-5 skupimy się na rozważaniach dotyczących pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina. W Rozdziale 2 udowodnimy, że twierdzenie jest prawdziwe dla figury  $F$  będącej dowolnym trójkątem. W Rozdziale 3 pokażemy, że jeżeli wzór (1.1) jest prawdziwy dla brył powstałych przez obrót parami niezachodzących na siebie wielokątów, to jest także prawdziwy dla bryły powstałej przez obrót figury będącej sumą tych wielokątów. Na podstawie Rozdziału 2 i 3 w Rozdziale 4 udowodnimy, że wzór z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina jest prawdziwy dla figury  $F$  będącej dowolną figurą wielokątną. Natomiast w Rozdziale 5 sprawdzimy, że twierdzenie to jest prawdziwe dla dowolnej figury mierzalnej.

## 2. Prawdziwość wzoru Pappusa-Guldina dla bryły $B(T)$ powstałej przez obrót dowolnego trójkąta $T$ wokół osi.

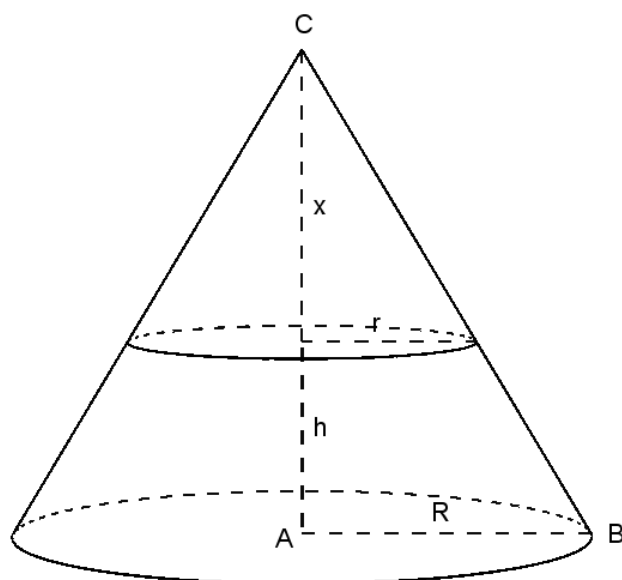
W tym rozdziale pokażemy, że za pomocą wzoru (1.1) możemy wyznaczyć objętość bryły powstałej przez obrót dowolnego trójkąta  $T$  wokół osi. W tym celu obliczymy objętość bryły  $B(T)$  korzystając z „tradycyjnych” metod, tzn. przede wszystkim wykorzystamy wzór służący do obliczania objętości stożka ściętego, a także poznamy kilka prostych pojęć matematycznych, takich jak odcinek zorientowany czy obieg trójkąta, które ułatwią wyznaczenie szukanej objętości. Następnie obliczymy wartość wyrażenia  $P(T) \cdot 2\pi d_T$  z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina. Na koniec porównamy otrzymane wartości.

### 2.1. Obliczenie objętości bryły $B(T)$ z wykorzystaniem „tradycyjnych” metod.

Zanim obliczymy objętość bryły  $B(T)$  powstałej przez obrót dowolnego trójkąta  $T$  wokół osi, wyprowadzimy kilka wzorów, które okażą się być pomocne do osiągnięcia postawionego celu.

#### Wzór pozwalający obliczyć objętość stożka ściętego

Na początku rozważań wyprowadzimy wzór pozwalający obliczyć objętość stożka ściętego, z którego w tym rozdziale będziemy wielokrotnie korzystać. Przyjmijmy oznaczenia jak na Rysunku 3.



Rysunek 3.

Wtedy:

- $R$  oznacza promień podstawy dużego stożka;
- $r$  jest promieniem podstawy małego stożka;
- $h + x$ , to wysokość dużego stożka;
- $x$  oznacza wysokość małego stożka.

Korzystając z twierdzenia Talesa zastosowanego do trójkąta  $ABC$  otrzymujemy

$$\frac{x}{r} = \frac{h + x}{R}.$$

Przekształcając powyższą równość dostajemy

$$x = \frac{rh}{R - r}.$$

Dalej niech  $V_{sd}$  oznacza objętość dużego stożka,  $V_{sm}$  objętość małego stożka, zaś  $V_{ss}$  objętość stożka ściętego. Korzystając ze wzoru pozwalającego obliczyć objętość stożka o danym promieniu podstawy i wysokości dostajemy

$$V_{sd} = \frac{1}{3}\pi R^2(h + x),$$

$$V_{sm} = \frac{1}{3}\pi r^2 x.$$

Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned}V_{s\acute{s}} &= V_{sd} - V_{sm} = \frac{1}{3}\pi R^2(h+x) - \frac{1}{3}\pi r^2x = \frac{1}{3}\pi(R^2(h+x) - r^2x) = \\&= \frac{1}{3}\pi(R^2h + (R^2 - r^2)x) = \frac{1}{3}\pi\left(R^2h + (R^2 - r^2)\frac{rh}{R+r}\right) = \\&= \frac{1}{3}\pi\left(R^2h + (R+r)(R-r)\frac{rh}{R-r}\right) = \frac{1}{3}\pi(R^2h + Rrh + r^2h) = \\&= \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Warto zauważyć, że wzór (2.1) jest uniwersalny, ponieważ można z niego korzystać zarówno w celu obliczenia objętości stożka ściętego, ale także walca – wtedy  $R = r$ . Dostaniemy więc

$$V_{s\acute{s}} = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + R \cdot R + R^2) = \pi R^2 h.$$

Końcowy wzór jest dobrze znanym wzorem na objętość walca o danym promieniu podstawy i wysokości.

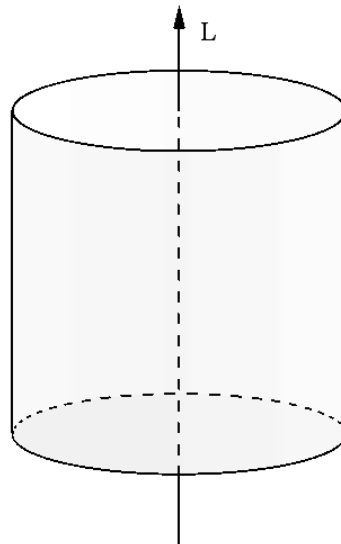
### **Znakowana objętość stożka ściętego wyznaczonego przez obrót zorientowanego odcinka wokół osi.**

Zanim przejdziemy do rozważań skupiających się na dogłębnym przeanalizowaniu problemu postawionego w tej części pracy, przedstawimy dwa założenia, które będą wykorzystywane do końca Rozdziału 2. Przyjmijmy:

- oś obrotu  $L$  jako oś  $Oy$  układu współrzędnych;
- punkty, które są wierzchołkami figury obracanej wokół osi  $L$ , jako punkty z I i IV ćwiartki układu współrzędnych, czyli z obszaru znajdującego się na prawo od osi  $Oy$ .

Aby móc mówić o bryle wyznaczonej przez obrót zorientowanego odcinka wokół osi, najpierw powiemy co będziemy rozumieć przez bryłę wyznaczoną przez obrót odcinka, któremu nie została jeszcze nadana orientacja (zwrot). W zależności od położenia odcinka względem osi obrotu  $L$ , możemy otrzymać obiekty wymienione poniżej.

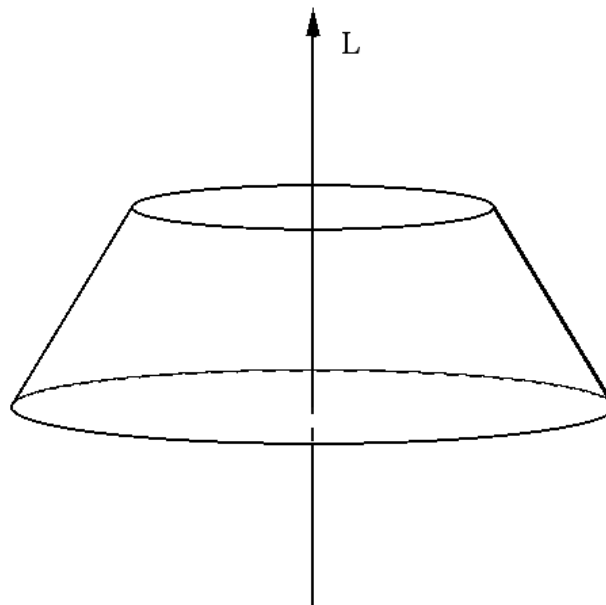
- Walec, gdy odcinek będzie równoległy do osi obrotu  $L$ , co ilustruje Rysunek 4.



Rysunek 4.

Obracany odcinek jest wówczas wysokością walca.

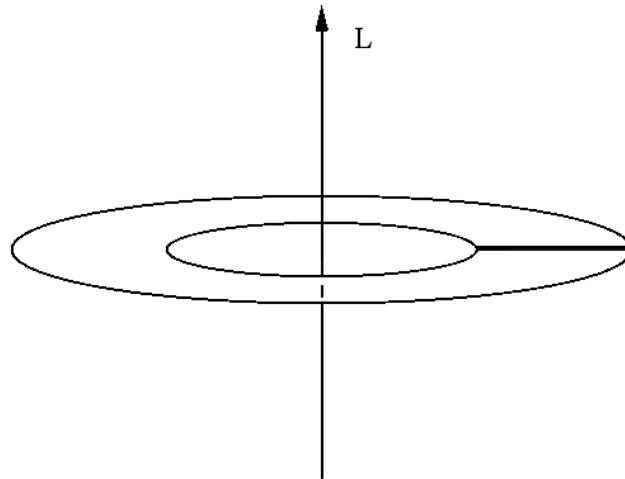
- Stożek ścięty, gdy odcinek nie jest równoległy ani prostopadły do osi obrotu  $L$ , co przedstawia Rysunek 5.



Rysunek 5.

Obracany odcinek jest wówczas tworzącą stożka ściętego.

- Pierścień leżący w płaszczyźnie odcinka, gdy odcinek jest prostopadły do osi obrotu  $L$ , co ilustruje Rysunek 6.



Rysunek 6.

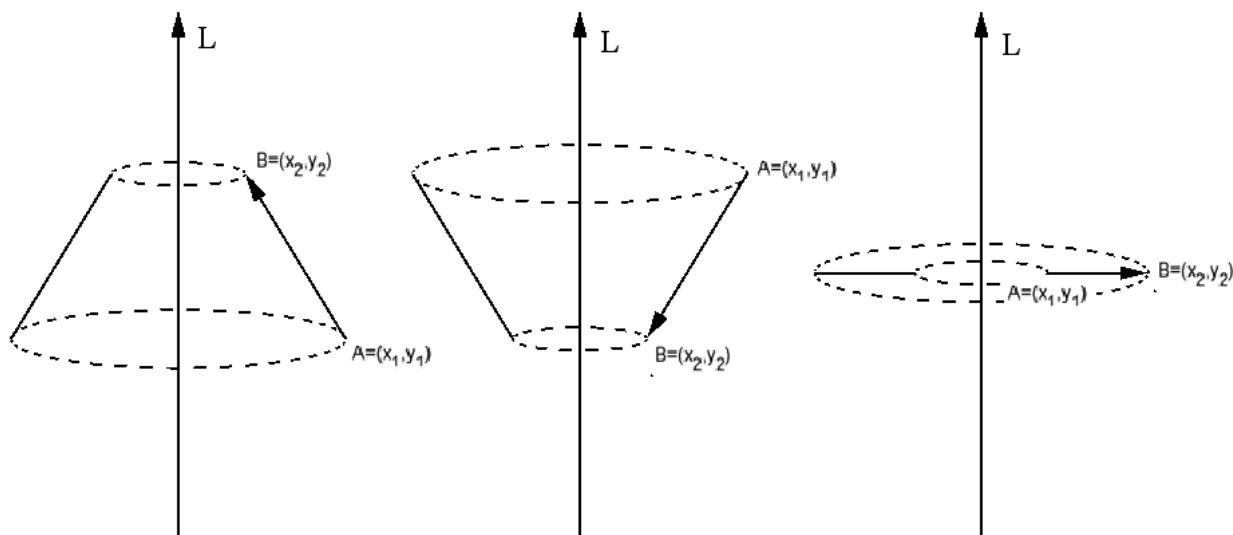
Jest to przypadek zdegenerowany, gdyż nie zostaje wyznaczona żadna bryła. Obracany odcinek jest tutaj szerokością pierścienia.

Gdy wiemy już jak wyglądają bryły wyznaczone przez obrót odcinka wokół osi, któremu nie został jeszcze przypisany zwrot, możemy zapoznać się z pojęciem zorientowanego odcinka.

**Definicja 2.1.** *Zorientowanym odcinkiem* nazywamy odcinek o końcach w punktach  $A = (x_1, y_1)$  i  $B = (x_2, y_2)$  o zadanej kolejności, która określa jego zwrot. Na rysunkach zwrot zaznaczony jest strzałką.

Nietrudno się przekonać, że obracając zorientowany odcinek wokół osi otrzymamy bryły czy figury o takich samych kształtach jak na Rysunkach 4, 5, 6.

Przejdźmy zatem do rozważań związanych z pojęciem znakowanej objętości stożka o zorientowanej tworzącej. Na Rysunku 7 przedstawione są trzy możliwe położenia zorientowanego odcinka o końcach  $A = (x_1, y_1)$  i  $B = (x_2, y_2)$  w układzie kartezjańskim w zależności od wartości ich współrzędnych na osi  $Oy$ . Ponadto wyznaczone są bryły powstałe przez ich obrót wokół osi  $L$ .



Rysunek 7.

Zapoznamy się teraz z definicją znakowanej objętości stożka ściętego, wyznaczonego przez obrót zorientowanego odcinka wokół osi.

**Definicja 2.2.** *Znakowana objętość* stożka ściętego o tworzącej  $AB$  będącej zorientowanym odcinkiem, to liczba, która zależy od położenia i orientacji obracanego odcinka  $AB$ , gdzie  $A = (x_1, y_1)$  jest jego początkiem, zaś  $B = (x_2, y_2)$  końcem, w taki sposób, że daje:

- objętość stożka ściętego o tworzącej  $AB$ , gdy  $y_1 < y_2$ ;
- liczbę ujemną, przeciwną do objętości stożka ściętego o tworzącej  $AB$ , gdy  $y_1 > y_2$ ;
- zero, gdy  $y_1 = y_2$ .

Liczbę tę będziemy oznaczać symbolem  $W(A, B)$ .

Korzystając ze wzoru (2.1) można w prosty sposób zapisać wzór, który daje oczekiwane przez nas wartości we wszystkich trzech przypadkach z Definicji 2.2

$$W(A, B) = W((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \frac{1}{3} \pi (y_2 - y_1) (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2). \quad (2.2)$$

Warto zauważyć, że jeśli zmienimy orientację odcinka, to znakowana objętość stożka ściętego zmieni wartość na przeciwną.

### **Wzór pozwalający obliczyć objętość bryły $B(T)$ powstałej przez obrót zorientowanego trójkąta $T$ wokół osi.**

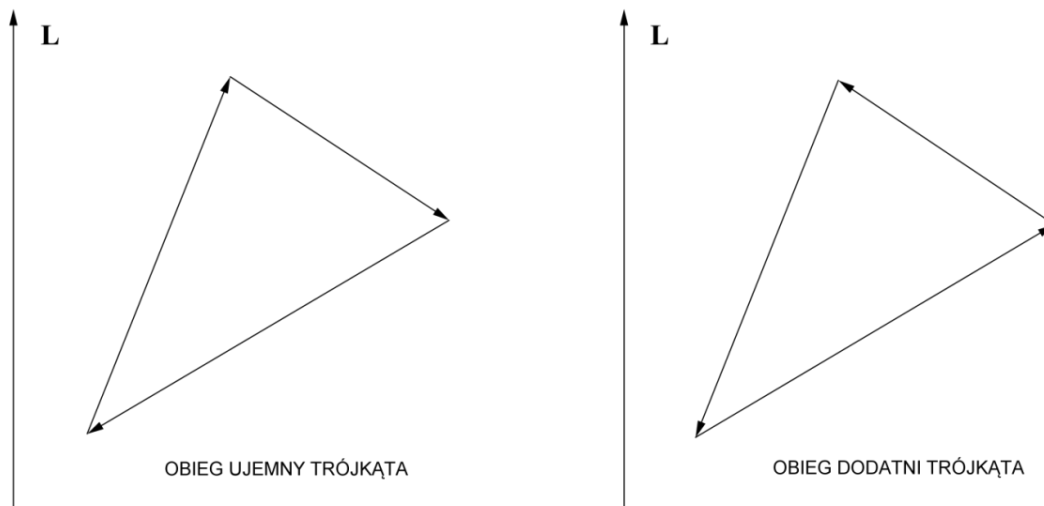
Zanim przystąpimy do wyznaczenia wzoru pozwalającego obliczyć objętość bryły  $B(T)$  powstałej przez obrót zorientowanego trójkąta  $T$  wokół osi, zapoznajmy się z pojęciem obiegu trójkąta.

**Definicja 2.3.** *Obiegiem trójkąta* nazywamy kierunek ruchu po obwodzie trójkąta. W każdym trójkącie są dwa obiegi, jeden zgodny z ruchem wskazówek zegara zwany *obiegiem ujemnym*, a drugi przeciwny do ruchu wskazówek zegara, zwany *obiegiem dodatnim*.

Obieg trójkąta można opisać za pomocą uporządkowania jego wierzchołków, np. obieg  $ABC$  oznacza kierunek ruchu od wierzchołka  $A$  do  $B$ , następnie od  $B$  do  $C$  i od  $C$  do  $A$ . Ten sam obieg wyznacza uporządkowanie  $BCA$  oraz  $CAB$ . Obieg przeciwny wyznaczony jest przez uporządkowania  $ACB$ ,  $CBA$  lub  $BAC$ .

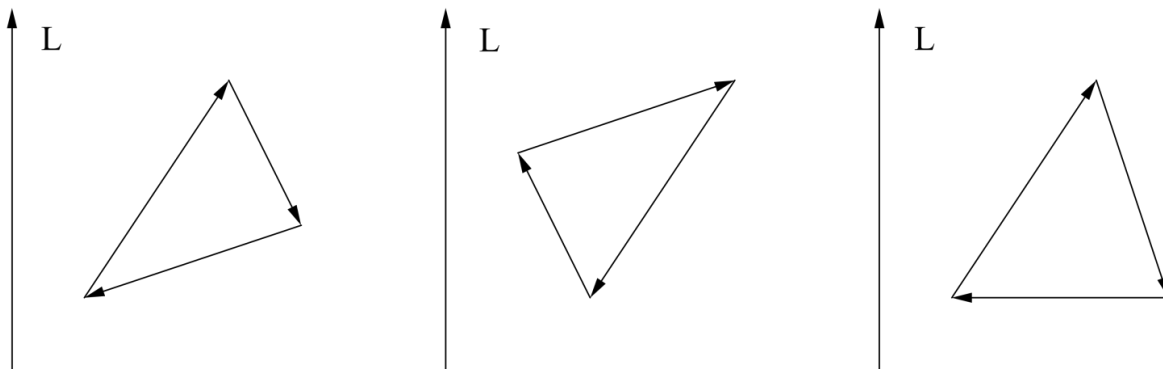
Trójkąt wraz z przyjętym obiegiem będzie nazywany *zorientowanym trójkątem*.

Na Rysunku 8 zilustrowane zostały dwa możliwe obiegi trójkąta  $T$ .



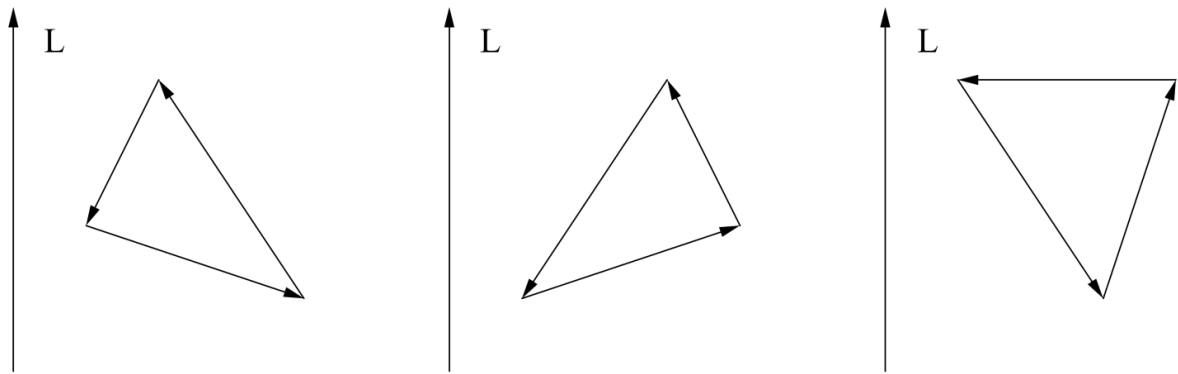
Rysunek 8.

W każdym z tych przypadków możemy wyróżnić trzy położenia trójkąta  $T$ , które będą znacząco różniły się od siebie. Na Rysunku 9a zilustrowane są owe położenia trójkąta w przypadku obiegu ujemnego, natomiast na Rysunku 9b w przypadku obiegu dodatniego.



Rysunek 9a.





Rysunek 9b.

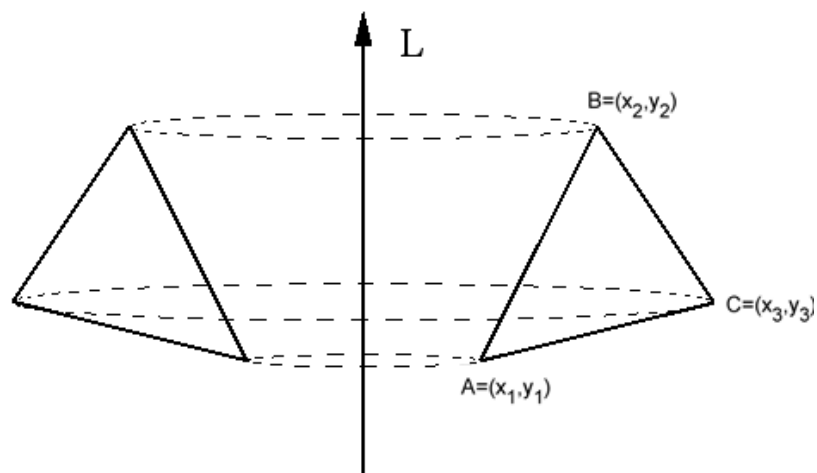
Ze względu na znaki znakowanych objętości stożków ściętych wyznaczonych przez zorientowane odcinki stanowiące obwód trójkąta o zadanym obiegu, zarówno w przypadku Rysunku 9a jak i Rysunku 9b, możemy wyróżnić kolejno trzy przypadki znacząco różniące się od siebie:

- w pierwszym przypadku dwie spośród znakowanych objętości stożków ściętych wyznaczonych przez boki trójkąta mają znaki ujemne, a trzecia dodatni;
- w drugim przypadku dwie spośród znakowanych objętości stożków ściętych wyznaczonych przez boki trójkąta mają znaki dodatnie, a trzecia ujemny;
- w trzecim przypadku jedna ze znakowanych objętości stożków ściętych ma znak dodatni, jedna ujemny, a jedna jest zerem.

Pozostałe możliwe położenia trójkąta  $T$  zarówno w przypadku obiegu ujemnego jak i dodatniego, choć z pozoru się różnią, w rezultacie odpowiadają któremuś z wyżej wymienionych przypadków.

Wyznamy objętość bryły  $B(T)$  dla wszystkich możliwych położeni trójkąta  $T$ , które zostały przedstawione na Rysunku 9a, czyli w przypadku ujemnego obiegu trójkąta. Rozumowanie dotyczące obiegu dodatniego będzie analogiczne więc pozostawimy je Czytelnikowi do samodzielnego przeprowadzenia.

Najpierw zastanowimy się, jak w prosty sposób można obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót niezorientowanego trójkąta wokół osi. Spójrzmy na Rysunek 10.

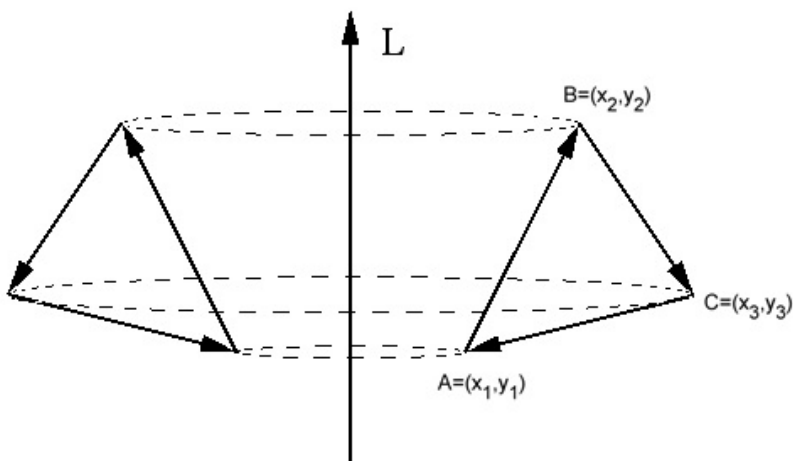


Rysunek 10.

Oznaczmy przez  $S(AB)$ ,  $S(BC)$ ,  $S(AC)$  stożki ścięte o tworzących  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$  odpowiednio. Z rysunku widać, że

$$V_{B(T)} = V_{S(AC)} + V_{S(BC)} - V_{S(AB)}.$$

Przypatrzmy się teraz Rysunkowi 11, który przedstawia jedno z trzech możliwych położeń trójkąta  $T$  o ujemnym obiegu, a także stożki ścięte o zorientowanych tworzących  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$ , wyznaczone przez ich obrót względem osi  $L$ .



Rysunek 11.

Korzystając z definicji znakowanej objętości stożka ściętego wyznaczonego przez zorientowany odcinek, możemy zapisać

$$W(A, B) = V_{S(AB)},$$

$$W(B, C) = -V_{S(BC)},$$

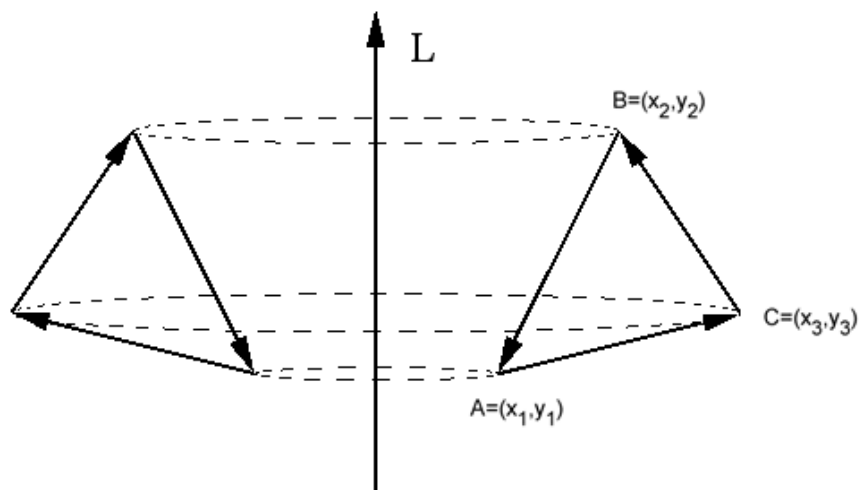
$$W(C, A) = -V_{S(AC)}.$$

Obliczając objętość bryły  $B(T)$ , dostajemy

$$\begin{aligned} V_{B(T)} &= -V_{S(AB)} + V_{S(BC)} + V_{S(AC)} = -W(A, B) - W(B, C) - W(C, A) = \\ &= -(W(A, B) + W(B, C) + W(C, A)). \end{aligned}$$

Znając już sposób rozumowania przy obliczaniu objętości brył powstałych przez obrót zorientowanego trójkąta wokół osi, możemy w podobny sposób zapisać objętości brył w pozostałych dwóch przypadkach związanych z obiegiem ujemnym.

Na Rysunku 12 przedstawiony jest drugi przypadek położenia trójkąta  $T$  o obiegu ujemnym względem osi obrotu  $L$  i bryła powstała przez jego obrót.

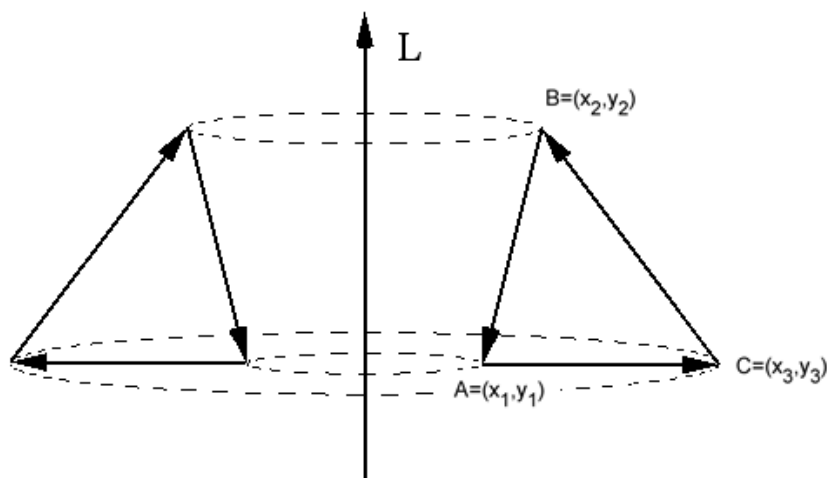


Rysunek 12.

Korzystając z powyższych rozważań możemy zapisać

$$V_{B(T)} = -V_{S(AB)} + V_{S(BC)} - V_{S(AC)} = -W(A, B) - W(B, C) - W(C, A) = \\ = -(W(A, B) + W(B, C) + W(C, A)).$$

Rysunek 13 ilustruje trzeci przypadek położenia trójkąta  $T$  o obiegu ujemnym względem osi obrotu  $L$  i bryłę powstałą przez jego obrót wokół osi.



Rysunek 13.

Ponieważ na mocy wzoru (2.2),  $W(C, A)$  ma wartość zero, otrzymujemy

$$V_{B(T)} = -V_{S(AB)} + V_{S(BC)} = -W(A, B) - W(B, C) = -(W(A, B) + W(B, C)).$$

Z racji, że  $W(C, A) = 0$ , również w tym przypadku możemy zapisać, że

$$V_{B(T)} = -(W(A, B) + W(B, C) + W(C, A)).$$

Przeprowadzając podobną analizę dla trójkąta o dodatnim obiegu, w poszczególnych przypadkach otrzymamy wyrażenia takie jak przy obiegu ujemnym, ale z przeciwnym znakiem. Aby ujednoczyć rezultaty niezbędne jest nałożenie modułu, co daje

ostateczny wzór pozwalający obliczyć objętość bryły  $B(T)$  niezależnie od obiegu trójkąta  $T$ , który ma postać

$$V_{B(T)} = |W(A, B) + W(B, C) + W(C, A)|. \quad (2.3)$$

Zapiszmy więc uniwersalny wzór pozwalający obliczyć objętość bryły  $B(T)$  powstałej przez obrót dowolnego trójkąta  $T$  o zadanym obiegu wokół osi  $L$ , uwzględniając współrzędne wierzchołków trójkąta  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$  oraz  $C = (x_3, y_3)$ . Podstawiamy konkretne wyrażenia korzystając ze wzoru (2.2) w miejsce  $W(A, B)$ ,  $W(B, C)$ ,  $W(C, A)$  do wzoru (2.3). Mamy zatem

$$\begin{aligned} V_{B(T)} &= |W(A, B) + W(B, C) + W(C, A)| = \\ &= |W((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + W((x_2, y_2), (x_3, y_3)) + W((x_3, y_3), (x_1, y_1))| = \\ &= \frac{1}{3}\pi |((y_2 - y_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (y_3 - y_2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2) + \\ &\quad + (y_1 - y_3)(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2))| \end{aligned} \quad (2.4)$$

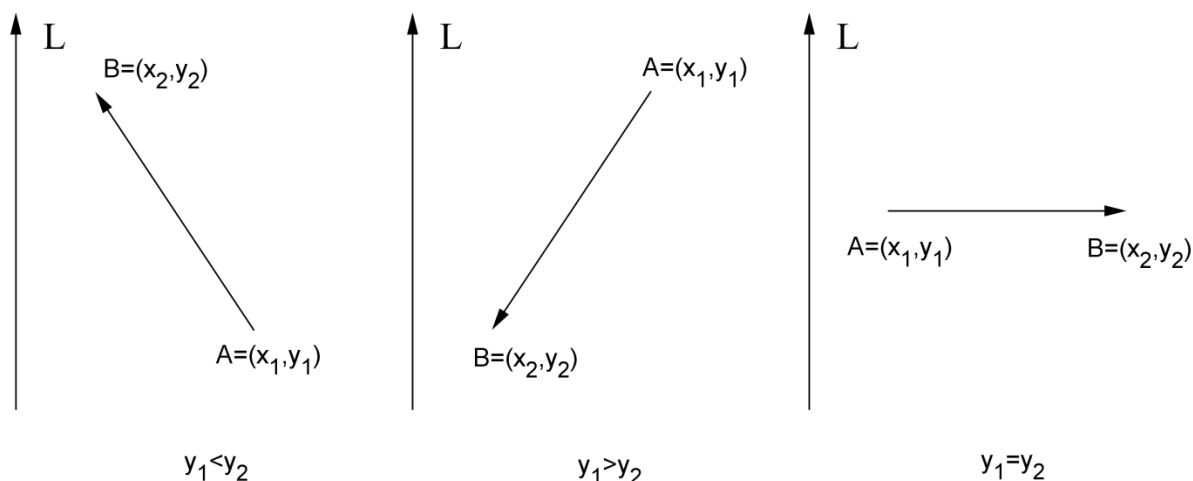
## 2.2. Obliczenie wyrażenia ze wzoru Pappusa-Guldina.

Gdy wiemy już jak wyraża się objętość bryły  $B(T)$  powstałej przez obrót dowolnego trójkąta wokół osi, obliczona „tradycyjnymi” metodami, wyznaczymy wartość wyrażenia z prawej strony wzoru (1.1) dla tej samej bryły  $B(T)$ . W tym celu, podobnie jak w poprzednim przypadku, wyprowadzimy wzory pomocnicze.

Od tego momentu wartość wyrażenia z prawej strony wzoru (1.1) dla bryły powstałej przez obrót figury  $F$  wokół osi obrotu  $L$ , będziemy oznaczać przez  $G_1(F)$ .

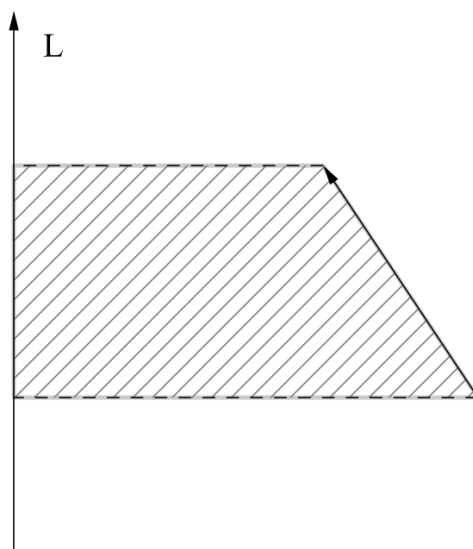
### Znakowane pole trapezu o jednym z ramion będącym fragmentem osi obrotu $L$ i drugim będącym zorientowanym odcinkiem.

Na początku przypomnimy możliwe położenia zorientowanego odcinka o końcach  $A = (x_1, y_1)$  i  $B = (x_2, y_2)$  w układzie kartezjańskim w zależności od wartości ich współrzędnych na osi  $Oy$ . Ilustruje to Rysunek 14.



Rysunek 14.

Po umieszczeniu zorientowanego odcinka po prawej stronie osi obrotu  $L$ , w taki sposób, że nie jest on prostopadły do osi, wyznaczamy trapez, o jednym z ramion będącym tym samym zorientowanym odcinkiem i drugim będącym fragmentem osi obrotu. Podstawy trapezu są prostopadłe do osi. Przykładowy trapez wyznaczony przez zorientowany odcinek jest przedstawiony na Rysunku 15.



Rysunek 15.

Warto zauważyć, że otrzymana figura zawsze będzie trapezem prostokątnym.

Zapoznajmy się teraz z definicją znakowanego pola trapezu, która będzie odnosić się do trapezów opisanych powyżej.

**Definicja 2.4.** Znakowanym polem trapezu wyznaczonym przez odcinek  $AB$ , nazywamy liczbę, która zależy od położenia i orientacji odcinka  $AB$ , gdzie  $A = (x_1, y_1)$  jest jego początkiem, zaś  $B = (x_2, y_2)$  końcem w taki sposób, że daje:

- pole trapezu o jednym z ramion  $AB$  gdy  $y_1 < y_2$ ;
- liczbę ujemną, przeciwną do pola trapezu o jednym z ramion  $AB$  , gdy  $y_1 > y_2$ ;
- zero, gdy  $y_1 = y_2$ .

Liczbę tę będziemy oznaczać  $Q(A, B)$ .

Warto zauważyć, że jeśli zmienimy orientację odcinka, to znakowane pole trapezu zmieni wartość na przeciwną.

Korzystając ze wzoru służącego do obliczenia pola trapezu o danych długościach podstaw i wysokości, możemy zapisać

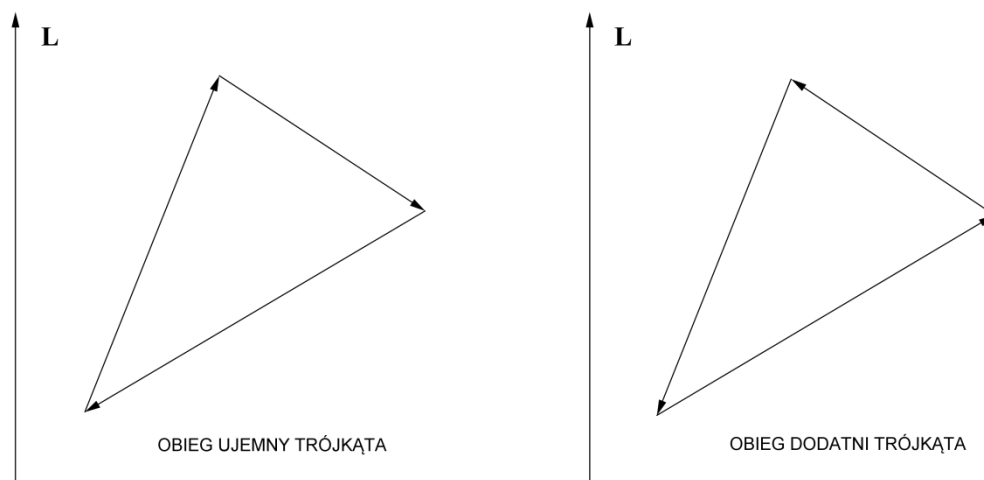
$$Q(A, B) = Q((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_2 - y_1), \quad (2.5)$$

co daje oczekiwane wartości we wszystkich trzech przypadkach z Definicji 2.4.

### Wzór pozwalający obliczyć pole zorientowanego trójkąta.

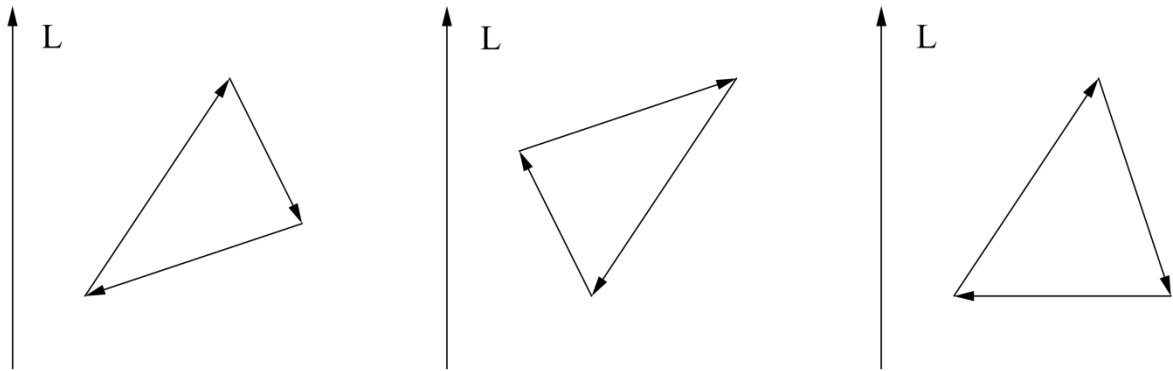
W tej części wyprowadzimy wzór pozwalający obliczyć pole zorientowanego trójkąta. Posłuży on nam w dalszej części rozważań do wyznaczenia wyrażenia  $G_1(T)$ . W tym celu skorzystamy z definicji znakowanego pola trapezu..

Na Rysunku 16 przypomniane zostały dwa możliwe obiegi trójkąta  $T$ .

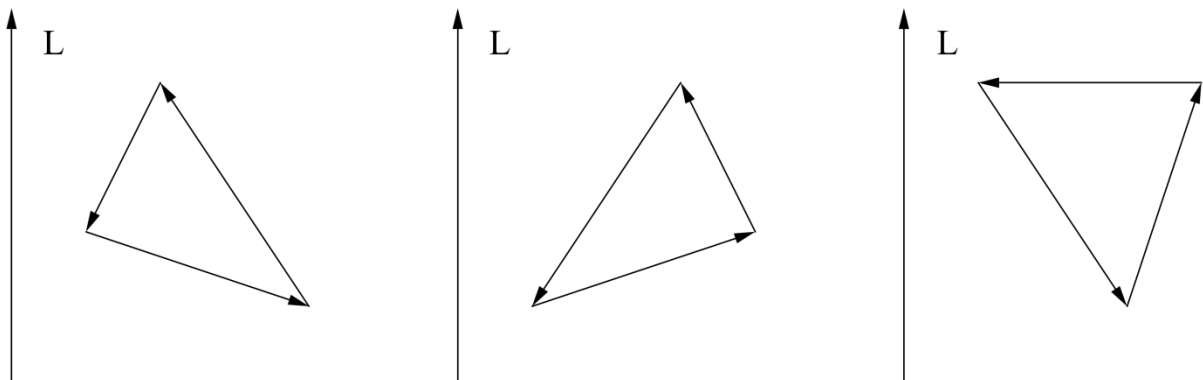


Rysunek 16.

Podobnie jak wcześniej, w każdym z tych przypadków możemy wyróżnić trzy położenia trójkąta  $T$ , które będą znacząco różniły się od siebie. Rysunek 17a ilustruje możliwe położenia trójkąta  $T$  w przypadku obiegu ujemnego, natomiast Rysunek 17b w przypadku obiegu dodatniego.



Rysunek 17a.



Rysunek 17b.

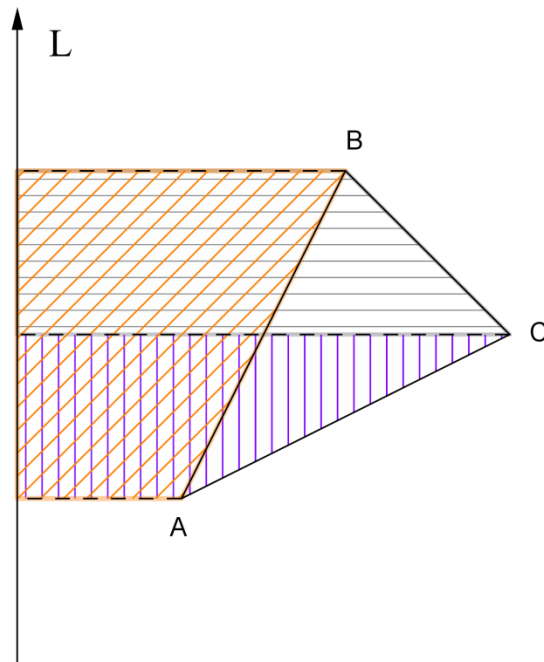
Podobnie jak wcześniej, ze względu na znaki znakowanych pól trapezów, wyznaczonych przez zorientowane odcinki stanowiące obwód zorientowanego trójkąta, zarówno w przypadku Rysunku 17a jak i Rysunku 17b możemy wyróżnić trzy przypadki znacząco różniące się od siebie:

- w pierwszym przypadku dwie spośród znakowanych objętości stożków ściętych wyznaczonych przez boki trójkąta mają znaki ujemne, a trzecia dodatni;
- w drugim przypadku dwie spośród znakowanych objętości stożków ściętych wyznaczonych przez boki trójkąta mają znaki dodatnie, a trzecia ujemny;
- w trzecim przypadku jedna ze znakowanych objętości stożków ściętych ma znak dodatni, jedna ujemny, a jedna jest zerem.

Pozostałe położenia trójkąta  $T$  względem osi  $L$  będą sprowadzały się do któregoś z wymienionych przypadków.

Tak jak przy wyznaczaniu objętości bryły powstałej przez obrót zorientowanego trójkąta wokół osi  $L$ , tak też w przypadku wyznaczania pola trójkąta o zadanym obiegu, omówimy tylko to, co dzieje się w przypadku obiegu ujemnego. Rozważania dotyczące obiegu dodatniego, ponieważ są analogiczne, pozostawiamy Czytelnikowi do samodzielnego wykonania.

Zanim przejdziemy do obliczenia pola trójkąta o zadanym obiegu, przyjrzyjmy się jak obliczyć pole dowolnego niezorientowanego trójkąta. Spójrzmy na Rysunek 18.

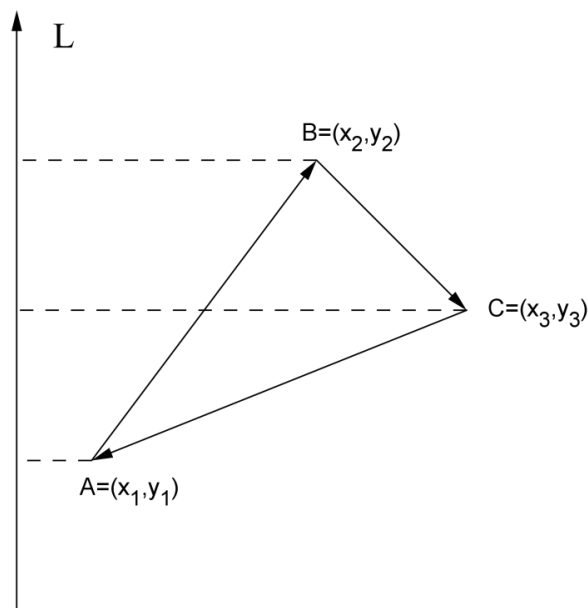


Rysunek 18.

Oznaczmy przez  $t(AB)$ ,  $t(BC)$ ,  $t(AC)$  trapezy o jednym z ramion będącym fragmentem osi obrotu i drugim odcinkiem  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$  odpowiednio. Z rysunku widać, że

$$P(T) = P(t(BC)) + P(t(AC)) - P(t(AB)).$$

Przypatrzmy się teraz Rysunkowi 19, który przedstawia jedno z trzech możliwych położenie trójkąta  $T$  o ujemnym obiegu względem osi  $L$ , a także trapezy, w których jedno z ramion jest zorientowanym odcinkiem  $AB$ ,  $BC$  i  $AC$ .



Rysunek 19.

Korzystając z definicji znakowanego pola trapezu i rozważań dotyczących obliczania pola niezorientowanego trójkąta możemy zapisać



$$Q(A, B) = P(t(AB)),$$

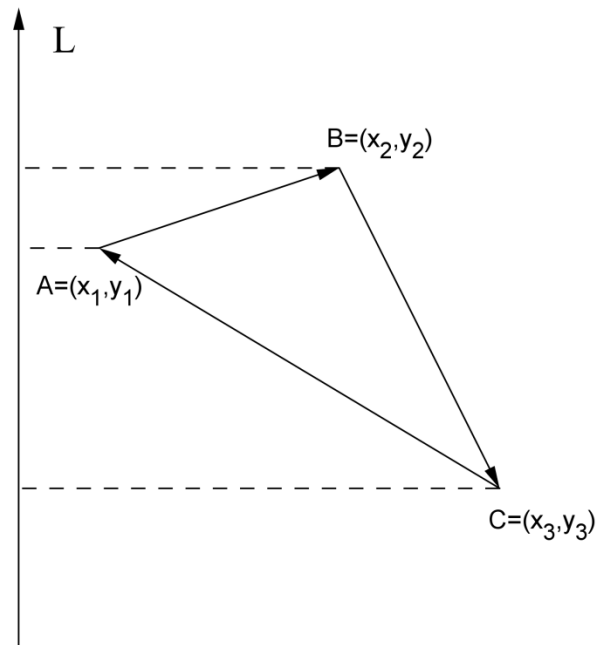
$$Q(B, C) = -P(t(BC)),$$

$$Q(C, A) = -P(t(AC)).$$

Obliczając pole zorientowanego trójkąta  $T$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} P(T) &= -P(t(AB)) + P(t(BC)) + P(t(AC)) = -Q(A, B) - Q(B, C) - Q(C, A) = \\ &= -(Q(A, B) + Q(B, C) + Q(C, A)). \end{aligned}$$

Znając już sposób rozumowania przy obliczaniu pola trójkąta o zadanym obiegu, możemy przeanalizować pozostałe dwa przypadki położenia trójkąta  $T$  względem osi obrotu  $L$ , związane z obiegiem ujemnym. Na Rysunku 20 przedstawiony jest drugi przypadek położenia trójkąta  $T$  o obiegu ujemnym względem osi obrotu  $L$ .

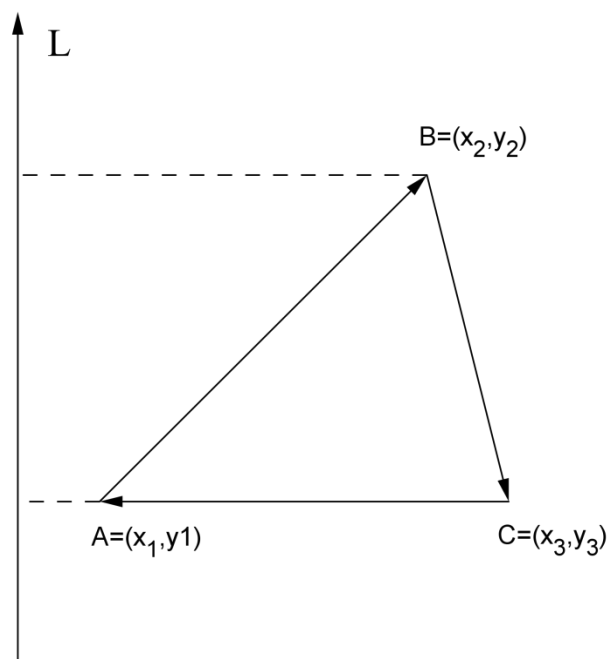


Rysunek 20.

Korzystając z powyższych rozważań możemy zapisać

$$\begin{aligned} P(T) &= -P(t(AB)) + P(t(BC)) - P(t(AC)) = -Q(A, B) - Q(B, C) - Q(C, A) = \\ &= -(Q(A, B) + Q(B, C) + Q(C, A)). \end{aligned}$$

Rysunek 21 ilustruje trzeci przypadek położenia trójkąta  $T$  o obiegu ujemnym względem osi obrotu  $L$ .



Rysunek 21.

Ponieważ  $P(t(AC))$  ma wartość zero, otrzymujemy

$$P(T) = -P(t(AB)) + P(t(BC)) = -Q(A, B) - Q(B, C) = -(Q(A, B) + Q(B, C)).$$

Z racji, że  $Q(C, A) = 0$ , również w tym przypadku możemy zapisać, że

$$P(T) = -(Q(A, B) + Q(B, C) + Q(C, A)).$$

Przeprowadzając podobną analizę dla trójkąta o obiegu dodatnim, w poszczególnych przypadkach otrzymamy wyrażenia takie jak przy obiegu ujemnym, ale z przeciwnym znakiem. Aby ujednolicić rezultaty niezbędne jest nałożenie modułu, co daje ostateczny wzór pozwalający obliczyć pole trójkąta  $T$  niezależnie od jego orientacji, który ma postać

$$V_{B(T)} = |Q(A, B) + Q(B, C) + Q(C, A)|. \quad (2.6)$$

Zapiszemy więc uniwersalny wzór pozwalający obliczyć pole trójkąta  $T$  o zadanym obiegu, uwzględniając współrzędne jego wierzchołków  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$  oraz  $C = (x_3, y_3)$ . W tym celu podstawimy odpowiednie wyrażenia korzystając ze wzoru (2.5) w miejsce  $Q(A, B)$ ,  $Q(B, C)$ ,  $Q(C, A)$  do wzoru (2.6). Mamy

$$\begin{aligned}
P(T) &= |Q(A, B) + Q(B, C) + Q(C, A)| = \\
&= |Q((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + Q((x_2, y_2), (x_3, y_3)) + Q((x_3, y_3), (x_1, y_1))| = \\
&= \frac{1}{2} |((x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) + (x_1 + x_3)(y_1 - y_3))| = \\
&= \frac{1}{2} |(x_1y_2 + x_2y_2 - x_1y_1 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_3 - x_2y_2 - x_3y_2 + x_1y_1 + x_3y_1 \\
&\quad - x_1y_3 - x_3y_3)| = \frac{1}{2} |(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)|.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

### 2.3. Wzór z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina dla figury $F$ będącej trójkątem.

W tej części rozważań udowodnimy, że wzór z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina zachodzi dla przypadku, gdy figura  $F$  jest trójkątem. W tym celu zapoznamy się z definicją środka ciężkości trójkąta, o którym mowa np. w pozycji [1] w podrozdziale 5.3.

**Definicja 2.5.** *Środkiem ciężkości trójkąta* nazywamy punkt, którego współrzędne są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych wierzchołków.

Jeżeli punkty  $A = (x_1, y_1)$ ,  $B = (x_2, y_2)$ ,  $C = (x_3, y_3)$  będą wierzchołkami trójkąta, to jeśli środek ciężkości tego trójkąta oznaczymy przez  $S$  otrzymamy

$$S = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right).$$

Skoro  $d_T$  jest odległością środka ciężkości trójkąta od osi obrotu, zatem interesuje nas tylko pierwsza współrzędna, więc

$$d_T = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Podstawiając odpowiednie wartości do wyrażenia  $G_1(T)$  otrzymamy

$$G_1(T) = P(T) \cdot 2\pi d_T = \frac{1}{2} |(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3)| 2\pi \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \tag{2.8}$$

#### Porównanie otrzymanych wartości.

W poprzedniej części rozdziału otrzymaliśmy wzór pozwalający obliczyć objętość bryły  $B$  powstałej przez obrót dowolnego trójkąta  $T$  wokół osi, który ma postać

$$\begin{aligned}
V_{B(T)} &= \frac{1}{3}\pi |((y_2 - y_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (y_3 - y_2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2) + \\
&\quad + (y_1 - y_3)(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2))|,
\end{aligned}$$

a także wyrażenie z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina rozszerzone o wzór na pole zorientowanego trójkąta oraz środek ciężkości trójkąta, które ma postać

$$G_1(T) = P(T) \cdot 2\pi d_T = \frac{1}{2} \left| (x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3) \right| 2\pi \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Aby móc stwierdzić, że wzór Pappusa-Guldina zachodzi, musimy pokazać, że

$$V_{B(T)} = G_1(T).$$

W tym celu przekształcimy oba wzory.

$$\begin{aligned} V_{B(T)} &= \frac{1}{3}\pi \left| ((y_2 - y_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + (y_3 - y_2)(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2) + \right. \\ &\quad \left. + (y_1 - y_3)(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2)) \right| = \\ &= \frac{1}{3}\pi \left| x_1^2y_2 + x_1x_2y_2 + x_2^2y_2 - x_1^2y_1 - x_1x_2y_1 - x_2^2y_1 + \right. \\ &\quad \left. + x_2^2y_3 + x_2x_3y_3 + x_3^2y_3 - x_2^2y_2 - x_2x_3y_2 - x_3^2y_2 + \right. \\ &\quad \left. + x_1^2y_1 + x_1x_3y_1 + x_3^2y_1 - x_1^2y_2 - x_1x_3y_2 - x_3^2y_2 \right| = \\ &= \frac{1}{3}\pi \left| x_1^2y_2 + x_1x_2y_2 - x_1x_2y_1 - x_2^2y_1 + x_2^2y_3 + x_2x_3y_3 - x_2x_3y_2 - x_3^2y_2 + \right. \\ &\quad \left. + x_1x_3y_1 + x_3^2y_1 - x_1^2y_2 - x_1x_3y_2 \right|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1(T) &= \frac{1}{2} \left| (x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3) \right| 2\pi \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \\ &= \frac{1}{3}\pi \left| x_1^2y_2 - x_1x_2y_1 + x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2 + x_1x_3y_1 - x_1^2y_3 + \right. \\ &\quad \left. + x_1x_2y_2 - x_2^2y_1 + x_2^2y_3 - x_2x_3y_2 + x_2x_3y_1 - x_1x_2y_3 + \right. \\ &\quad \left. + x_1x_3y_2 - x_2x_3y_1 + x_2x_3y_3 - x_3^2y_2 + x_3^2y_1 - x_1x_3y_3 \right| = \\ &= \frac{1}{3}\pi \left| x_1^2y_2 + x_1x_2y_2 - x_1x_2y_1 - x_2^2y_1 + x_2^2y_3 + x_2x_3y_3 - x_2x_3y_2 - x_3^2y_2 + \right. \\ &\quad \left. + x_1x_3y_1 + x_3^2y_1 - x_1^2y_3 - x_1x_3y_3 \right|. \end{aligned}$$

Pokazaliśmy zatem, że

$$V_{B(T)} = G_1(T).$$

Oznacza to, że wzór Pappusa-Guldina zachodzi dla bryły  $B(T)$  powstałej przez obrót dowolnego trójkąta  $T$  wokół osi.

### 3. Addytywność.

W tym rozdziale pokażemy, że jeśli wzór (1.1) z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina zachodzi dla brył powstałych przez obrót parami niezachodzących na siebie wielokątów  $W_1, W_2, \dots, W_k$ , to zachodzi również dla sumy  $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k$ . Przez niezachodzące na siebie wielokąty rozumiemy figury, których jedyną częścią wspólną może być fragment ich boków.

Założmy, że dla brył wyznaczonych przez wielokąty  $W_1, W_2, \dots, W_k$  zachodzi równość ze wzoru (1.1)

$$V_{B(W_1)} = P(W_1) \cdot 2\pi d_{W_1},$$

$$V_{B(W_2)} = P(W_2) \cdot 2\pi d_{W_2},$$

⋮

$$V_{B(W_k)} = P(W_k) \cdot 2\pi d_{W_k}.$$

Ponadto, z tego, że wielokąty  $W_1, W_2, \dots, W_k$  parami nie zachodzą na siebie, od razu wiemy, że

$$P(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k) = P(W_1) + P(W_2) + \dots + P(W_k) \quad (3.1)$$

oraz

$$V_{B(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k)} = V_{B(W_1)} + V_{B(W_2)} + \dots + V_{B(W_k)}. \quad (3.2)$$

Pokażemy, że wzór Pappusa-Guldina zachodzi też dla bryły powstałej przez obrót sumy  $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k$  wokół osi obrotu  $L$ .

W tym momencie zapoznamy się z definicją średniej ważonej i środka ciężkości układu punktów na płaszczyźnie, by potem z nich skorzystać.

**Definicja 3.1.** Średnia ważona liczb rzeczywistych  $x_1, x_2, \dots, x_n$  z odpowiadającymi im wagami  $w_1, w_2, \dots, w_n$  jest określona jako

$$\frac{w_1}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} x_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} x_2 + \dots + \frac{w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} x_n.$$

**Definicja 3.2.** Niech  $A_1, A_2, \dots, A_n$  będą punktami na płaszczyźnie, a  $w_1, w_2, \dots, w_n$  niech będą odpowiadającymi im wagami. Środkiem ciężkości tego układu punktów z wagami nazywamy punkt  $S$  spełniający równanie wektorowe

$$w_1 \overrightarrow{SA_1} + w_2 \overrightarrow{SA_2} + \dots + w_n \overrightarrow{SA_n} = \vec{0}.$$

Korzystając z pozycji [2] w podrozdziale 1.3, czytamy, że w dowolnym układzie kartezjańskim współrzędne środka ciężkości układu punktów z wagami, są średnimi ważonymi odpowiednich współrzędnych wyjściowych punktów, z takimi samymi wagami.

Wykorzystamy także twierdzenie, o którym mowa w podrozdziale 4.3 w pozycji [2].

**Twierdzenie 3.3.** Środek ciężkości wielokąta  $W$  jest równy środkowi ciężkości punktów będących środkami ciężkości niezachodzących na siebie wielokątów podziału wielokąta  $W$  z wagami równymi polom tych wielokątów.

Na podstawie powyższych definicji i twierdzenia otrzymujemy fakt pomocniczy.

**Fakt 3.4.** Niech  $d_{W_i}$  oznacza odległość środka ciężkości wielokąta  $W_i$  od osi obrotu, zaś  $d_{W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k}$  odległość środka ciężkości wielokąta  $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k$  od osi obrotu. Wówczas  $d_{W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k}$  jest średnią ważoną z odległości  $d_{W_1}, d_{W_2}, \dots, d_{W_k}$  z wagami  $P(W_1), P(W_2), \dots, P(W_k)$  odpowiednio.

Powyższy fakt możemy zapisać jako

$$d_{W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k} = \sum_{i=1}^k \frac{P(W_i)}{\sum_{i=1}^k P(W_i)} d_{W_i}, \quad (3.3)$$

lub równoważnie

$$P(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k) \cdot d_{W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k} = \sum_{i=1}^k P(W_i) d_{W_i}.$$

Wzór (3.3) w łatwy sposób można uzasadnić, korzystając z Definicji 3.1 i 3.2. Przyjmujemy układ współrzędnych, w którym oś obrotu, to oś  $Oy$ . Jako punkty przyjmujemy środki ciężkości wielokątów  $W_1, W_2, \dots, W_k$  oraz  $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k$ . Wówczas liczby  $d_{W_i}$  dla  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  oraz  $d_{W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k}$ , to po prostu współrzędne x-owe środków ciężkości. Wagi jakie im przypisujemy to pola tych wielokątów  $P(W_1), P(W_2), \dots, P(W_k)$  oraz  $P(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k)$  odpowiednio.

Korzystając z powyższych wiadomości możemy zapisać

$$\begin{aligned} V_{B(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k)} &= V_{B(W_1)} + V_{B(W_2)} + \dots + V_{B(W_k)} = \\ &= P(W_1) \cdot 2\pi d_{W_1} + P(W_2) \cdot 2\pi d_{W_2} + \dots + P(W_k) \cdot 2\pi d_{W_k} = \\ &= 2\pi (P(W_1) d_{W_1} + P(W_2) d_{W_2} + \dots + P(W_k) d_{W_k}) = \\ &= 2\pi P(W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k) \cdot d_{W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k}. \end{aligned}$$

Ostatnią równość możemy zapisać korzystając z Faktu 3.4.

Na podstawie rozumowania przeprowadzonego w Rozdziale 3 możemy sformułować poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 3.5.** Niech  $W_1, W_2, \dots, W_k$ , to parami niezachodzące na siebie wielokąty. Jeżeli pierwsze twierdzenie Pappusa-Guldina zachodzi dla brył powstałych przez obrót wielokątów  $W_1, W_2, \dots, W_k$ , to zachodzi także dla bryły powstałej przez obrót sumy  $W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k$ .

## 4. Sprawdzenie wzoru Pappusa-Guldina dla dowolnej figury wielokątnej.

W tym rozdziale pokażemy, że wzór (1.1) z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina zachodzi dla dowolnej figury wielokątnej. W tym celu wykorzystamy rozważania z Rozdziału 2 i 3.

Na początku zapoznajmy się definicją figury wielokątnej.

**Definicja 4.1.** Figurą wielokątną nazywamy taką figurę na płaszczyźnie, która da się przedstawić jako suma skończonej rodziny niezachodzących na siebie trójkątów.

Przez niezachodzące na siebie trójkąty, rozumiemy trójkąty mające rozłączne wnętrza, których jedyną częścią wspólną może być fragment ich boków.

Niech  $W$  będzie dowolną figurą wielokątną. Figurę  $W$ , w myśl twierdzenia 3.3, dzielimy na niezachodzące na siebie wielokąty, które tu będą trójkątami  $T_1, T_2, \dots, T_n$ .

Na podstawie rozumowania przeprowadzonego w Rozdziale 2 możemy zapisać

$$V_{B(T_i)} = P(T_i) \cdot 2\pi d_{T_i},$$

dla  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Skoro wzór (1.1) zachodzi dla brył powstałych przez obrót wokół osi poszczególnych trójkątów  $T_1, T_2, \dots, T_n$  z podziału figury  $W$ , to korzystając z Twierdzenia 3.5 mamy, że wzór ten zachodzi także dla bryły powstałej przez obrót sumy  $T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n$ , czyli zachodzi dla figury  $W$ .

## 5. Sprawdzenie wzoru Pappusa-Guldina dla dowolnej figury mierzalnej.

W tym rozdziale pokażemy, że wzór (1.1) zachodzi dla dowolnej figury mierzalnej. Zanim przejdziemy do analizy postawionego problemu zapoznajmy się z pojęciem figury mierzalnej (w sensie Jordana). Z pojęciem tym można dogłębniej zapoznać się korzystając z pozycji [3], natomiast poniżej przytoczona zostanie najważniejsza definicja w ujęciu podobnym jak w pozycji [2] w rozdziale 5.

**Definicja 5.1.** Miarą zewnętrzną figury  $F$  nazywamy liczbę  $P_Z(F) = \inf \{P(Z) : Z \supset F\}$ , zaś jej miarą wewnętrzną liczbę  $P_W(F) = \sup \{P(W) : W \subset F\}$ , gdzie  $Z$  i  $W$ , to figury wielokątne.

**Definicja 5.2.** Mówimy, że figura  $F$  jest mierzalna w sensie Jordana, gdy

$$P_z(F) = P_w(F).$$

Wówczas określamy pole (miarę Jordana) tej figury przez

$$P(F) = P_z(F) = P_w(F).$$

**Uwaga 5.3.** Aby sprawdzić mierzalność figury i wyznaczyć jej pole wystarczy podać dwa ciągi figur wielokątnych  $W_n$  i  $Z_n$  takich, że  $W_n \subset F \subset Z_n$  oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P(Z_n) - P(W_n)) = 0.$$

Stąd wynika mierzalność figury  $F$ .

Pole figury  $F$  wynosi wówczas

$$P(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n).$$

Niech  $F$  będzie figurą mierzalną. Stosując podobne oznaczenia jak wyżej dotyczące ciągów figur wielokątnych przybliżających figurę  $F$  od wewnątrz i od zewnątrz, możemy zapisać

$$B(W_n) \subset B(F) \subset B(Z_n)$$

oraz

$$V_{B(W_n)} \leq V_{B(F)} \leq V_{B(Z_n)}.$$

Z Rozdziału 4 wiemy, że wzór (1.1) zachodzi dla brył powstałych przez obrót wokół osi dowolnej figury wielokątnej. Możemy więc zapisać

$$V_{B(W_n)} = P(W_n) \cdot 2\pi d_{W_n}$$

oraz

$$V_{B(Z_n)} = P(Z_n) \cdot 2\pi d_{Z_n}.$$

Przytoczmy teraz definicję z podrozdziału 5.3 z pozycji [2] dotyczącą środka ciężkości figury mierzalnej.

**Definicja 5.4.** Środkiem ciężkości figury mierzalnej  $F$  nazywamy punkt będący granicą środków ciężkości wielokątów przybliżających figurę mierzalną  $F$  od wewnątrz.

Ponieważ podobną definicję możemy zapisać dla figur wielokątnych przybliżających figurę mierzalną  $F$  od zewnątrz, dlatego dostajemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{W_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{Z_n}.$$

(5.1)



Wykorzystując wiedzę na temat figury mierzalnej, mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n). \quad (5.2)$$

Możemy więc zapisać

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{B(W_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n) \cdot 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} d_{W_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(W_n) \cdot 2\pi d_{W_n})$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{B(Z_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n) \cdot 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} d_{Z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(Z_n) \cdot 2\pi d_{Z_n}).$$

Ale na mocy wzoru (5.1) i (5.2) mamy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{B(W_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{B(Z_n)}.$$

Zachodzą więc równości

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{B(W_n)} = V_{B(F)} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{B(Z_n)}.$$

Z powyższych oszacowań wyznaczymy objętość  $V_{B(F)}$  z użyciem pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina dla figur wielokątnych przybliżających figurę  $F$  od wewnątrz. Rozumowanie związane z bryłą wyznaczoną przez figury wielokątne przybliżające figurę  $F$  od zewnątrz, będzie analogiczne, dlatego je pominiemy.

Mamy

$$V_{B(F)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(W_n) \cdot 2\pi d_{W_n}).$$

Teraz obliczymy wartość wyrażenia  $G_1(F)$ .

Wiemy, że

$$P(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n)$$

oraz

$$d_F = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{W_n}.$$

Mamy więc

$$G_1(F) = P(F) \cdot 2\pi d_f = \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n) \cdot 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} d_{W_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(W_n) \cdot 2\pi d_{W_n}) = V_{B(F)}.$$

Pokazaliśmy zatem, że wzór (1.1) zachodzi dla dowolnej figury mierzalnej.

## CZĘŚĆ II. Drugie twierdzenie Pappusa-Guldina.

W tej części pracy w Rozdziale 6 zapoznamy się z pojęciem krzywej mierzalnej, a także pokażemy, że takimi krzywymi są okręgi, wycinki okręgów czy łamane. W Rozdziale 7 poznamy definicję krzywej wagowo mierzalnej, a także dowód drugiego twierdzenia Pappusa-Guldina z wykorzystaniem pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina.

### 6. Okręgi, wycinki okręgów i łamane jako krzywe mierzalne.

W tym rozdziale zapoznamy się z definicją krzywej mierzalnej. Pokażemy także, że okręgi, łuki okręgów i łamane są takimi krzywymi znajdując ich długość.

**Definicja 6.1.**  $\varepsilon$ -otoczką krzywej mierzalnej  $\gamma$ , będziemy nazywać zbiór złożony ze wszystkich punktów płaszczyzny znajdujących się w odległości nie większej niż  $\varepsilon$  od tej krzywej, gdzie  $\varepsilon$  jest dowolną liczbą dodatnią.  $\varepsilon$ -otoczkę krzywej mierzalnej  $\gamma$  będziemy oznaczać przez  $N_\varepsilon(\gamma)$ .

**Definicja 6.2.** Krzywa mierzalna, to taka krzywa, że dla każdego  $\varepsilon > 0$ ,  $N_\varepsilon(\gamma)$  jest figurą mierzalną oraz granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(N_\varepsilon(\gamma))}{2\varepsilon}$$

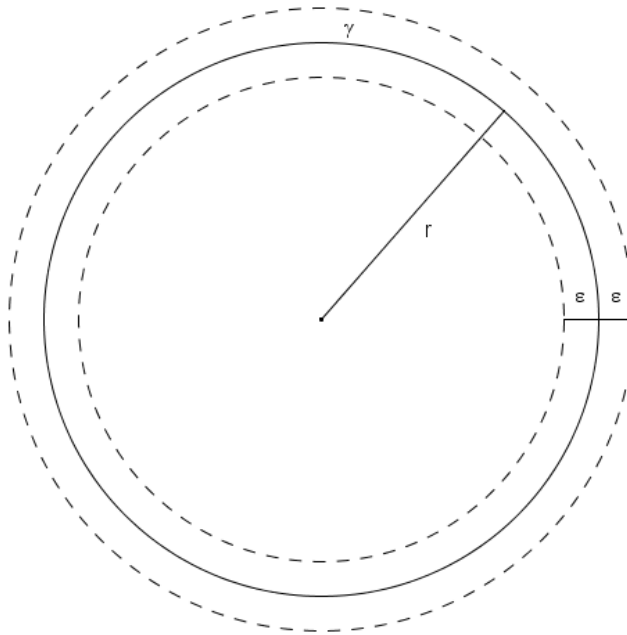
istnieje.

**Definicja 6.3.** Długość krzywej mierzalnej  $\gamma$ , będzie z definicji określona jako granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(N_\varepsilon(\gamma))}{2\varepsilon}.$$

Pokażemy, że łamane, okręgi oraz łuki okręgów są krzywymi mierzalnymi, oraz że za pomocą Definicji 6.3 możemy poprawnie obliczyć ich długość.

Na początku rozważmy przypadek dowolnego okręgu  $\gamma$  o promieniu  $r$ . Na Rysunku 22 przedstawiona jest  $\varepsilon$ -otoczka okręgu  $\gamma$ , która jest pierścieniem, będącym różnicą kół o promieniach  $r + \varepsilon$  i  $r - \varepsilon$ .



Rysunek 22.

Pole koła o promieniu  $r + \epsilon$  wynosi

$$P_1 = \pi(r + \epsilon)^2.$$

Pole koła o promieniu  $r - \epsilon$  wynosi

$$P_2 = \pi(r - \epsilon)^2.$$

Pole otoczki wyraża się więc wzorem

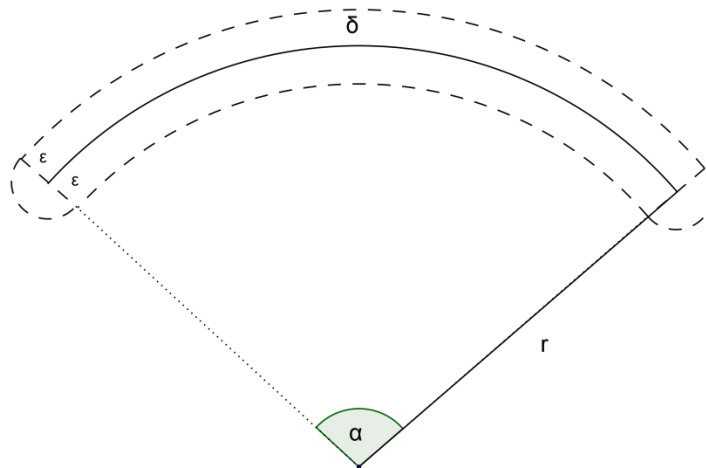
$$P(N_\epsilon(\gamma)) = P_1 - P_2 = \pi(r + \epsilon)^2 - \pi(r - \epsilon)^2.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P(N_\epsilon(\gamma))}{2\epsilon} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(r + \epsilon)^2 - \pi(r - \epsilon)^2}{2\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(r^2 + 2r\epsilon + \epsilon^2 - r^2 + 2r\epsilon - \epsilon^2)}{2\epsilon} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi r\epsilon}{2\epsilon} = 2\pi r. \end{aligned}$$

Ponieważ powyższa granica istnieje, okrąg okazuje się być krzywą mierzalną. Ponadto jego długość wyliczona z Definicji 6.3 pokrywa się z dobrze znaną długością okręgu o danym promieniu długości  $r$ .

Przejdźmy teraz do pokazania, że granica z Definicji 6.3 dobrze określa również długości łuków okręgów. Niech  $\delta$  będzie dowolnym łukiem okręgu o promieniu  $r$  i kącie  $\alpha$  takim, że  $\alpha \in (0, 2\pi)$ , tak jak na Rysunku 23.



Rysunek 23.

$\varepsilon$ -otoczka łuku składa się z fragmentu pierścienia kołowego o promieniu zewnętrznym długości  $r + \varepsilon$  i wewnętrznym  $r - \varepsilon$ , a także dwóch połówek kół o promieniu  $\varepsilon$  na końcach łuku  $\delta$ .

Pole wycinka koła o promieniu  $r + \varepsilon$  i kącie  $\alpha$  wynosi

$$P_1 = \frac{\alpha}{2\pi} \pi(r + \varepsilon)^2 = \frac{\alpha}{2} (r + \varepsilon)^2.$$

Pole wycinka koła o promieniu  $r - \varepsilon$  i kącie  $\alpha$  wynosi

$$P_2 = \frac{\alpha}{2\pi} \pi(r - \varepsilon)^2 = \frac{\alpha}{2} (r - \varepsilon)^2.$$

Pole półokręgów na końcach łuku wyraża się wzorem

$$P_3 = \frac{1}{2} \pi \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \pi \varepsilon^2 = \pi \varepsilon^2.$$

Pole  $\varepsilon$ -otoczki wynosi zatem

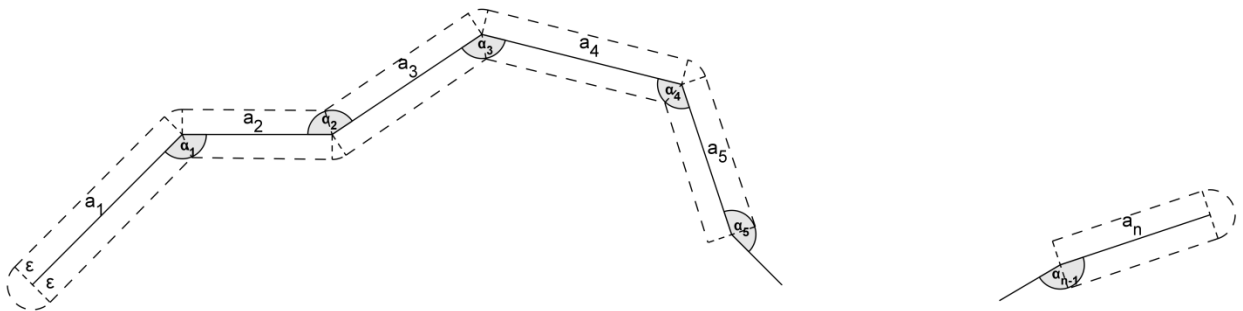
$$P(N_\varepsilon(\delta)) = P_1 - P_2 + P_3 = \frac{\alpha}{2} (r + \varepsilon)^2 - \frac{\alpha}{2} (r - \varepsilon)^2 + \pi \varepsilon^2.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(N_\varepsilon(\delta))}{2\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{2} (r + \varepsilon)^2 - \frac{\alpha}{2} (r - \varepsilon)^2 + \pi \varepsilon^2}{2\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{2} (r^2 + 2r\varepsilon + \varepsilon^2 - r^2 + 2r\varepsilon - \varepsilon^2) + \pi \varepsilon^2}{2\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\alpha r \varepsilon + \pi \varepsilon^2}{2\varepsilon} = \alpha r. \end{aligned}$$

Podobnie jak w przypadku okręgu, powyższa granica istnieje, więc łuki okręgów również okazują się być krzywymi mierzalnymi. Z Definicji 6.3 granica ta dobrze określa długość łuku. Otrzymany wzór w szczególności prawdziwy jest dla okręgu, wówczas  $\alpha = 2\pi$ , co daje  $2\pi r$ .

Przejdźmy teraz do pokazania, że granica z Definicji 6.3 istnieje oraz dobrze określa długość dowolnej łamanej. Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  będą odcinkami łamanej  $\gamma$ , zaś  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  kątami między odpowiednimi odcinkami łamanej  $\gamma$ , tak jak na Rysunku 24.



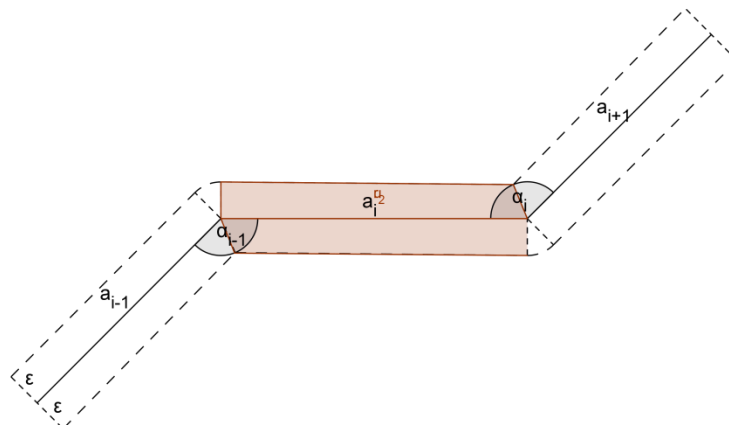
Rysunek 24.

$\varepsilon$ -otoczka łamanej  $\gamma$  składa się z wycinków kół o promieniu  $\varepsilon$  oraz par czworokątów przyległych do każdego z odcinków  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

Para czworokątów przyległych do  $a_1$  jak i  $a_n$  to prostokąt i trapez prostokątny. Dla odcinków znajdujących się wewnątrz łamanej są to albo prostokąt i trapez nieprostokątny, albo para trapezów prostokątnych. Na początku pokażemy, że bez względu na to, która para czworokątów przylega do wewnętrznych odcinków łamanej, suma ich pól wyraża się takim samym wzorem.

Rozważmy więc dwa przypadki związane z odcinkami wewnątrz łamanej.

**Przypadek 1** – w końcach odcinka  $a_i$  łamana „skręca” w dwie przeciwne strony. W tym przypadku oba czworokąty przyległe do odcinka  $a_i$  są trapezami prostokątnymi co przedstawia Rysunek 25.

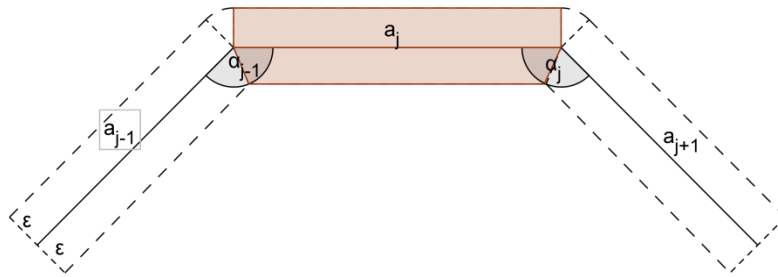


Rysunek 25.

Suma ich pól wynosi

$$P_{a_i} = \frac{1}{2} \left( a_i + a_i - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1}}{2}} \right) \varepsilon + \frac{1}{2} \left( a_i + a_i - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}} \right) \varepsilon = \frac{1}{2} \left( 4a_i - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1}}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}} \right) \varepsilon.$$

**Przypadek 2** – w końcach odcinka  $a_j$  łamana „skręca” w tą samą stronę. W tym przypadku jeden z czworokątów przyległych do odcinka  $a_j$  jest prostokątem, a drugi trapezem nieprostokątnym, co przedstawia Rysunek 26.



Rysunek 26.

Suma ich pól jest równa

$$P_{a_j} = a_j \varepsilon + \frac{1}{2} \left( a_j - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{j-1}}{2}} + a_j - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_j}{2}} \right) \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon \left( 4a_j - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{j-1}}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_j}{2}} \right).$$

Pokazaliśmy więc, że niezależnie od zachowania łamanej przy końcach odcinka wewnętrznego  $a_k$ , suma pól czworokątów przyległych do tego odcinka wyraża się tym samym wzorem:

$$P_{a_k} = \frac{1}{2} \varepsilon \left( 4a_k - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{k-1}}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_k}{2}} \right).$$

Przejdziemy teraz do obliczenia pól kolejnych fragmentów  $\varepsilon$ -otoczki łamanej  $\gamma$ . Suma pól wycinków kół (idąc od lewej strony do prawej) wynosi

$$P_0 = \frac{1}{2} \pi \varepsilon^2 + \frac{\pi - \alpha_1}{2\pi} \varepsilon^2 + \frac{\pi - \alpha_2}{2\pi} \varepsilon^2 + \dots + \frac{\pi - \alpha_{n-1}}{2\pi} \varepsilon^2 + \frac{1}{2} \pi \varepsilon^2 = \pi \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\pi - \alpha_i}{2\pi}.$$

Wyliczymy teraz sumę pól czworokątów przyległych do odcinków  $a_1$  oraz  $a_n$  łamanej  $\gamma$ . Są to pary czworokątów złożonych z prostokąta i trapezu prostokątnego. Suma ich pól wynosi

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_{a_1} + P_{a_n} = a_1\varepsilon + \frac{1}{2} \left( a_1 + a_1 - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}} \right) \varepsilon + a_n\varepsilon + \frac{1}{2} \left( a_n + a_n - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{n-1}}{2}} \right) \varepsilon = \\
&= \frac{1}{2} \left( 4a_1 + 4a_n - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{n-1}}{2}} \right) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Suma pól wszystkich czworokątów przylegających do wewnętrznych odcinków wynosi

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_{a_2} + P_{a_3} + \dots + P_{a_{n-1}} = \frac{1}{2} \left( 4a_2 - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}} \right) \varepsilon + \frac{1}{2} \left( 4a_3 - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_3}{2}} \right) \varepsilon + \\
&+ \dots + \frac{1}{2} \left( 4a_{n-1} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{n-2}}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{n-1}}{2}} \right) \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{i=2}^{n-1} \left( 4a_i - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1}}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Zatem pole  $\varepsilon$ -otoczki łamanej  $\gamma$  wynosi

$$\begin{aligned}
P(N_\varepsilon(\gamma)) &= P_0 + P_1 + P_2 = \pi\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\pi - \alpha_i}{2\pi} + \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{i=2}^{n-1} \left( 4a_i - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1}}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \varepsilon \left( 4a_1 + 4a_n - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{n-1}}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Zgodnie z Definicją 6.3 przechodząc do granicy otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(N_\varepsilon(\gamma))}{2\varepsilon} &= \\
&= \frac{\pi\varepsilon^2 + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\pi - \alpha_i}{2\pi} + \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{i=2}^{n-1} \left( 4a_i - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{i-1}}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2}} \right) + \frac{1}{2} \varepsilon \left( 4a_1 + 4a_n - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}} - \frac{\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_{n-1}}{2}} \right)}{2\varepsilon} \\
&= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.
\end{aligned}$$

Na podstawie przeprowadzonego rozumowania pokazaliśmy, że łamana  $\gamma$  jest mierzalna, bo granica z Definicji 6.2 istnieje. Wyliczona z Definicji 6.3 długość łamanej  $\gamma$  pokrywa się z tradycyjnie rozumianą długością łamanej

Bardzo podobne rozumowanie można przeprowadzić dla dowolnej łamanej zamkniętej. Pozostawimy to Czytelnikowi do samodzielnego przeanalizowania.

## 7. Krzywe wagowo mierzalne i dowód drugiego twierdzenia Pappusa-Guldina.

W tym rozdziale zapoznamy się z pojęciem krzywej wagowo mierzalnej, a następnie udowodnimy drugie twierdzenie Pappusa-Guldina.

**Definicja 7.1.** Niech  $S(N_\varepsilon(\gamma))$  oznacza środek ciężkości figury  $N_\varepsilon(\gamma)$ . Wtedy krzywą  $\gamma$  nazywamy *wagowo mierzalną*, gdy granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(N_\varepsilon(\gamma))$$

istnieje.

**Definicja 7.2.** Środek ciężkości  $S$  wagowo mierzalnej krzywej  $\gamma$  będzie z definicji określony jako granica

$$S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(N_\varepsilon(\gamma)).$$

Przypomnijmy, że  $d_\gamma$  to odległość środka ciężkości krzywej  $\gamma$  od osi obrotu, natomiast  $d_{N_\varepsilon(\gamma)}$  to odległość środka ciężkości  $\varepsilon$ -otoczki od osi obrotu.

**Lemat 7.3.** Dla dowolnej wagowo mierzalnej krzywej  $\gamma$  mamy

$$d_\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_{N_\varepsilon(\gamma)}.$$

**Dowód.**

Dowód przeprowadzimy korzystając z pomocniczego układu współrzędnych, w którym oś wokół której obracamy krzywą  $\gamma$  pokrywa się z osią  $Oy$  kartezjańskiego układu współrzędnych.

Niech  $S = (x, y)$  oznacza środek ciężkości krzywej  $\gamma$ , zaś  $S(N_\varepsilon(\gamma)) = (x_\varepsilon, y_\varepsilon)$  oznacza środek ciężkości odpowiedniej  $\varepsilon$ -otoczki.

Z definicji

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(N_\varepsilon(\gamma)) = S,$$

czyli

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_\varepsilon, y_\varepsilon) = (x, y),$$

w szczególności

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = x.$$



Ale

$$x_\varepsilon = d_{N_\varepsilon(\gamma)},$$

$$x = d_\gamma.$$

Zatem

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_{N_\varepsilon(\gamma)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = x = d_\gamma.$$

W podobny sposób jak w Rozdziale 6 pokazaliśmy, że okręgi, łuki okręgów i łamane są krzywymi mierzalnymi można pokazać, że wspomniane krzywe są wagowo mierzalne. Rachunek ten jest prosty, ale żmudny więc go pominiemy.

Aby móc przejść do dowodu drugiego twierdzenia Pappusa-Guldina, najpierw zapoznamy się z dwoma definicjami, z których będziemy korzystać.

**Definicja 7.3.** Niech  $\Sigma_\gamma$  oznacza powierzchnię powstałą przez obrót mierzalnej i wagowo mierzalnej krzywej  $\gamma$ .  $\varepsilon$ -otoczką powierzchni  $\Sigma_\gamma$ , będziemy nazywać zbiór złożony ze wszystkich punktów z przestrzeni znajdujących się w odległości nie większej niż  $\varepsilon$  od tej powierzchni i będziemy oznaczać ją przez  $N_\varepsilon^{R^3}(\Sigma_\gamma)$ .

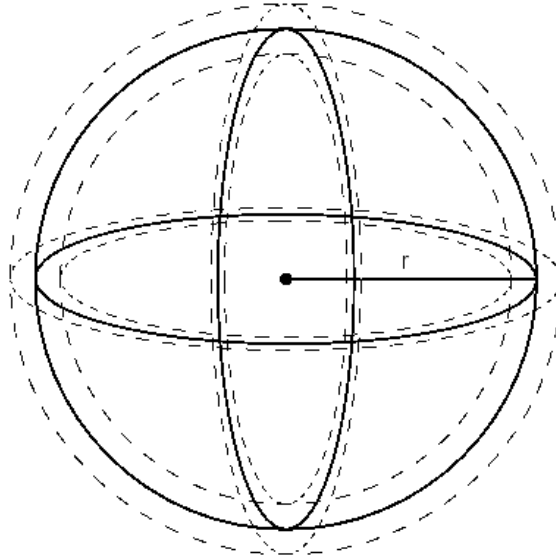
$N_\varepsilon^{R^3}(\Sigma_\gamma)$  jest bryłą obrotową uzyskaną przez obrót otoczki  $N_\varepsilon(\gamma)$  wokół osi obrotu  $L$ .

**Definicja 7.4.** Pole powierzchni  $\Sigma_\gamma$ , będzie z definicji określone jako granica

$$P(\Sigma_\gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(N_\varepsilon^{R^3}(\Sigma_\gamma))}{2\varepsilon}.$$

Pokażemy, że Definicja 7.4 dobrze określa np. pole powierzchni kuli czy pole powierzchni bocznej walca.

Popatrzmy na Rysunek 27, który przedstawia sferę  $S_r$  o promieniu  $r$  wraz z jej  $\varepsilon$ -otoczką.



Rysunek 27.

Niech  $V_{k1}$  oznacza objętość kuli o promieniu  $r + \varepsilon$ , zaś  $V_{k2}$  objętość kuli o promieniu  $r - \varepsilon$ . Korzystając ze wzoru na objętość kuli o danym promieniu długości  $r$  mamy

$$V_{k1} = \frac{4}{3}\pi(r + \varepsilon)^3,$$

$$V_{k2} = \frac{4}{3}\pi(r - \varepsilon)^3.$$

Objętość  $\varepsilon$ -otoczki jest wobec tego równa

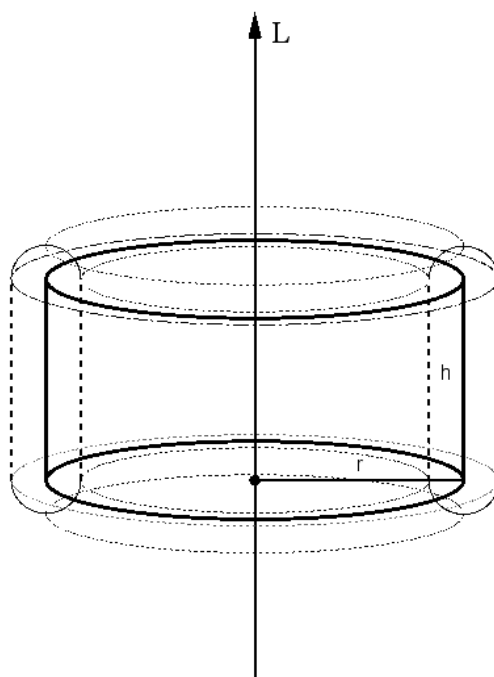
$$V(N_\varepsilon^{R^3}(S_r)) = V_{k1} - V_{k2} = \frac{4}{3}\pi(r + \varepsilon)^3 - \frac{4}{3}\pi(r - \varepsilon)^3 = \frac{4}{3}\pi(6r^2\varepsilon + 2\varepsilon^3).$$

Korzystając z Definicji 7.4 mamy

$$P(S_r) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{3}\pi(6r^2\varepsilon + 2\varepsilon^3)}{2\varepsilon} = 4\pi r^2.$$

Otrzymaliśmy dobrze znany wzór na pole powierzchni sfery o danym promieniu długości  $r$ , zatem granica z Definicji 7.4 jest prawidłowo określona.

Podobne rozumowanie przeprowadzimy w przypadku powierzchni  $\gamma$ , która jest powierzchnią boczną walca o promieniu podstawy  $r$  i wysokości  $h$ . Spójrzmy na Rysunek 28, który przedstawia opisaną wyżej powierzchnię wraz z jej  $\varepsilon$ -otoczką.



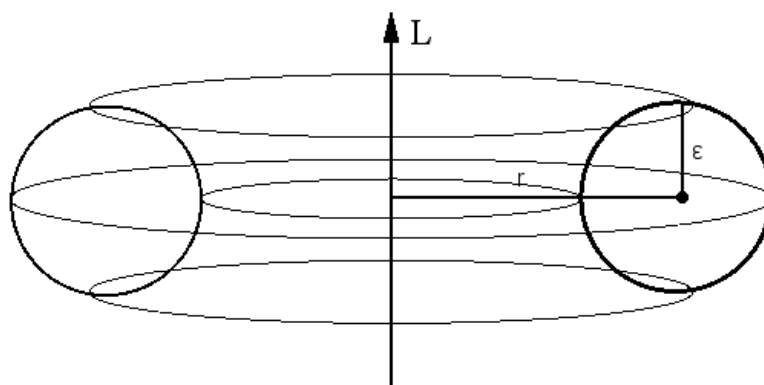
Rysunek 28.

Obliczając objętość  $\varepsilon$ -otoczki powierzchni  $\gamma$  na początku skorzystamy ze wzoru na objętość walca. Niech wobec tego  $V_{w1}$  oznacza objętość walca o promieniu podstawy  $r + \varepsilon$  i wysokości  $h$ , zaś  $V_{w2}$  objętość walca o promieniu podstawy  $r - \varepsilon$  i wysokości  $h$ . Mamy więc

$$V_{w1} = \pi(r + \varepsilon)^2 h,$$

$$V_{w2} = \pi(r - \varepsilon)^2 h.$$

Wykorzystamy także wzór na objętość torusa, ponieważ dolna i górna część  $\varepsilon$ -otoczki powierzchni  $\gamma$  po połączeniu tworzy tę właśnie bryłę. Wzór ten w łatwy sposób można wyprowadzić korzystając z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina. Jeśli przez  $V_t$  oznaczymy objętość torusa i przyjmiemy oznaczenia jak na Rysunku 29,



Rysunek 29.

to wzór ma postać

$$V_t = P(F) \cdot 2\pi d_F = \pi \varepsilon^2 \cdot 2\pi r = 2\pi^2 r \varepsilon^2.$$

Objętość  $\varepsilon$ -otoczki jest więc równa

$$\begin{aligned} V(N_\varepsilon^{R^3}(\Sigma_\gamma)) &= V_{w1} - V_{w2} + V_t = \pi(r + \varepsilon)^2 h - \pi(r - \varepsilon)^2 h + 2\pi^2 r \varepsilon^2 = \\ &= 4\pi r h \varepsilon + 2\pi^2 r \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Korzystając z definicji 7.4 otrzymujemy

$$P(\Sigma_\gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{4\pi r h \varepsilon + 2\pi^2 r \varepsilon^2}{2\varepsilon} = 2\pi r h.$$

Otrzymaliśmy dobrze znany wzór na pole powierzchni bocznej walca o danym promieniu podstawy  $r$  i wysokości  $h$ . Dochodzimy zatem do wniosku, że powyższa granica dobrze określa pole powierzchni bocznej walca.

Znając już wszystkie niezbędne definicje, przeprowadzimy teraz dowód drugiego twierdzenia Pappusa-Guldina. W tym celu skorzystamy także z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina. Na początku obliczymy wartość wyrażenia z prawej strony wzoru (1.2) dla krzywej  $\gamma$ , które oznaczymy przez  $G_2(\gamma)$ .

$$G_2(\gamma) = D(\gamma) \cdot 2\pi d_\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(N_\varepsilon(\gamma))}{2\varepsilon} \cdot 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_{N_\varepsilon(\gamma)}.$$

Z racji, że  $N_\varepsilon(\gamma)$  jest z założenia o mierzalności  $\gamma$  figurą mierzalną, możemy stosować wzór (1.1) z pierwszego twierdzenia Pappusa-Guldina. Mamy

$$\frac{V(N_\varepsilon^{R^3}(\Sigma_\gamma))}{2\varepsilon} = \frac{P(N_\varepsilon(\gamma))}{2\varepsilon} \cdot 2\pi d_{N_\varepsilon(\gamma)},$$

Zatem wyrażenie  $G_2(\gamma)$  przyjmuje postać

$$G_2(\gamma) = D(\gamma) \cdot 2\pi d_\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(N_\varepsilon(\gamma))}{2\varepsilon} \cdot 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_{N_\varepsilon(\gamma)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{P(N_\varepsilon(\gamma))}{2\varepsilon} \cdot 2\pi d_{N_\varepsilon(\gamma)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(N_\varepsilon^{R^3}(\Sigma_\gamma))}{2\varepsilon}.$$

Ale z Definicji 8.2

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(N_\varepsilon^{R^3}(\Sigma_\gamma))}{2\varepsilon} = P(\Sigma_\gamma),$$

więc

$$G_2(\gamma) = P(\Sigma_\gamma),$$

co dowodzi drugiego twierdzenia Pappusa-Guldina.

## **Bibliografia.**

1. F. Leja, Geometria analityczna, PWN, Warszawa 1965.
2. A. Smolińska, Środek ciężkości figury mierzalnej, praca magisterska, Uniwersytet Wrocławski, Wrocław 2013.
3. L. Szczerba, O mierze Jordana, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1977.