

Uniwersytet Wrocławski  
Wydział Matematyki i Informatyki

Agnieszka Burska

**ZORIENTOWANE POLE  
WIELOKĄTÓW**

*Praca magisterska napisana  
pod kierunkiem dr J. Świątkowskiego*

Wrocław 2001

## Spis treści

Wstęp.....	2
Rozdział 1	
<b>Określenie zorientowanego pola dla trójkątów.....</b>	<b>3</b>
1.1 Definicja pojęcia zorientowanego pola.....	3
1.2 Ważny wzór.....	6
Rozdział 2	
<b>Wzór na zorientowane pole w geometrii analitycznej.....</b>	<b>11</b>
Rozdział 3	
<b>Proste zastosowania.....</b>	<b>15</b>
Rozdział 4	
<b>Zastosowanie do wprowadzenia pojęcia pola dla wielokątów.....</b>	<b>20</b>
Rozdział 5	
<b>Zastosowanie zorientowanego pola do wyprowadzenia wzoru na pole dowolnego wielokąta w geometrii analitycznej.....</b>	<b>28</b>
Rozdział 6	
<b>Wielokąty gwiaździste.....</b>	<b>33</b>
Bibliografia.....	47

## Wstęp

Tematem niniejszej pracy magisterskiej jest zorientowane pole wielokątów. W matematyce pojęcie zorientowanego pola odnosi się do wielokątów.

Głównym celem mojej pracy jest wykazanie korzyści wynikających z wprowadzenia pojęcia zorientowanego pola dla wielokątów.

Na całość mojej pracy magisterskiej składa się 6 rozdziałów.

W pierwszym rozdziale definiuję pojęcie zorientowanego pola trójkąta, jak również staram się wskazać na korzyści wynikające z wprowadzenia tego pojęcia w odniesieniu do trójkątów. W rozdziale drugim znajduję wzór na zorientowane pole trójkąta w geometrii analitycznej.

Rozdział trzeci jest dobrą ilustracją dla zastosowania tego pojęcia przy rozwiązywaniu prostych zadań.

W następnych rozdziałach rozszerzam pojęcie zorientowanego pola na wielokąty. Wykorzystując nowe pojęcie wyprowadzam w rozdziale 5 wzór na pole dowolnego wielokąta zadanego w układzie współrzędnych.

W ostatnim rozdziale mojej pracy rozszerzam pojęcie zorientowanego pola na wielokąty gwiaździste. Moja uwaga w tym rozdziale jest skupiona na poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie o interpretację geometryczną tego pojęcia.

Myślę, że podjęty przeze mnie temat jest na tyle ciekawy, że zainteresuje nim ucznia zdolnego.

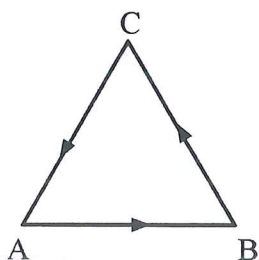
## Określenie zorientowanego pola dla trójkątów

### 1.1 Definicja pojęcia zorientowanego pola

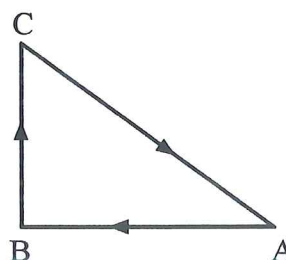
W pierwszym rozdziale swojej pracy przedstawię definicje, które będą stanowiły podstawę do dalszych rozważań. W szczególności będę omawiać w tej części pracy pojęcie zorientowanego pola trójkąta. Postaram się również wskazać na korzyści wynikające z wprowadzenia tego pojęcia.

Rozważmy trójkąt ABC. Wymieniając wierzchołki w takiej kolejności lub w porządku B C A, czy C A B określamy pewien kierunek obiegu na obwodzie trójkąta. Wyjaśniając dokładniej, obieg trójkąta to wskazanie kierunku poruszania się po obwodzie trójkąta. A zatem, określając obieg A B C poruszamy się po obwodzie trójkąta w następujący sposób: najpierw od wierzchołka A do B, potem od wierzchołka B do C i wreszcie od wierzchołka C do A.

Kierunek obiegu taki, jak przedstawiono na rys.1 nazywamy dodatnim, a kierunek wskazany na rys. 2 jest ujemny. Możemy zatem sformułować zasadę: obieg w trójkącie będzie dodatni, jeśli kierunek obiegu będzie przeciwny do ruchu wskazówek zegara, natomiast  $\Delta$  będzie miał obieg ujemny wtedy, gdy kierunek obiegu będzie zgodny z ruchem wskazówek zegara.



Rys.1



Rys. 2

**Definicja 1.1.1** *Trójkąty o ustalonym na obwodzie kierunku obiegu nazywamy trójkątami zorientowanymi.*

W związku z tym definiujemy pole zorientowanego trójkąta w następujący sposób:

**Definicja 1.1.2** Pole trójkąta o obiegu dodatnim równa się jego polu w znaczeniu geometrii elementarnej, tj. równa się połowie iloczynu podstawy trójkąta przez jego wysokość, jest, więc liczbą dodatnią.

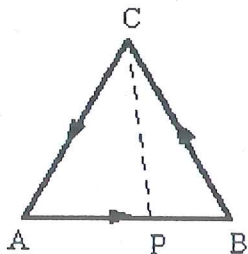
Pole trójkąta o obiegu ujemnym równa się liczbie przeciwnej do połowy iloczynu podstawy przez wysokość, czyli jest liczbą ujemną (porównaj [K], str.31-32).

Wprowadzenie takiej definicji pozwala ująć ogólniej pewne prawidłowości geometryczne, co postaram się wykazać w dalszej części tego rozdziału.

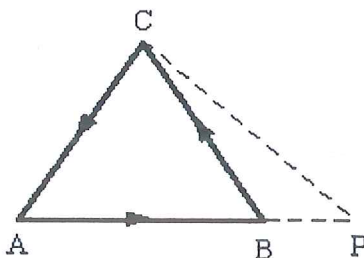
Przyjmuję istotne oznaczenia:

- Pole trójkąta zorientowanego  $ABC$ , dokładniej trójkąta, którego wierzchołki zadane są w kolejności  $A, B, C$ , liczone według podanej definicji, oznaczać będą  $\overline{ABC}$ .
- Pole trójkąta o wierzchołkach  $A, B, C$ , gdzie orientacja nie odgrywa roli, oznaczać będą przez  $|ABC|$ .
- W przypadku gdy punkty  $A, B, C$  będą współliniowe przyjmuję, że wielkość  $\overline{ABC} = 0$ .

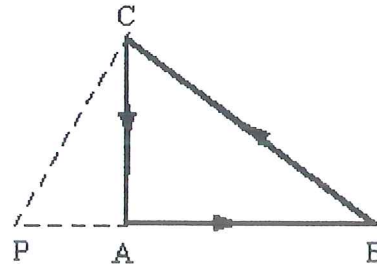
Dany jest trójkąt o wierzchołkach  $A, B, C$ ; łączymy wierzchołek  $C$  z punktem  $P$  dowolnie wybranym na prostej  $AB$ , (ale różnym od  $A$  i  $B$ ). Opisana sytuacja przedstawiona jest na rysunkach 3, 4, 5, dla różnych położenia punktu  $P$  względem punktów  $A$  i  $B$ .



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Będę poszukiwała odpowiedzi na pytanie o wielkość pola trójkąta ABC, o ile znane są pola trójkątów APC, BPC.

Rozważając zwykłe pole nie otrzymamy jednoznacznej odpowiedzi na zadane pytanie, ponieważ w każdym przypadku pokazanym na kolejnych rysunkach, pole  $\Delta ABC$  zostanie zapisane inaczej:

- na rys. 3 mamy  $|ABC| = |APC| + |PBC|$
- na rys. 4 mamy  $|ABC| = |APC| - |PBC|$
- na rys. 5 mamy  $|ABC| = |PBC| - |APC|$

Bazując na definicji pola trójkąta zorientowanego otrzymujemy jasną odpowiedź na pytanie, a mianowicie w każdym z trzech przypadków otrzymujemy wzór:

$$\overrightarrow{ABC} = \overrightarrow{APC} + \overrightarrow{PBC}$$

Dzięki wprowadzeniu definicji pola zorientowanego mamy wzór ogólny uwzględniający wszystkie przypadki, gdyż pola trójkątów:

- na rys. 3 wszystkie są dodatnie;
- na rys. 4 pola  $\overrightarrow{ABC}$  i  $\overrightarrow{APC}$  są liczbami dodatnimi natomiast  $\overrightarrow{PBC}$  jest ujemne;
- na rys. 5 pola  $\overrightarrow{ABC}$  i  $\overrightarrow{PBC}$  są liczbami dodatnimi, a pole  $\overrightarrow{APC}$  jest ujemne.

Fragment tego rozważania przedstawiłam w ujęciu S. Kulczyckiego ([K], str.32-33).

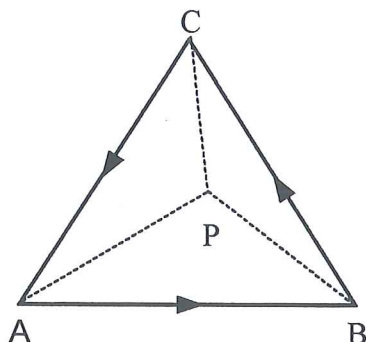
Dla uzyskania pełnego obrazu sytuacji należy prześledzić jeszcze przypadek, gdy punkt P pokryje się z którymkolwiek spośród punktów A i B.

Nie wykonując rysunku łatwo wywnioskować, że wzór  $\overrightarrow{ABC} = \overrightarrow{APC} + \overrightarrow{PBC}$  jest prawdziwy, ponieważ ze względu na orientację pole  $\Delta APC$  przyjmuje wartość dodatnią, natomiast wielkość  $\overrightarrow{PBC}$  jest równa zero, bo punkty B, C, P są współliniowe.

## 1.2 Ważny wzór

W tym podrozdziale będę stawiała pytanie o wielkość pola trójkąta ABC w przedstawionych poniżej sytuacjach.

Rozważmy trójkąt ABC. Łącząc wierzchołki tego trójkąta z punktem  $P \notin AB, BC, CA$  powstają trójkąty ABP, BCP, CAP (rys. 6).



Rys. 6

Pojmując pole w sensie zwykłym z rysunku 8 wynika, że:

$$|ABC| = |ABP| + |BCP| + |CAP|$$

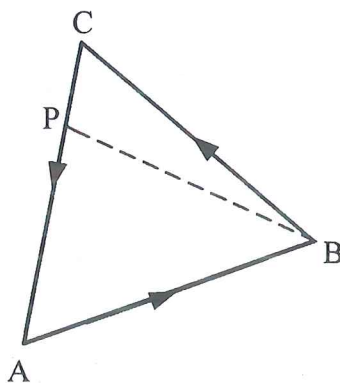
Jeśli natomiast uwzględnimy definicję pola zorientowanego, a zatem weźmiemy pod uwagę orientację tych trójkątów (jak wynika z rysunku wszystkie wskazane trójkąty mają obieg dodatni) możemy zapisać wzór:

$$\overrightarrow{ABC} = \overrightarrow{ABP} + \overrightarrow{BCP} + \overrightarrow{CAP}$$

W myśl rozważanego w poprzednim podrozdziale wzoru, powyższy wzór powinien być również uniwersalny dla każdego położenia punktu P, co postaram się uzasadnić.

W dalszej części tego podrozdziału będę analizowała kolejne możliwe przypadki.

1) Punkt P leży na jednym z boków trójkąta,  $P \in AC$  (rys.7)

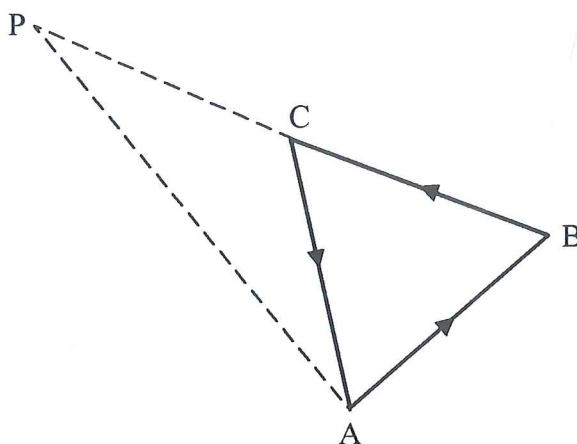


Rys. 7

Myśląc o polu w sensie zwykłym zapisujemy:  $|ABC| = |ABP| + |BCP|$ , natomiast mając na względzie orientację tych trójkątów możemy zapisać:  $\overrightarrow{ABC} = \overrightarrow{ABP} + \overrightarrow{BCP} + \overrightarrow{CAP}$ , ponieważ trójkąty  $ABC$ ,  $ABP$ ,  $BCP$  są zorientowane dodatnio, a  $\overrightarrow{CAP} = 0$  ze względu na to, że punkty  $A, P, C$  są współliniowe.

Chciałabym również podkreślić, że podobny wynik pojawiłby się, gdyby punkt  $P$  leżał na którymkolwiek z pozostałych boków  $\Delta ABC$ , a prowadzone rozumowanie przebiegałoby w analogiczny sposób.

2) Punkt  $P$  leży na przedłużeniu jednego z boków trójkąta (rys.8).



Rys. 8

Analizując rysunek i mając na uwadze pojęcie pola w sensie zwykłym możemy zapisać:

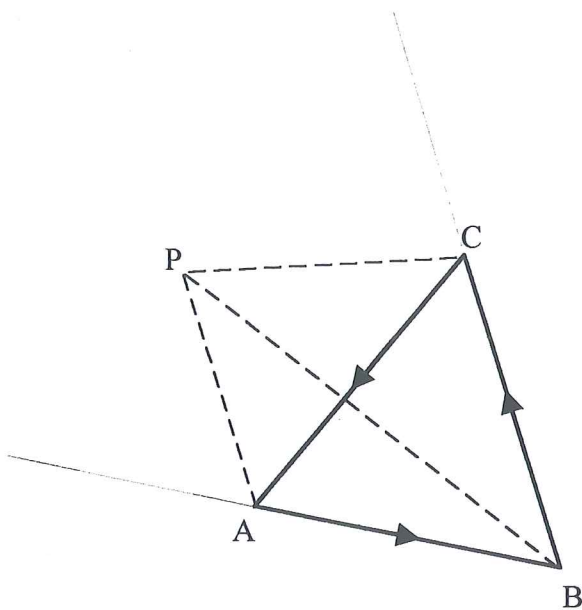
$$|ABC| = |ABP| - |CAP|.$$

Uwzględniając orientację tych trójkątów dochodzimy również do wniosku, że prawdziwy jest wzór  $\overrightarrow{ABC} = \overrightarrow{ABP} + \overrightarrow{BCP} + \overrightarrow{CAP}$ , ponieważ trójkąty  $ABC$ ,  $ABP$  są zorientowane dodatnio,  $\Delta CAP$  jest zorientowany ujemnie, a wielkość  $\overrightarrow{BCP}$  jest równa zero, bo punkty  $B, C, P$  są współliniowe.

Oczywiście należy również uwzględnić sytuacje, w których punkt  $P$  będzie leżał na przedłużeniu któregoś z pozostałych boków  $\Delta ABC$ . Uzyskany wynik będzie podobny, a rozumowanie do tego prowadzące będzie przebiegało analogicznie.



- 3) Punkt P leży na zewnątrz  $\Delta ABC$  w obszarze ograniczonym jednym z boków trójkąta oraz dwiema półprostymi przedłużającymi pozostałe dwa boki, (rys. 9).

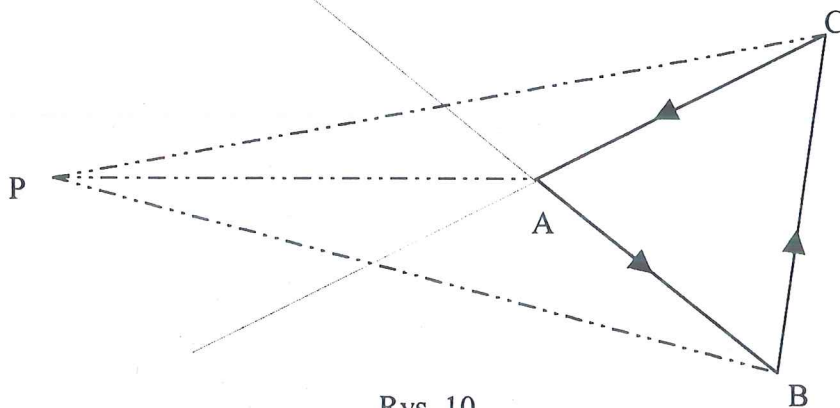


Rys. 9

Zapisujemy  $|ABC| = |ABP| + |BCP| - |CAP|$ , natomiast, jeśli weźmiemy pod uwagę orientację poszczególnych trójkątów ( trójkąty ABC, ABP oraz BCP zorientowane dodatnio, a  $\Delta CAP$  ujemnie) otrzymujemy znów  $\overrightarrow{ABC} = \overrightarrow{ABP} + \overrightarrow{BCP} + \overrightarrow{CAP}$ .

Do tego samego wniosku dojdziemy w momencie gdy punkt P będzie leżał w którymkolwiek z dwóch pozostałych obszarów tego samego typu, a uzasadnienie będzie przebiegało w podobny sposób.

- 4) Punkt P leży na zewnątrz trójkąta ABC w obszarze ograniczonym przez dwie półproste wychodzące z jednego wierzchołka, będące przedłużeniem sąsiednich boków trójkąta (rys. 10).



Rys. 10

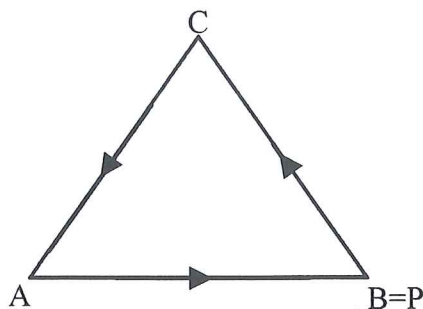
W tym przypadku pole  $\Delta ABC$  budują następujące pola trójkątów:

$$|ABC| = |BCP| - |CAP| - |ABP|.$$

Jeśli jednak znowu uwzględnimy pojęcie pola zorientowanego prawdziwy będzie wzór  $\overrightarrow{ABC} = \overrightarrow{ABP} + \overrightarrow{BCP} + \overrightarrow{CAP}$ , ponieważ trójkąty  $ABC$  i  $BCP$  są zorientowane dodatnio, natomiast trójkąty  $CAP$  oraz  $ABP$  są zorientowane ujemnie.

Również i w tym przypadku należy zwrócić uwagę na to, że jeśli punkt  $P$  umieścimy w dwóch innych możliwych obszarach tego typu i przeprowadzimy analogiczne rozumowanie, otrzymamy porównywalny wynik.

- 5) Jako ostatni rozpatrzmy przypadek, gdzie punkt  $P$  będzie pokrywał się z jednym z wierzchołków trójkąta  $ABC$ ,  $P = B$  (rys. 11).



Rys. 11

Rozpatrując pole  $\Delta ABC$  z rysunku 11 wnioskujemy, że  $|ABC| = |CAP|$ .

A zatem czy prawdziwy jest wzór  $\overrightarrow{ABC} = \overrightarrow{ABP} + \overrightarrow{BCP} + \overrightarrow{CAP}$  uwzględniający orientację pól?

Odpowiadając na pytanie analizuję orientację wskazanych trójkątów.

Trójkąty  $ABC$ ,  $CAP$  są zorientowane dodatnio, natomiast wielkości  $\overrightarrow{ABP}$  i  $\overrightarrow{BCP}$  są równe zero, ponieważ punkty  $A, B, P$  jak i punkty  $C, B, P$  są współliniowe.

Należy również dodać, że jeśli punkt  $P$  będzie się pokrywał z którymkolwiek innym wierzchołkiem trójkąta, to przeprowadzając analogiczne rozumowanie wyciągniemy identyczne wnioski.

Wynik całego rozumowania można podsumować stwierdzeniem, że wzór

$$\overrightarrow{ABC} = \overrightarrow{ABP} + \overrightarrow{BCP} + \overrightarrow{CAP}$$

jest na tyle uniwersalny, że można się nim posługiwać niezależnie od tego, który przypadek zachodzi.

Rozważania prowadzone były w tym rozdziale przy założeniu, że trójkąt ABC jest zorientowany dodatnio. Należy jednak podkreślić, że całość rozumowania będzie dotyczyć również sytuacji, w której wyjściowy trójkąt ABC będzie zorientowany ujemnie, a w takim przypadku argumentacja będzie przebiegać analogicznie.

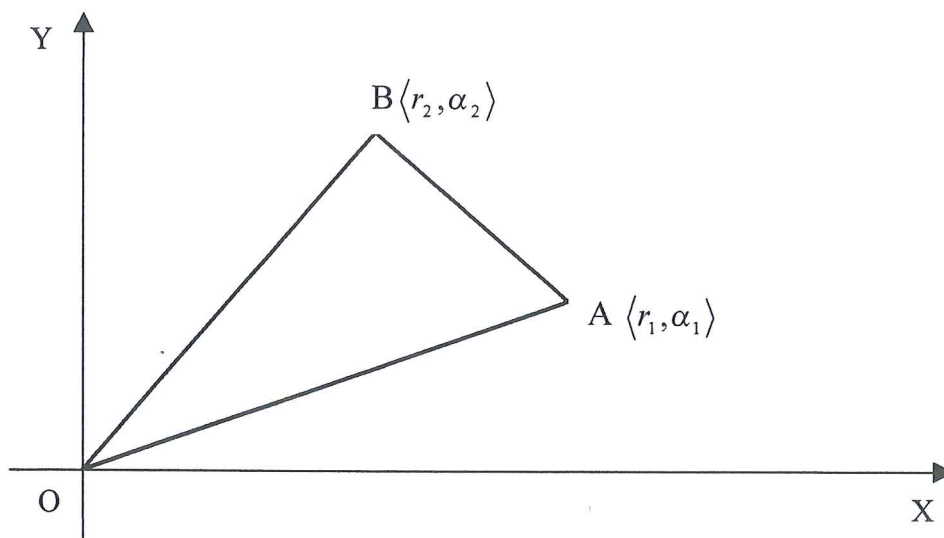
## ROZDZIAŁ 2

### Wzór na zorientowane pole w geometrii analitycznej

Celem tego rozdziału jest znalezienie wzoru na zorientowane pole dowolnego trójkąta w geometrii analitycznej.

Rozpatruję najpierw trójkąt OAB, którego jednym z wierzchołków jest początek układu współrzędnych. Jego wierzchołki w biegunowym układzie współrzędnych mają odpowiednio współrzędne  $A\langle r_1, \alpha_1 \rangle$ ,  $B\langle r_2, \alpha_2 \rangle$  (rys.12).

Zakładamy, że punkty A i B położone są jak na rysunku.

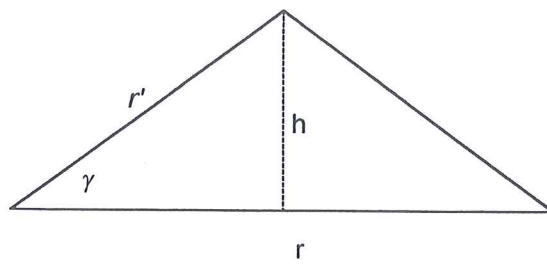


Rys. 12

Poszukiwania rozpocznę od przypomnienia wzoru na pole trójkąta mając dane długości dwóch boków i rozwartość kąta zawartego między nimi.

Niech boki trójkąta mają długości  $r$  i  $r'$ , a rozwartość kąta to  $\gamma$  (rys. 13).

Wysokość opuszczona na bok o długości  $r$  ma długość  $|r' \sin \gamma|$ . Wobec tego pole trójkąta wynosi  $\frac{1}{2} r r' |\sin \gamma|$ .



Rys. 13

A zatem korzystając z powyższego wzoru pole trójkąta OAB przedstawionego na rysunku 12 możemy zapisać:  $|OAB| = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$ .

Stosując wzór na sinus różnicy mamy:

$$|OAB| = \frac{1}{2} r_1 r_2 (\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_2),$$

wykonując proste rachunki możemy zapisać

$$|OAB| = \frac{1}{2} (r_2 \sin \alpha_2 r_1 \cos \alpha_1 - r_1 \sin \alpha_1 r_2 \cos \alpha_2).$$

Dokonując zamiany układu na kartezjański, gdzie punkty mają odpowiednio współrzędne  $(x_i, y_i)$  i stosując wzory przejścia, a mianowicie:

$$x_i = r_i \cos \alpha_i, \quad y_i = r_i \sin \alpha_i$$

otrzymujemy

$$|OAB| = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Ten wzór jest prawdziwy tylko dla opisanego położenia punktów A i B, a dokładniej, gdy  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Jeśli natomiast między kątami będzie zależność taka, że  $\alpha_2 < \alpha_1$  wtedy  $\sin(\alpha_2 - \alpha_1)$  będzie liczbą ujemną, a w związku z tym wyrażenie występujące we wzorze będzie również liczbą ujemną, przeciwną do pola  $\Delta$  OAB.

Warto również zwrócić uwagę, że  $\alpha_2 > \alpha_1$  gdy obieg trójkąta OAB jest dodatni, natomiast  $\alpha_2 < \alpha_1$ , gdy obieg  $\Delta$  OAB jest ujemny.

A zatem reasumując możemy zapisać zorientowane pole  $\Delta$  jednolitym wzorem:

$$\overline{OAB} = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \quad (*),$$

który dla  $\Delta OAB$  zorientowanego dodatnio przyjmuje wartość dodatnią, natomiast dla  $\Delta OAB$  zorientowanego ujemnie jest liczbą ujemną.

Do dalszych rozważań konieczne jest przypomnienie pojęcia wyznacznika pary wektorów. Wprowadzenie tego pojęcia pozwoli przeformułować wzór (\*) w terminach wyznacznika.

**Definicja 2.1** Niech  $\vec{u} = [a_1, a_2]$ ,  $\vec{v} = [b_1, b_2]$  będą wektorami na płaszczyźnie zadanymi za pomocą współrzędnych. Wyznacznikiem pary wektorów nazywamy liczbę:

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Interpretując powyższy wzór można zauważyć, że

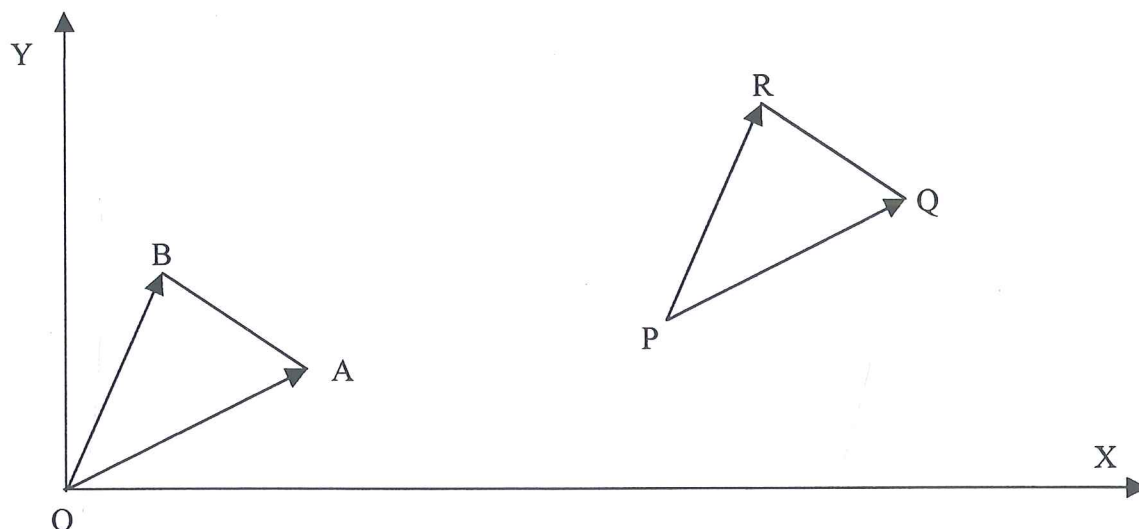
$$\overline{OAB} = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = \frac{1}{2}d(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

A zatem nasuwa się wniosek:

**Fakt 2.2** Gdy  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  są wektorami na płaszczyźnie zadanym za pomocą współrzędnych, a  $\Delta OAB$  jest takim trójkątem, że  $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$  to wyznacznik  $d(\vec{u}, \vec{v})$  równa się podwojonemu polu trójkąta  $OAB$  bądź liczbie przeciwnej do podwojonego pola  $\Delta OAB$ . Pierwszy przypadek zachodzi, gdy obieg trójkąta  $OAB$  jest dodatni, drugi zaś gdy obieg trójkąta  $OAB$  jest ujemny. Możemy, zatem zapisać  $\overline{OAB} = \frac{1}{2}d(\vec{u}, \vec{v})$  (porównaj [St], str.194-195).

Skoro jest już jasne jak policzyć zorientowane pole  $\Delta$ , którego jeden z wierzchołków pokrywa się z początkiem układu współrzędnych, spróbujmy znaleźć

przepis na zorientowane pole trójkąta PQR dowolnie umiejscowionego w układzie współrzędnych (rys. 14).



Rys. 14

Trójkąty OAB i PQR są przystającymi trójkątami zbudowanymi na wektorach  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  (patrz rys. 14).

Ponieważ wyznacznik  $d(\vec{u}, \vec{v})$  nie zależy od tego, w którym punkcie na płaszczyźnie zaczepione są wektory  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  stąd wynika, że  $d(\vec{OA}, \vec{OB}) = d(\vec{PQ}, \vec{PR})$ .

Jasnym jest również fakt, że obiegi przystających trójkątów OAB i PQR mają takie same znaki, więc  $\overline{OAB} = \overline{PQR}$ .

Stąd możemy wywnioskować, że

$$\overline{PQR} = \frac{1}{2} d(\vec{PQ}, \vec{PR})$$

Wzór ten jest jednoznaczny z odpowiedzią na pytanie o sposób na obliczanie pola dowolnego trójkąta w układzie współrzędnych.

## ROZDZIAŁ 3

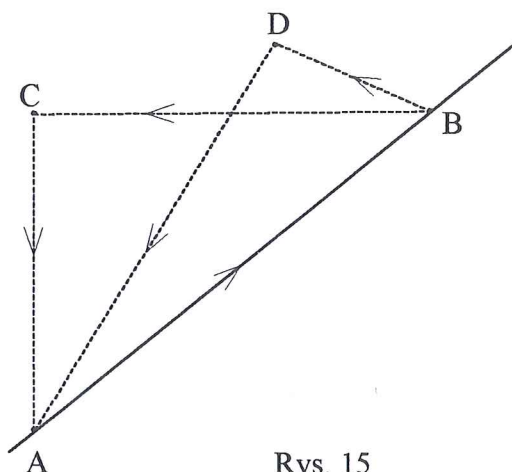
### Proste zastosowania

Przedmiotem rozważań w tym rozdziale będą proste zastosowania wynikające z wprowadzenia definicji pola zorientowanego. Zaprezentuje kilka przykładów zadań, które zilustrują przydatność tego pojęcia, nadadzą praktyczny sens tej definicji.

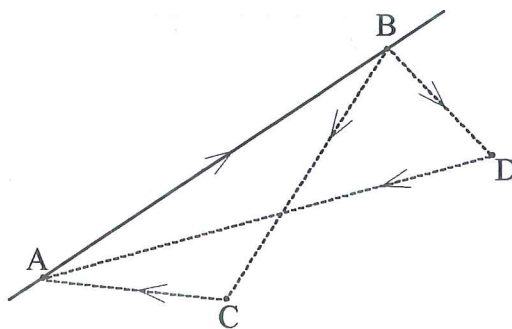
**Zadanie 3.1** Dane są punkty  $A(-2,-3)$ ,  $B(3,2)$  oraz :  
a)  $C(2,0)$ ,  $D(5,0)$   
b)  $C(0,0)$ ,  $D(5,0)$

Czy punkty  $C$  i  $D$  leżą po tej samej stronie prostej  $AB$ ? Zadanie rozstrzygnij bez rysowania punktów w układzie współrzędnych (zadanie zaczerpnięte z [St], str. 197).

Zanim przejdę do rozwiązania tego zadania spróbuję przedstawić analogiczną sytuację na rysunku, a spostrzeżenia i wyciągnięte wnioski ułatwią rozwiązanie tego zadania.

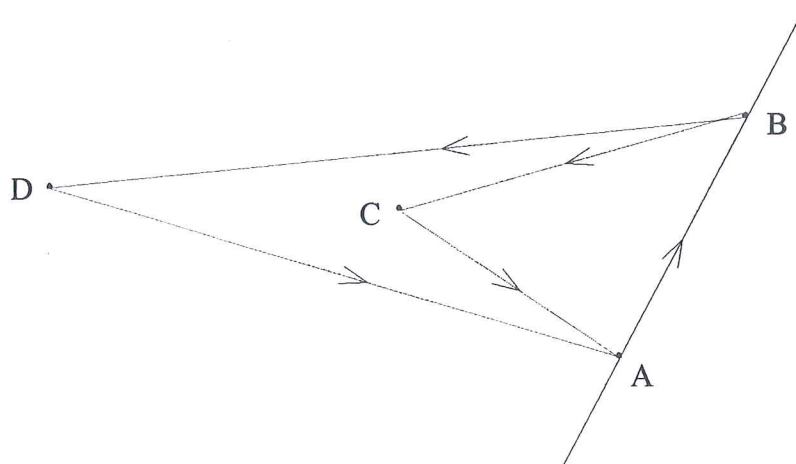


Rys. 15

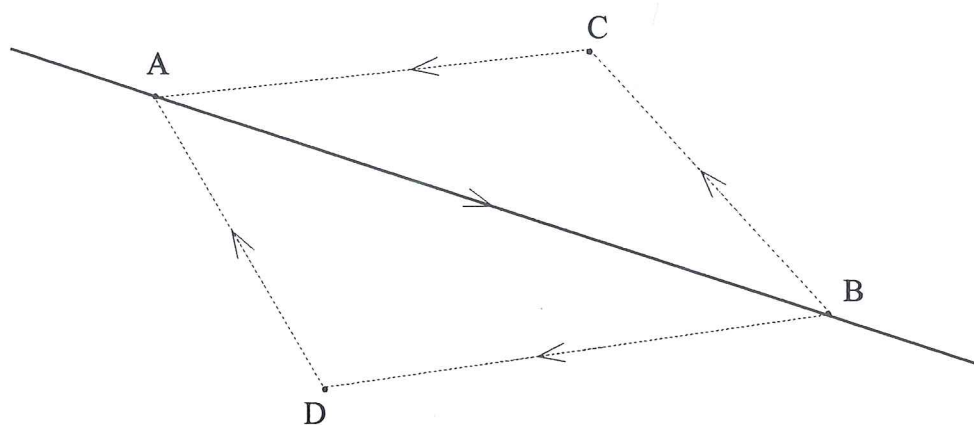


Rys. 16





Rys. 17



Rys. 18

Na rysunkach 15, 16, 17 punkty C i D leżą po tej samej stronie prostej AB, natomiast na rysunku 18 punkty C i D leżą po stronach przeciwnych prostej AB. Na podstawie rysunku 15 można wywnioskować, że  $\triangle ABC$  jak i  $\triangle ABD$  mają obiegi dodatnie. Rysunek 16 przedstawia trójkąty ABC i ABD, których obiegi są ujemne. Na rysunku 17 utworzone trójkąty mają obiegi dodatnie. Natomiast łatwo zauważyć, że  $\triangle ABC$  na rysunku 18 ma obieg dodatni, a  $\triangle ABD$  ma obieg ujemny.

Dokonane obserwacje prowadzą do następującego spostrzeżenia:

**Spostrzeżenie 3.2** *Jeśli obiegi  $\triangle ABC$  i  $\triangle ABD$  będą jednakowe, to punkty C, D będą leżały po tej samej stronie prostej AB. Jeżeli natomiast obiegi  $\triangle ABC$  i  $\triangle ABD$  będą przeciwne to punkty C i D będą leżały po przeciwnych stronach prostej AB.*

Opierając się na tym spostrzeżeniu można podać rozwiązanie zadania 3.1 bez posługiwania się rysunkiem.

### Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru badamy obieg  $\Delta ABC$  oraz obieg  $\Delta ABD$ .

a) Wykonując proste rachunki mamy:

$\vec{AB} = [5, 5]$  i  $\vec{AC} = [4, 3]$  czyli  $d(\vec{AB}, \vec{AC}) = -5$  z tego wynika, że  $\Delta ABC$  ma obieg ujemny; oraz  $\vec{AD} = [7, 3]$ , a zatem  $d(\vec{AB}, \vec{AD}) = -20$

Obieg  $\Delta ABD$  jest ujemny.

Odpowiedź: Ponieważ  $\Delta ABC$  i  $\Delta ABD$  mają obiegi jednakowego znaku to punkty C i D leżą po tej samej stronie prostej AB.

b) Nietrudno obliczyć:

$\vec{AB} = [5, 5]$  i  $\vec{AC} = [2, 3]$  oraz  $\vec{AD} = [7, 3]$  czyli  $d(\vec{AB}, \vec{AC}) = 5$ ,  $d(\vec{AB}, \vec{AD}) = -20$

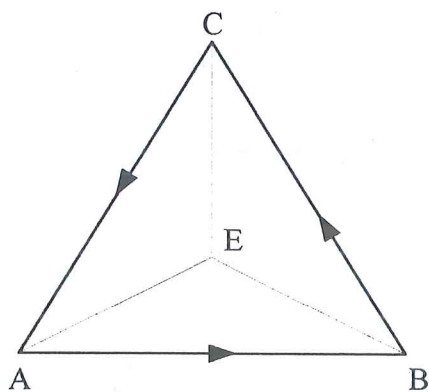
Łatwo wywnioskować:  $\Delta ABC$  ma obieg dodatni, natomiast  $\Delta ABD$  ma obieg ujemny, a zatem punkty C i D leżą po przeciwnych stronach prostej AB.

**Zadanie 3.3** Dane są punkty a)  $A(-3, -2)$ ,  $B(-1, -5)$ ,  $C(4, 2)$ ,  $E(1, 3)$

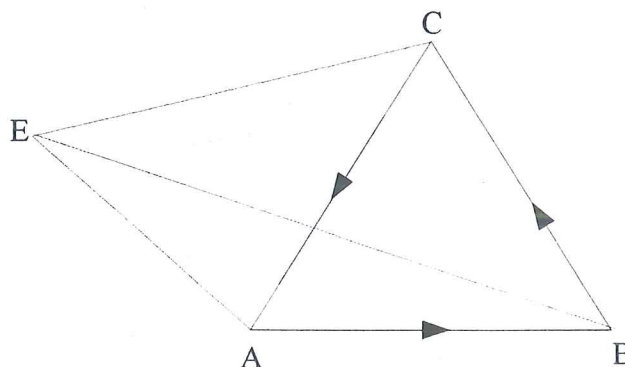
b)  $A(2, 2)$ ,  $B(5, -1)$ ,  $C(4, 3)$ ,  $E(1, -2)$

Punkty ABC tworzą trójkąt. Czy punkt E leży wewnątrz trójkąta ABC? Rozstrzygnij bez zaznaczania punktów A, B, C, E w układzie współrzędnych.

Tak jak w przypadku zadania 3.1 rozpocznę rozwiązanie od analizy podobnej sytuacji na rysunku, ponieważ obserwacje ułatwią rozwiązanie zasadniczego zadania.



Rys. 19



Rys. 20

Dany jest  $\Delta ABC$ . Łącząc wierzchołki trójkąta z punktem E otrzymujemy  $\Delta ABE$ ,  $\Delta BCE$ ,  $\Delta CAE$  (zakładamy, że  $E \notin AB, BC, AC$ ). Podane w takiej kolejności wierzchołki wyznaczają obieg trójkąta. Na rysunku 19 wskazane trójkąty mają obiegi dodatnie, natomiast analizując rysunek 20 można zaobserwować, że  $\Delta ABE$  oraz  $\Delta BCE$  mają obiegi dodatnie, a  $\Delta CAE$  ma obieg ujemny.

Na podstawie tych obserwacji można sformułować wniosek:

**Fakt 3.4** *Jeśli istnieje zgodność co do znaku, obiegów trójkątów  $ABE$ ,  $BCE$  i  $CAE$  to punkt  $E$  leży wewnątrz  $\Delta ABC$ . Jeżeli obiegi trójkątów  $ABC$ ,  $BCE$ ,  $CAE$  nie mają jednakowych znaków, to można wnioskować, że punkt  $E$  leży poza  $\Delta ABC$ .*

Korzystając z tego faktu można rozwiązać zadanie nie wykonując rysunku w układzie współrzędnych.

### **Rozwiązanie**

Wykonując proste rachunki badamy znak obiegu poszczególnych trójkątów:

$$\text{a) Mamy: } \overline{AB} = [2, 7], \overline{AE} = [4, 5] \text{ stąd } d(\overline{AB}, \overline{AE}) = -18$$

$$\overline{BC} = [5, -3], \overline{BE} = [2, -2], \text{ a zatem } d(\overline{BC}, \overline{BE}) = -4$$

$$\overline{CA} = [-7, -4], \overline{CE} = [-3, -1] \text{ czyli } d(\overline{CA}, \overline{CE}) = -19$$

Podsumowując przedstawione rachunki można udzielić odpowiedzi na postawione w zadaniu pytanie, a mianowicie: ponieważ obiegi zadanych trójkątów są wszystkie ujemne (ten sam znak obiegu dla wszystkich trzech trójkątów) to punkt E leży wewnątrz trójkąta ABC.

$$\text{b) Mamy: } \overline{AB} = [3, -3], \overline{AE} = [-1, 4] \text{ stąd } d(\overline{AB}, \overline{AE}) = -15$$

$$\overline{BC} = [-1, 4], \overline{BE} = [-4, -1], \text{ a zatem } d(\overline{BC}, \overline{BE}) = 17$$

$$\overline{CA} = [-2, -1], \overline{CE} = [-3, -5] \text{ czyli } d(\overline{CA}, \overline{CE}) = 7$$

Odpowiedź: Na podstawie poczynionych rachunków wnioskujemy, że skoro znaki obiegi trójkątów  $ABE$ ,  $BCE$ ,  $CAE$  nie są jednakowe, to punkt E znajduje się poza trójkątem ABC.

Przedstawione przykłady prostych zadań pokazują jakie zastosowanie może mieć pojęcie pola zorientowanego.

## ROZDZIAŁ 4

### Zastosowanie do wprowadzenia pojęcia pola dla wielokątów

Rozważania zawarte w niniejszym rozdziale poświęcam problematyce dotyczącej pojęcia pola wielokątów. Całość rozdziału przedstawię w ujęciu podanym przez A.B.Погорелова w książce „Геометрия” [P].

W szkole podstawowej, średniej stykamy się z różnymi wzorami określającymi pola figur. Bazę naszych wiadomości stanowią zapewne wzory na pole trójkąta, prostokąta, koła. Mając podstawowe wiadomości jesteśmy w stanie poradzić sobie nawet w sytuacji, kiedy istnieje konieczność wyznaczenia pola dowolnego wielokąta. Wtedy zwykle kierujemy się zasadą podziału pola danego wielokąta na trójkąty, tak jak to dawniej czynili jeometry. Niejednokrotnie bazujemy również na algorytmach postępowania określonych przez geodetów.

Chcąc jednak uściślić rozważania dotyczące pojęcia pola wprowadzę przepis na wyznaczanie pól tak zwanych figur prostych. Rozpocznę od przybliżenia pojęcia figury prostej.

**Definicja 4.1** Figura prosta  $F$  jest sumą nie zachodzących trójkątów, które dzielą figurę  $F$  w taki sposób, że dwa trójkąty tego podziału nie mają punktów wspólnych, albo mają wspólny wierzchołek, albo wspólny cały bok.

Po krótkim wyjaśnieniu można uczynić drugi krok, określając przepis na wyznaczanie pól figur prostych w następujący sposób:

1. Pole trójkąta jest równe  $\frac{1}{2}ah$ , gdzie  $a$  to bok trójkąta, natomiast  $h$  jest wysokością opuszczoną na ten bok.
2. Pole figury prostej  $F$  będącej sumą nie zachodzących na siebie trójkątów  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$  wynosi  $P(F) = P(\Delta_1) + P(\Delta_2) + \dots + P(\Delta_k)$ .

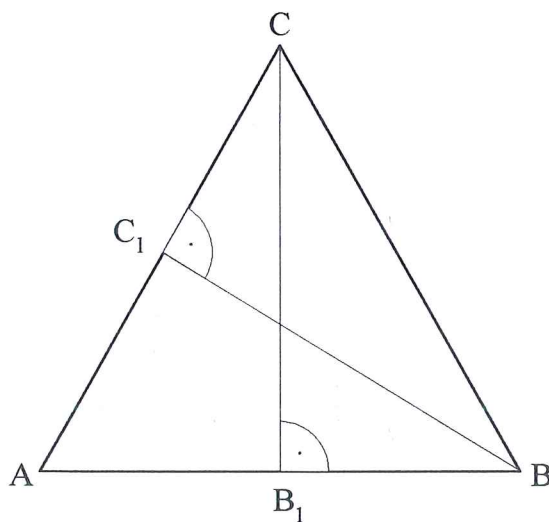
Zasadniczy problem wynikający z takiego określenia brzmi: czy stosując różne podziały figury na trójkąty i sumując ich pola, na pewno otrzymamy zawsze taką samą liczbę.

Problem ten dotyczy również trójkątów i sprowadza się do pytania: czy dzieląc trójkąt na pewną ilość mniejszych trójkątów i sumując ich pola określone wzorem  $\frac{1}{2}ah$ , zawsze otrzymamy liczbę równą polu całego trójkąta obliczonego według wzoru  $\frac{1}{2}ah$ ?

Z tak postawionego problemu wynika kolejne zapytanie: czy wielkość  $\frac{1}{2}ah$  dla trójkąta na pewno nie zależy od wyboru boku na podstawę  $a$ , oraz odpowiedniej wysokości?

W pierwszej kolejności uzasadnię fakt, iż pole trójkąta nie zależy od wyboru boku i odpowiedniej wysokości.

Dany jest trójkąt  $ABC$ , oznaczam  $|BB_1|$ ,  $|CC_1|$  - wysokości poprowadzone z wierzchołków  $B$ ,  $C$  (rys 21).



Rys. 21

Trójkąty  $AC_1C$  i  $AB_1B$  są podobne (cecha kk) ponieważ:

1.  $\angle A$  jest dla obu trójkątów kątem wspólnym;
2. trójkąty są prostokątne, czyli jeden z kątów w każdym trójkącie jest prosty.

Stąd 
$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CC_1|}{|BB_1|} \Rightarrow |AC||BB_1| = |AB||CC_1|$$

A zatem 
$$\frac{1}{2}|AC||BB_1| = \frac{1}{2}|AB||CC_1|,$$

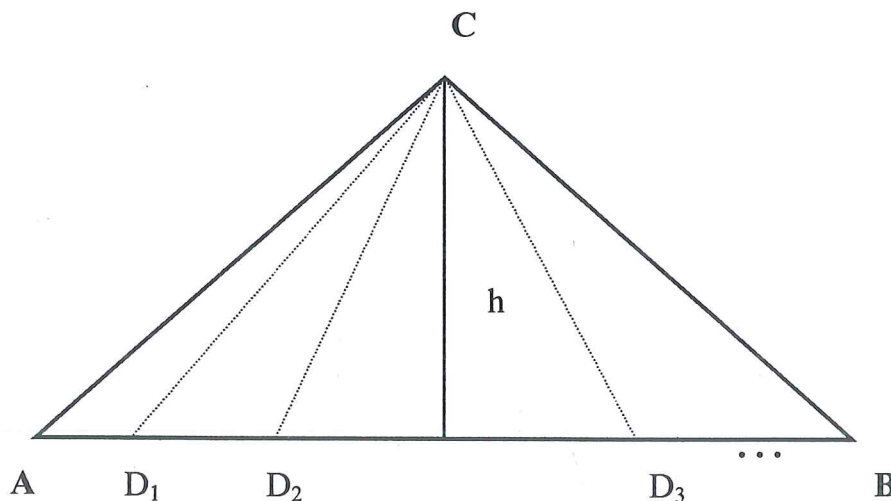
czyli dwa sposoby obliczania pola trójkąta prowadzą do tego samego wyniku.

Skoro pole trójkąta nie zależy od wyboru boku i odpowiedniej dla boku wysokości możemy poruszyć kolejny problem dotyczący trójkąta, a mianowicie, że przy rozbiciu trójkąta na mniejsze trójkąty, pole będzie równe sumie pól trójkątów tego rozbicia niezależnie od sposobu rozbicia.

Własność tę uzasadnię przedstawiając dwa różne rodzaje rozbicia trójkąta ABC.

**Rozbicie trójkąta ABC przez odcinki podziału wychodzące z jednego wierzchołka.**

Rozpatruję rozbicie przedstawione na rysunku 22, które polega na tym, że z jednego wierzchołka prowadzimy do przeciwległego boku kilka odcinków podziału.



Rys. 22

Trójkąt ABC został rozbity na trójkąty  $CAD_1$ ,  $CD_1D_2$ ,  $CD_2D_3$ , ... Wszystkie trójkąty mają wspólna wysokość  $h$ , poprowadzoną z ich wspólnego wierzchołka C.

Wysokość  $h$  jest również wysokością  $\Delta ABC$ , a zatem suma pól trójkątów danego rozbicia ma postać:

$$\frac{|AD_1|h}{2} + \frac{|D_1D_2|h}{2} + \frac{|D_2D_3|h}{2} + K = \frac{h(|AD_1| + |D_1D_2| + |D_2D_3| + K)}{2}.$$

Ponieważ jednak  $|AD_1| + |D_1D_2| + |D_2D_3| + K = |AB|$

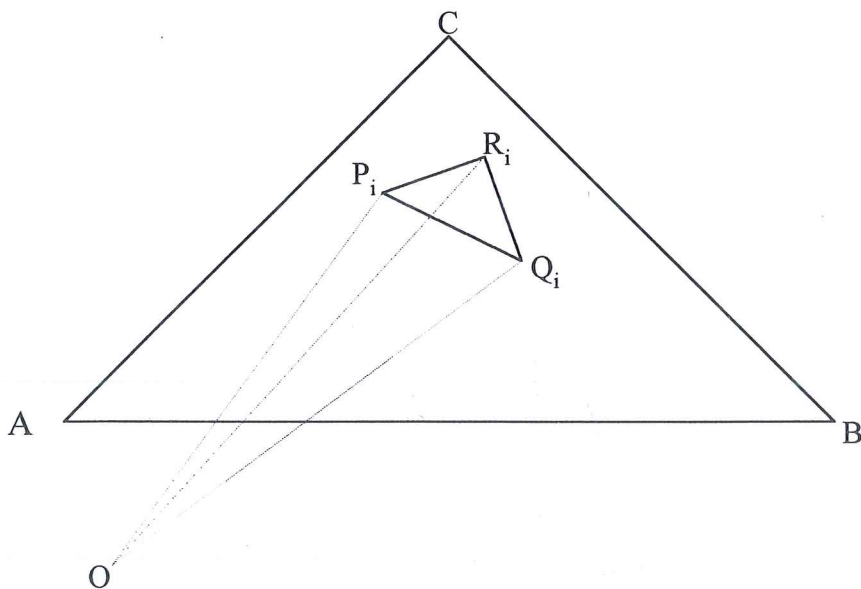
stąd możemy dalej wyliczać  $\frac{h(|AD_1| + |D_1D_2| + |D_2D_3| + K)}{2} = \frac{h|AB|}{2},$

a jest to pole  $\Delta ABC$ .

### Dowolne rozbicie trójkąta $ABC$ .

Dany jest trójkąt  $ABC$ , którego wierzchołki oznaczone są w taki sposób, że obieg  $\Delta ABC$  jest dodatni.

Rozpatruję następnie rozbicie  $\Delta ABC$ , które polega na tym, że trójkąt  $ABC$  jest podzielony na trójkąty  $P_i Q_i R_i$  w sposób dowolny. Jednocześnie wierzchołki trójkątów rozbicia oznaczamy symbolami  $P_i, Q_i, R_i$  również w taki sposób, że obiegi powstałych trójkątów  $P_i Q_i R_i$  są wszystkie dodatnie.



Rys. 23

Rozważmy sumę pól trójkątów  $P_i Q_i R_i$ . Uwzględniając orientację tych trójkątów pole każdego z nich jest równe zorientowanemu polu  $\overrightarrow{P_i Q_i R_i}$ .



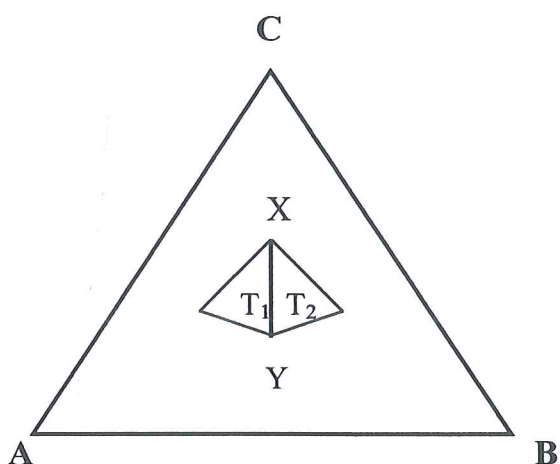
Korzystając ze wzoru uzasadnionego wcześniej w rozdziale 1 wiemy, że

$$\sum_i \overrightarrow{P_i Q_i R_i} = \sum_i (\overrightarrow{OP_i Q_i} + \overrightarrow{OQ_i R_i} + \overrightarrow{OR_i P_i}) (**).$$

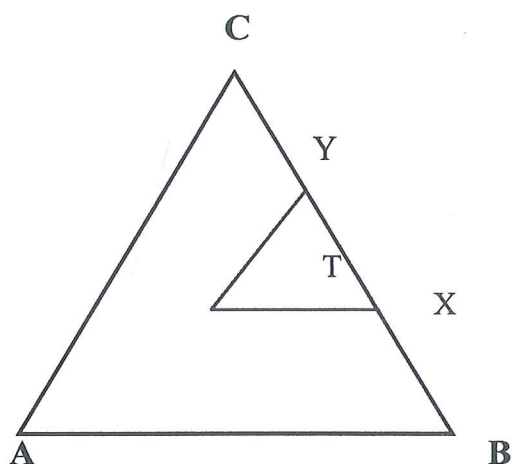
Każdy składnik powyższej sumy zapisuję w postaci ogólnej jako  $\overrightarrow{OXY}$ .

Będę rozważała dwie możliwości położenia odcinków  $XY$ , a mianowicie:

1. odcinek  $XY$  zawiera się w brzegu trójkąta  $ABC$ ,
2. odcinek  $XY$  przechodzi przez wnętrze trójkąta  $ABC$ .



Rys. 24



Rys. 25

Jeżeli odcinek  $XY$  leży wewnątrz trójkąta  $ABC$  (patrz rys.24) to pole trójkąta  $OXY$  liczy się dwukrotnie, dlatego, że  $XY$  jest bokiem dwóch trójkątów rozbicia,  $T_1$  i  $T_2$ . Trójkąty te położone są po różnych stronach odcinka  $XY$ , a zatem dodatni kierunek obiegu jednego z tych trójkątów będzie prowadził od  $X$  do  $Y$ , zaś drugiego od  $Y$  do  $X$ .

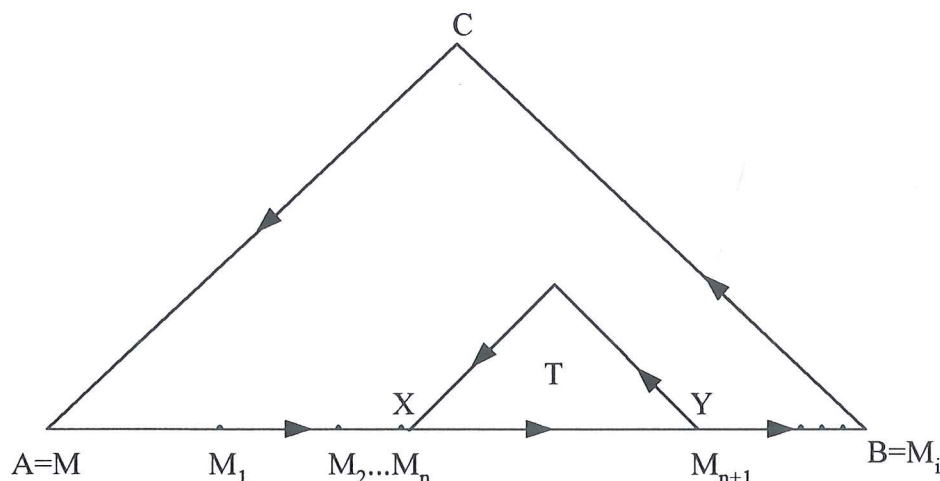
W takim razie w sumie po prawej stronie równości  $(**)$  pojawią się składniki  $\overrightarrow{OXY}$  i  $\overrightarrow{OYX}$ . Oczywiście w tej sumie znajdują się również składniki drugiego typu, czyli takie trójkąty  $T$ , że odcinek  $XY$  zawiera się w brzegu trójkąta  $ABC$  (rys. 25).

Przyglądnijmy się teraz dokładniej składnikom typu  $\overrightarrow{OXY}$  i  $\overrightarrow{OYX}$ . Ponieważ takie trójkąty mają obiegi o przeciwnych znakach, to odcinek  $XY$  będzie traktowany raz jako wielkość „+”, drugi raz jako wielkość „-”, stąd ulegnie wykasowaniu. Czyli mówiąc o sumie zorientowanych pól tych trójkątów wnioskujemy, że  $\overrightarrow{OXY} + \overrightarrow{OYX} = 0$ .

Jeśli składniki tego typu pogrupujemy w analogiczny sposób, to ostateczna suma wszystkich tych składników będzie równa zero.

A zatem w sumie określonej wzorem (\*\*\*) pozostają do rozważenia tylko te składniki  $\overline{OXY}$ , dla których bok  $XY$  zawiera się w brzegu trójkąta  $ABC$ .

Przyglądnijmy się dokładniej tym trójkątom podziału, które mają bok  $XY$  zawarty w boku  $AB$  trójkąta  $ABC$ . Obieg trójkąta  $T$  jest zgodny z obiegiem  $\Delta ABC$ . Na rysunku 26 widoczna jest zgodność obiegów na wspólnej części brzegu obu trójkątów.



Rys. 26

Punkty  $M_1, M_2, \dots$  są kolejnymi wierzchołkami trójkątów podziału leżącymi na boku  $AB$  (rys. 26). W sumie (\*\*\*) występują składniki  $\overline{OMM_1}, \overline{OM_1M_2}, \dots, \overline{OM_{i-1}M_i}$ . Korzystając z wniosków przeprowadzonego w tym rozdziale rozumowania (patrz str.22-23) mogę stwierdzić, że suma wszystkich składników  $\overline{OM_{i-1}M_i}$  jest równa  $\overline{OAB}$ .

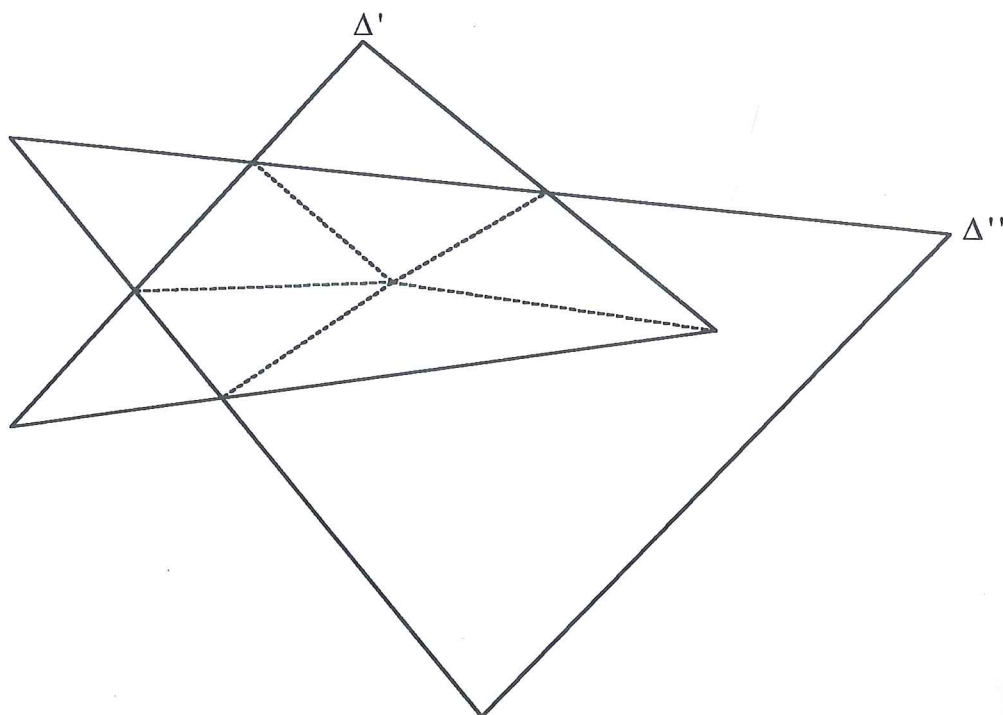
Jeśli przeanalizujemy w ten sam sposób sumę wszystkich tych składników  $\overline{OXY}$ , dla których odcinki  $XY$  będą zawarte w boku  $BC$ , a następnie zawarte w boku  $CA$ , to łatwo wywnioskujemy, że wszystkie te składniki w sumie dadzą  $\overline{OBC}$ , oraz  $\overline{OCA}$ .

Zbierając wszystkie informacje dotyczące trójkąta  $ABC$  możemy zapisać, że

$$\sum \overline{P_i Q_i R_i} = \overline{OAB} + \overline{OBC} + \overline{OCA}.$$

Natomiast suma po prawej stronie zgodnie ze wzorem uzasadnionym w pierwszym rozdziale (str.10) jest równa  $\overline{ABC}$ , czyli jest równa polu trójkąta  $ABC$ .

Po tych rozważaniach mogę przejść do zasadniczego problemu, postawionego na początku niniejszego rozdziału, a dokładniej przeanalizuję czy dzieląc figurę  $F$  na trójkąty nie zachodzące na siebie i sumując ich pola otrzymamy zawsze tą samą liczbę. Dana figura  $F$  przedstawiona na rysunku 21 rozbita jest w jednym przypadku na trójkąty  $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, K$ , w drugim przypadku na trójkąty  $\Delta''_1, \Delta''_2, \Delta''_3, K$  (rys. 27).



Rys. 27

Uzasadnię, że sumy pól trójkątów pierwszego i drugiego rozbita są jednakowe.

Trójkąty pierwszego i drugiego rozbita rozbijają figurę  $F$  na wielokąty wypukłe: trójkąty, czworokąty, pięciokąty, sześciokąty. Każdy taki wielokąt można przedstawić jako część wspólna jednego trójkąta pierwszego rozbita oraz jednego trójkąta drugiego rozbita.

Rozbijamy wielokąty na trójkąty  $\Delta''_1, \Delta''_2, \Delta''_3, K$ , przy czym robimy to tak, aby dwa trójkąty tego rozbita nie miały punktów wspólnych, albo miały wspólny wierzchołek,

albo wspólny bok. Według dowodu każdy trójkąt  $\Delta'_k$  pierwszego rozbicia figury F równy jest sumie pól trójkątów  $\Delta''_k$ , które go budują. Także każdy trójkąt  $\Delta''_k$  drugiego rozbicia przedstawia się w postaci sumy trójkątów  $\Delta'''_k$ . Dlatego sumy pól trójkątów pierwszego i drugiego rozbicia figury F równe są sumie pól trójkątów  $\Delta'''_k$ . W takim razie sumy pól trójkątów pierwszego i drugiego rozbicia są równe, to znaczy, że pole figury F nie zależy od sposobu rozbicia jej na trójkąty.

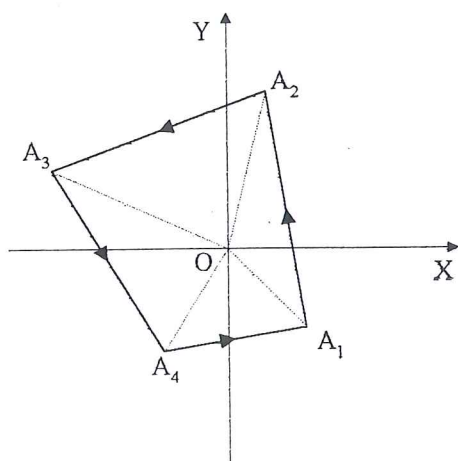
## ROZDZIAŁ 5

# Zastosowanie zorientowanego pola do wyprowadzenia wzoru na pole dowolnego wielokąta w geometrii analitycznej

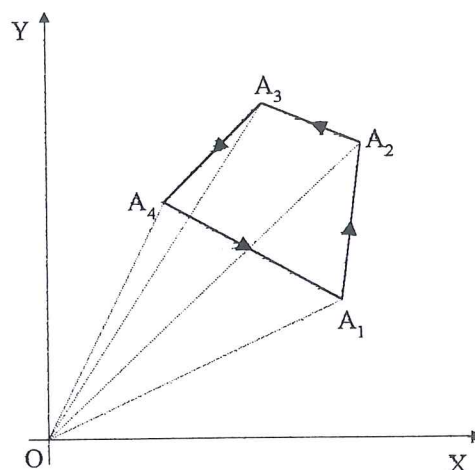
W niniejszym rozdziale rozważę możliwość zastosowania pojęcia pola zorientowanego do określenia wzoru na pole dowolnego wielokąta zadanego w układzie współrzędnych.

Pierwszym etapem moich rozważań w tym rozdziale będzie próba określenia pojęcia zorientowanego pola dla dowolnego wielokąta z wyróżnionym kierunkiem obiegu, w sposób analogiczny do trójkąta. Następnie uogólnię wzór analityczny na zorientowane pole trójkąta na przypadek dowolnego wielokąta.

Przeanalizujmy czworokąt  $A_1A_2A_3A_4$ . Na rysunku pokazane są przykładowe położenia czworokąta względem początku układu współrzędnych. (rys. 28)



Rys. 28 a



Rys. 28 b

Czworokąty  $A_1A_2A_3A_4$  przedstawione na rysunku 28 a i b mają obiegi dodatnie, co łatwo zaobserwować wzorując się na zasadzie dotyczącej określania kierunku obiegu dla dowolnego trójkąta.

Na podstawie rysunku 28 b można zapisać pole czworokąta jako następującą sumę

$$|A_1A_2A_3A_4| = |OA_1A_2| + |OA_2A_3| + |OA_3A_4| - |OA_4A_1|.$$

Biorąc pod uwagę orientację poszczególnych trójkątów (trójkąty  $OA_1A_2$ ,  $OA_2A_3$ ,  $OA_3A_4$  zorientowane dodatnio,  $\Delta OA_4A_1$  zorientowany ujemnie) możemy zapisać:

$$\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4} = \overrightarrow{OA_1A_2} + \overrightarrow{OA_2A_3} + \overrightarrow{OA_3A_4} + \overrightarrow{OA_4A_1}$$

I ostatecznie, aby policzyć wartość  $\overrightarrow{A_1A_2A_3A_4}$  wystarczy wykorzystać wyprowadzony w rozdziale 2 wzór na pole trójkąta zorientowanego.

Warto również zwrócić uwagę na to, że wzór ten nie ulegnie zmianie, jeśli rozpatrywany czworokąt będzie miał obieg ujemny.

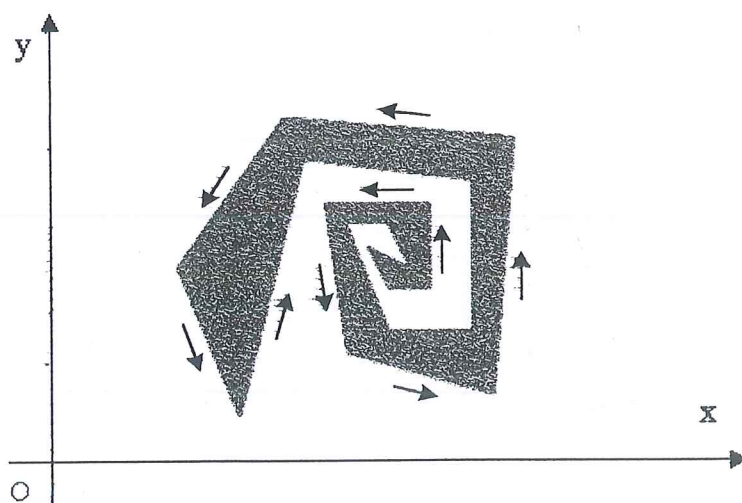
Sytuacja w tym przykładzie jest uproszczona, jeśli chodzi o obliczenie pola tego wielokąta z dwóch powodów. Po pierwsze bardzo łatwo określić obieg tego wielokąta, jednocześnie również nie trudno policzyć jego pole, korzystając z odpowiedniego wzoru.

Zatem można się zastanawiać, co będzie w przypadku bardziej skomplikowanego wielokąta?

Wraz z tym zapytaniem nasuwają się dwa podstawowe problemy, które postaram się rozwiązać w tym rozdziale. Pierwszy z nich dotyczy określenia pojęcia obiegu wielokąta, natomiast drugi jest zapisany wprost w tytule tego rozdziału.

Jak określić kierunek obiegu wielokąta pokazanego na rysunku 29?

Aby odpowiedzieć na to pytanie trzeba powrócić do trójkąta (rys. 30)



Rys. 29

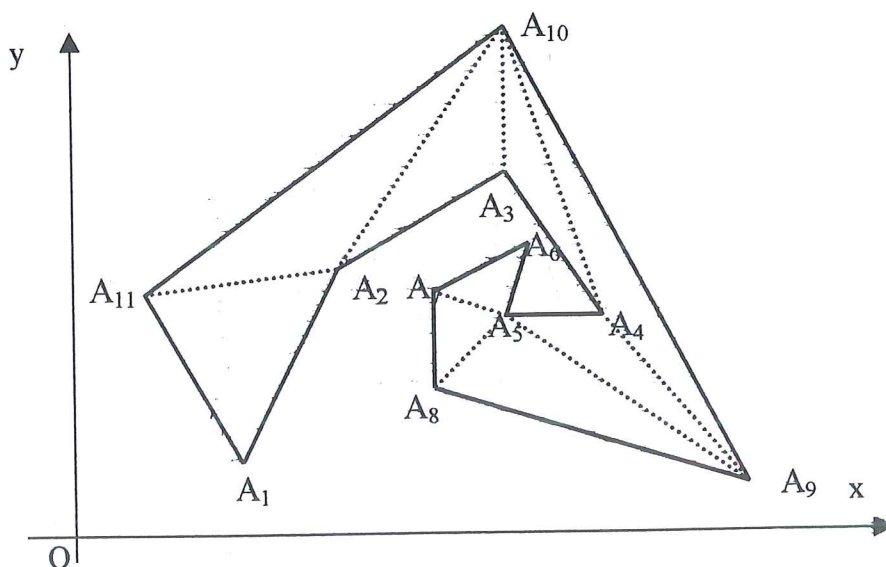


Rys. 30

Patrząc na rysunek można zaobserwować, że jeśli trójkąt ma obieg dodatni to obszar będący wewnątrz trójkąta leży po lewej stronie prostej wyznaczającej kierunek obiegu tego trójkąta na jednym z jego boków. Natomiast, jeśli obieg trójkąta jest ujemny to obszar ten leży po prawej stronie prostej wyznaczającej kierunek obiegu trójkąta na jednym z jego boków.

Ten wniosek można przełożyć na dowolny wielokąt, chcąc określić kierunek jego obiegu. A zatem jeśli wewnątrz wielokąta znajduje się po prawej stronie wybranego odcinka, będącego bokiem tego wielokąta to obieg tego wielokąta jest ujemny. Porównywalnie postępujemy w przypadku określania obiegu dodatniego wielokąta. Korzystając z tego faktu możemy stwierdzić, że wielokąt z rysunku 29 jest zorientowany dodatnio.

Przeanalizujemy wielokąt  $A_1A_2 \dots A_{11}$  z rysunku 33.



Rys. 31

Wielokąt  $\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_{11}}$  zorientowany dodatnio dzielię na trójkąty w sposób dowolny. Korzystając z faktu uzasadnionego w rozdziale 4 mogę podzielić ten wielokąt na trójkąty nie zachodzące na siebie i sumując ich pola otrzymam zawsze tą samą liczbę. A zatem w myśl powyższego stwierdzenia można zapisać:

$$\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_{11}} = \overrightarrow{A_1 A_2 A_{11}} + \overrightarrow{A_{10} A_{11} A_2} + \overrightarrow{A_2 A_3 A_{10}} + \overrightarrow{A_9 A_{10} A_3} + \overrightarrow{A_3 A_4 A_9} + \dots \quad (***)$$

Każdy ze składników tej sumy możemy zapisać jako sumę zorientowanych pól trójkątów:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1 A_2 A_{11}} &= \overrightarrow{OA_1 A_2} + \overrightarrow{OA_2 A_{11}} + \overrightarrow{OA_{11} A_1} \\ \overrightarrow{A_{10} A_{11} A_2} &= \overrightarrow{OA_{10} A_{11}} + \overrightarrow{OA_{10} A_2} + \overrightarrow{OA_{11} A_2} \end{aligned}$$

Pozostałe składniki zapisujemy w analogiczny sposób. Grupujemy otrzymane składniki sumy podstawowej na dwa rodzaje składników, to znaczy składniki typu  $\overrightarrow{OA_1 A_2}$ ,  $\overrightarrow{OA_2 A_3}$ ,  $\overrightarrow{OA_3 A_4}$ , ..., oraz typu  $\overrightarrow{OA_2 A_{11}}$ ,  $\overrightarrow{OA_{11} A_2}$ ,  $\overrightarrow{OA_2 A_{10}}$ ,  $\overrightarrow{OA_{10} A_2}$ , .... Składniki pierwszego typu to składniki postaci  $\overrightarrow{OXY}$ , których bok  $XY$  jest jednocześnie bokiem wielokąta  $\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_{11}}$ , natomiast składniki drugiego typu to takie składniki, których bok jest odcinkiem podziału wielokąta (np. dla  $\overrightarrow{OA_2 A_{11}}$  bok  $A_2 A_{11}$  jest odcinkiem podziału).

Przyjrzyjmy się dokładnie składnikom drugiego typu. Nietrudno zauważyć, że składniki te występują parami postaci  $\overrightarrow{OXY}$  i  $\overrightarrow{OYX}$ , np.:  $\overrightarrow{OA_2 A_{11}}$  i  $\overrightarrow{OA_{11} A_2}$ . Obiegi  $OXY$  i  $OYX$  trójkąta  $OXY$  są przeciwne, wobec tego wielkości  $\overrightarrow{OXY}$  i  $\overrightarrow{OYX}$ , są też do siebie przeciwne, a zatem ich suma wynosi zero. W takim razie  $\overrightarrow{OA_2 A_{11}} + \overrightarrow{OA_{11} A_2} = 0$ .

W rezultacie suma wszystkich składników tego typu daje wartość zero.

A zatem po prawej stronie wzoru (\*\*\*) pozostaną tylko składniki pierwszego typu,

czyli 
$$\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_{11}} = \overrightarrow{OA_1 A_2} + \overrightarrow{OA_2 A_3} + \dots + \overrightarrow{OA_{10} A_{11}} + \overrightarrow{OA_{11} A_1}.$$

To oznacza, że zorientowane pole wielokąta  $\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_{11}}$  liczymy sumując zorientowane pola trójkątów  $\overrightarrow{OA_1 A_2}$ ,  $\overrightarrow{OA_2 A_3}$ , ...,  $\overrightarrow{OA_{10} A_{11}}$ ,  $\overrightarrow{OA_{11} A_1}$ .

Należy również zwrócić uwagę na fakt, że ten wzór pozostanie bez zmian, jeśli obieg wielokąta  $\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_{11}}$  będzie ujemny.



Analogiczne rozumowanie przeprowadza się dla dowolnego wielokąta  $A_1 A_2 \dots A_n$ , a rezultat sprowadza się do następującego wniosku, który można zapisać w postaci wzoru:

$$\overrightarrow{A_1 \dots A_n} = \overrightarrow{OA_1 A_2} + \overrightarrow{OA_2 A_3} + \dots + \overrightarrow{OA_{n-1} A_n} + \overrightarrow{OA_n A_1}.$$

Stosując uzyskane wcześniej analityczne wzory na wielkość  $\overrightarrow{OA_i A_{i+1}}$  możemy podać wzór na zorientowane pole  $\overrightarrow{A_1 \dots A_n}$  wielokąta w geometrii analitycznej.

Oznaczając współrzędne punktów  $A_i$  jako  $(x_i, y_i)$  zapisujemy wzór:

$$\overrightarrow{A_1 \dots A_n} = \sum (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}).$$

Ponieważ pole w sensie zwykłym jest wartością bezwzględną z pola zorientowanego,

czyli  $|A_1 \dots A_n| = |\overrightarrow{A_1 \dots A_n}|$ , a zatem dostajemy

$$|A_1 \dots A_n| = \left| \sum (x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}) \right| = |(x_1 y_2 - y_1 x_2) + (x_2 y_3 - y_2 x_3) + \dots + (x_n y_1 - y_n x_1)|.$$

## ROZDZIAŁ 6

### Wielokąty gwiaździste

Podstawowy problem ostatniego rozdziału mojej pracy sprowadza się do następującego pytania: jaka jest interpretacja geometryczna zorientowanego pola wielokątów z samoprzecięciami, zwanych inaczej wielokątami gwiaździstymi?

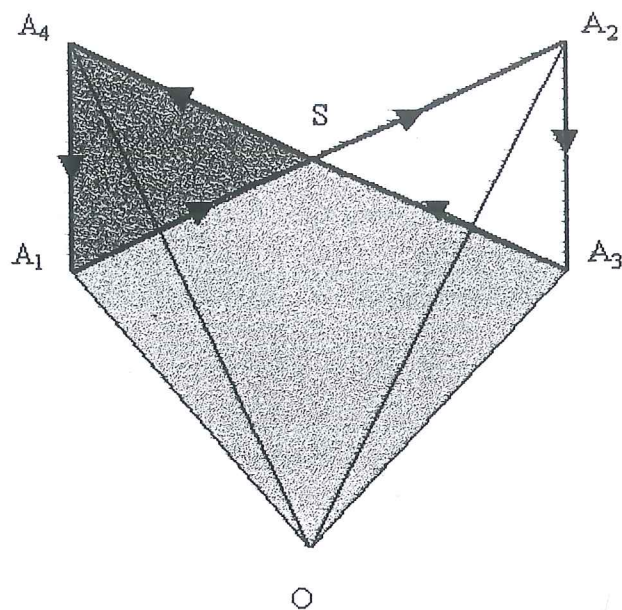
W poprzednim rozdziale znalazłam odpowiedź na pytanie o zorientowane pole dowolnego normalnego wielokąta (bez samoprzecięć). Odpowiedź można sformułować w postaci następującego wzoru  $\overrightarrow{A_1 \dots A_n} = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i A_{i+1}}$ . Przez analogię, zorientowanym polem wielokąta gwiaździstego  $A_1 \dots A_n$  będziemy nazywać wielkość  $\sum_{i=1}^n A_i A_{i+1}$ . Pole to oznaczać będziemy tym samym symbolem  $\overrightarrow{A_1 \dots A_n}$ .

W tym rozdziale będę się zastanawiać, co oznacza ta wielkość dla wielokątów gwiaździstych. To zapytanie pociąga za sobą kolejne, o to czy dana wielkość będzie zależała od wyboru punktu O. Odpowiedź będzie wynikała bezpośrednio z uzasadnienia postawionej w tym rozdziale hipotezy.

Zanim przejdę do zasadniczego problemu spróbuję wyjaśnić pojęcie wielokątów gwiaździstych.

**Definicja 6.1** *Wielokąty gwiaździste, są to wielokąty z samoprzecięciami (łamana zamknięta z dopuszczeniem samoprzecięć).*

Jako pierwszy przykład wielokąta gwiaździstego rozpatruję czworokąt  $\overrightarrow{A_1 A_2 A_3 A_4}$  – „kokardka” (rys. 32).



Rys. 32

Obieramy punkt  $O$  i rozważymy powstałe trójkąty (porównaj rys. 32).

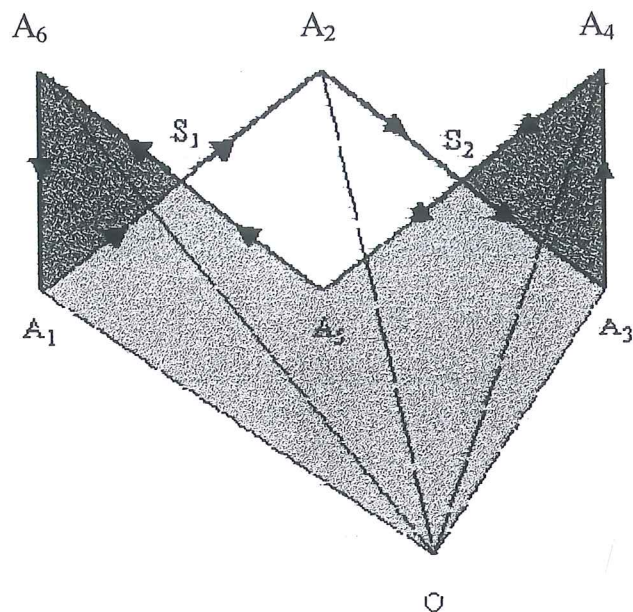
Pole tego czworokąta w myśl definicji zapisujemy jako:

$$\overrightarrow{A_1 \dots A_4} = \overrightarrow{OA_1A_2} + \overrightarrow{OA_2A_3} + \overrightarrow{OA_3A_4} + \overrightarrow{OA_4A_1}.$$

Z rysunku łatwo zauważyć, że  $\overrightarrow{OA_1A_2}$ ,  $\overrightarrow{OA_2A_3}$ , są zorientowane ujemnie, natomiast  $\overrightarrow{OA_3A_4}$ ,  $\overrightarrow{OA_4A_1}$  zorientowane dodatnio. Pewne części tych trójkątów nakładają się na siebie, co jest widoczne na rysunku 32, to oznacza, że ich pola liczone raz ze znakiem plus, raz ze znakiem minus (w zależności od orientacji trójkąta) a ostatecznie te części kasują się. W związku z tym pozostają dwa trójkąty  $SA_2A_3$ ,  $SA_4A_1$ , które stanowią pole czworokąta  $A_1A_2A_3A_4$ . Pole trójkąta  $SA_2A_3$ , pojmowane w sensie zwykłym będzie liczbą ujemną, natomiast trójkąta  $SA_4A_1$  będzie liczbą dodatnią.

Warto również zauważyć, że obiegi tych trójkątów są zgodne z obiegiem czworokąta to znaczy obieg czworokąta  $A_1A_2A_3A_4$  ograniczony do trójkąta  $SA_2A_3$  jest ujemny, natomiast ograniczony do trójkąta  $SA_4A_1$  jest dodatni.

Rozważmy kolejny wielokąt gwiaździsty  $\overrightarrow{A_1 \dots A_6}$  - „cukierek” (rys. 33).

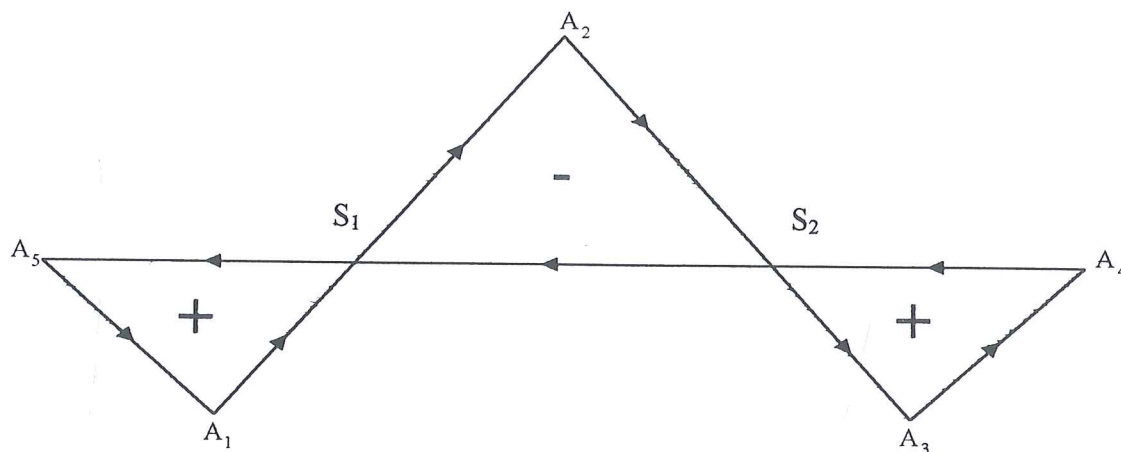


Rys. 33

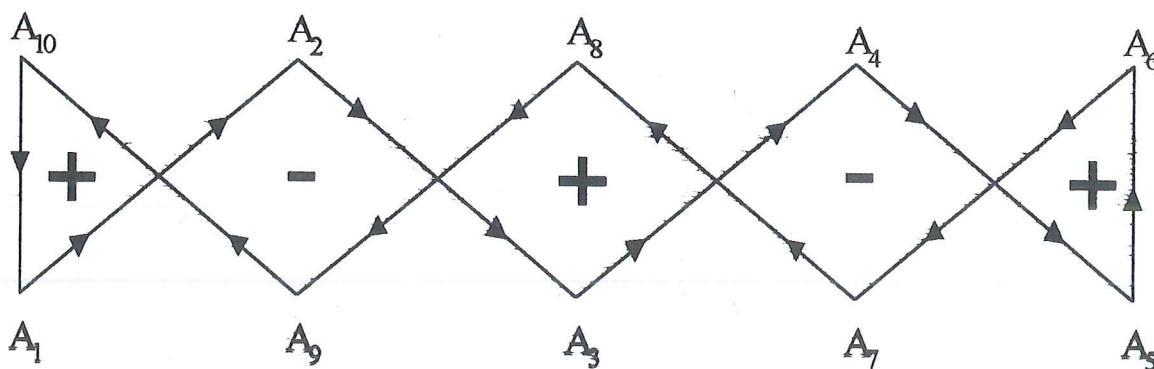
Interpretując geometrycznie wielkość  $\overrightarrow{A_1 \dots A_6} = \overrightarrow{OA_1 A_2} + \overrightarrow{OA_2 A_3} + \dots + \overrightarrow{OA_6 A_1}$  dla sześciokąta dochodzimy do porównywalnego wniosku jak w przypadku czworokąta „kokardka”.

Na podstawie rysunku obserwujemy, że trójkąty  $\overrightarrow{OA_1 A_2}$ ,  $\overrightarrow{OA_2 A_3}$  są zorientowane ujemnie, natomiast pozostałe trójkąty są zorientowane dodatnio. Można zauważyć, że pola niektórych trójkątów będą wyrażone raz liczbą ujemną drugi raz jako liczba dodatnia. W związku z tym widoczna na rysunku część oznakowana kolorem jasnoszarym skasuje się. Pozostanie część wyróżniona kolorem białym (czworokąt  $S_1 A_2 S_2 A_5$ ) oraz dwie części wyróżnione kolorem ciemnoszarym ( $\Delta S_2 A_3 A_4$ , i  $\Delta S_1 A_6 A_1$ ). Łatwo zauważyć, że jeśli zsumujemy wszystkie pozostałe części otrzymamy pole sześciokąta. Pola trójkątów pojmowane w sensie zwykłym  $S_2 A_3 A_4$ ,  $S_1 A_6 A_1$  będą wносиły w pole sześciokąta wkład dodatni, natomiast pole czworokąta  $S_1 A_2 S_2 A_5$  wkład ujemny. Łatwo zauważyć, że jednocześnie obiegi tych figur są zgodne z kierunkiem obiegu sześciokąta, bo  $S_2 A_3 A_4$ ,  $S_1 A_6 A_1$  są zorientowane dodatnio, a czworokąt  $S_1 A_2 S_2 A_5$  zorientowany ujemnie.

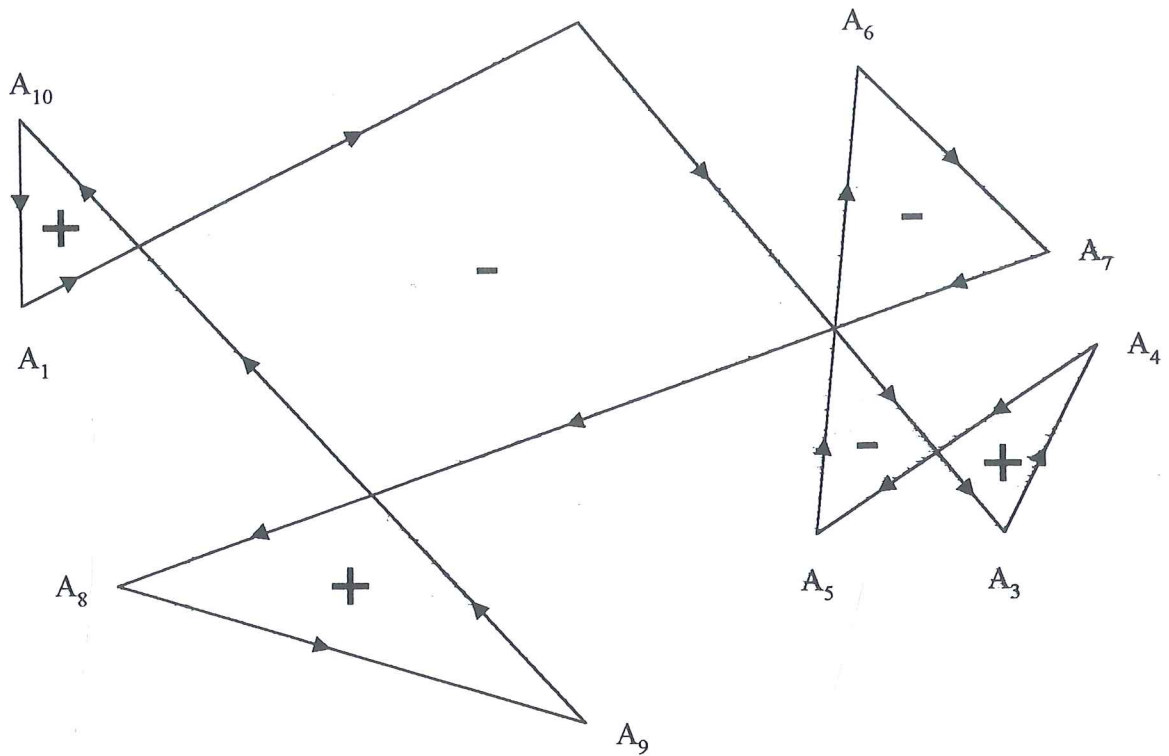
W sposób analogiczny będziemy rozpatrywać pola kolejnych wielokątów gwiaździstych (rys. 34 a, b, c).



Rys. 34 a



Rys. 34 b

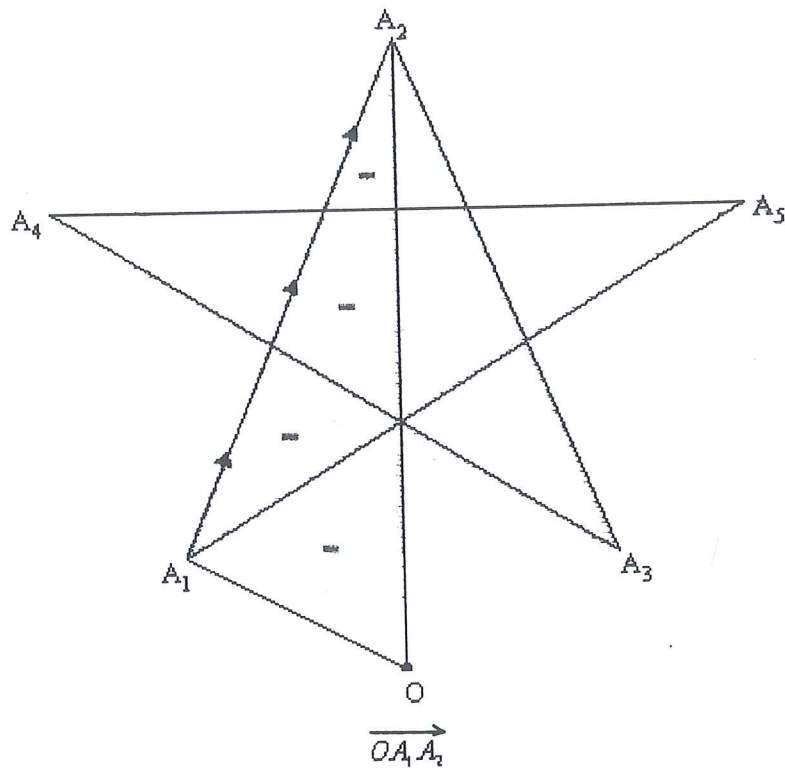


Rys.34 c

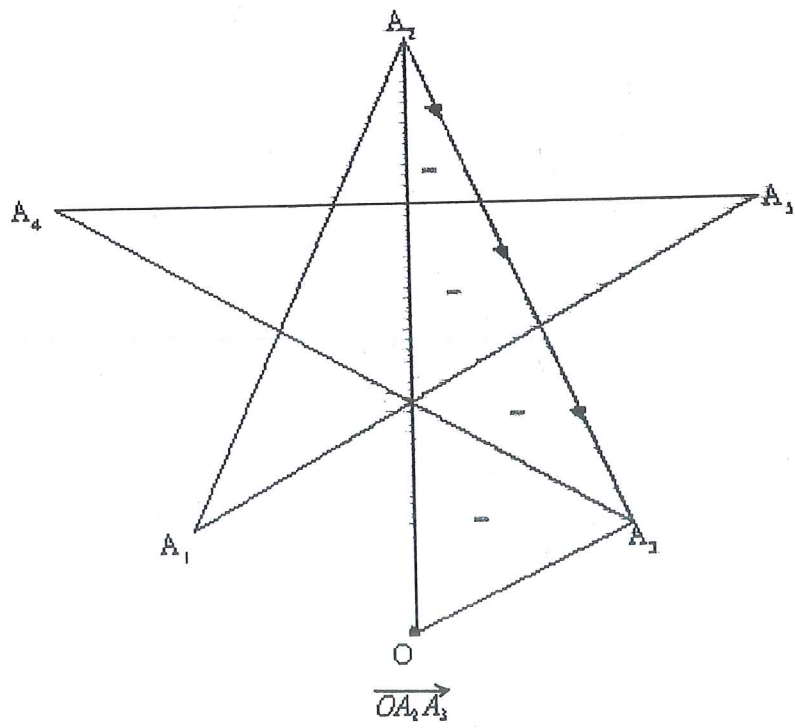
Badając tylko orientację poszczególnych elementów budujących jeden z przedstawionych na rysunku wielokątów, możemy stwierdzić, jaką liczbą będzie wyrażone każde z określonych pól. I tak na przykładzie pięciokąta z rys. 34 a możemy stwierdzić, że obieg wielokąta  $A_1 \dots A_5$  ograniczony tylko do trójkąta  $S_1 A_2 S_2$  jest ujemny, czyli pole tego trójkąta wnosi w zorientowane pole  $\overrightarrow{A_1 \dots A_5}$  wkład ujemny, (co na rysunku zaznaczone jest znakiem -). Obieg pięciokąta ograniczony do dwóch trójkątów  $S_1 A_5 A_1$ , oraz  $S_2 A_3 A_4$  jest dodatni, a zatem pola tych trójkątów wnoszą w  $\overrightarrow{A_1 \dots A_5}$  wkład dodatni ( na rysunku oznaczone symbolem +). Przeprowadzenie szczegółowej analizy dotyczącej zorientowanych pól pozostałych wielokątów gwiaździstych pozostawiam czytelnikowi (34 b, c).

Przyglądnijmy się teraz innemu wielokątowi gwiaździstemu, który jest łamaną zamkniętą utworzoną z wszystkich przekątnych pięciokąta foremnego (rys.35).

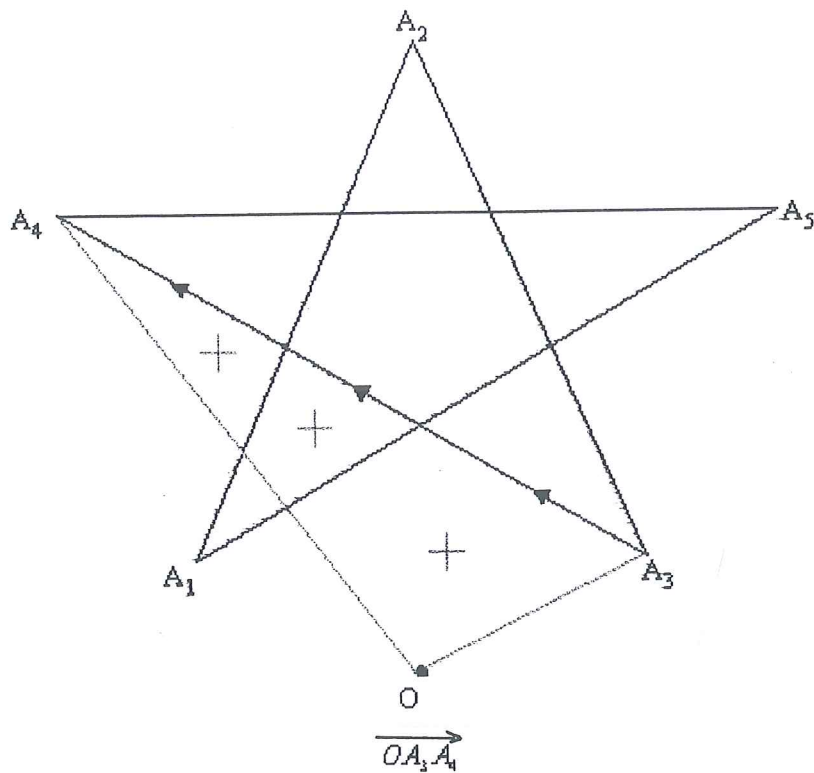
Rys.36.I



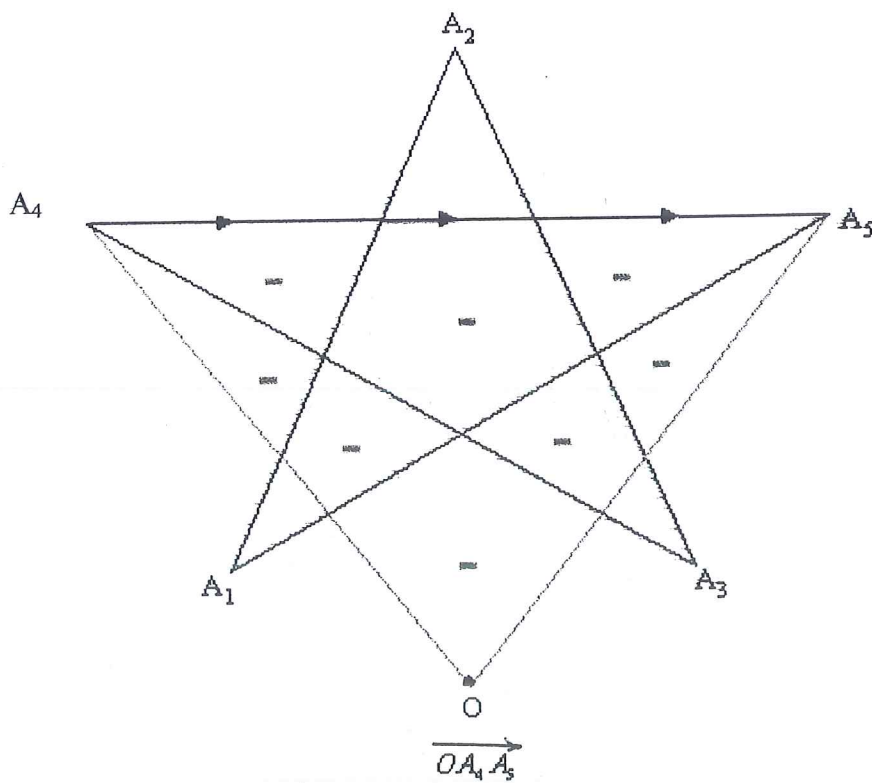
Rys. 36.II



Rys. 36.III

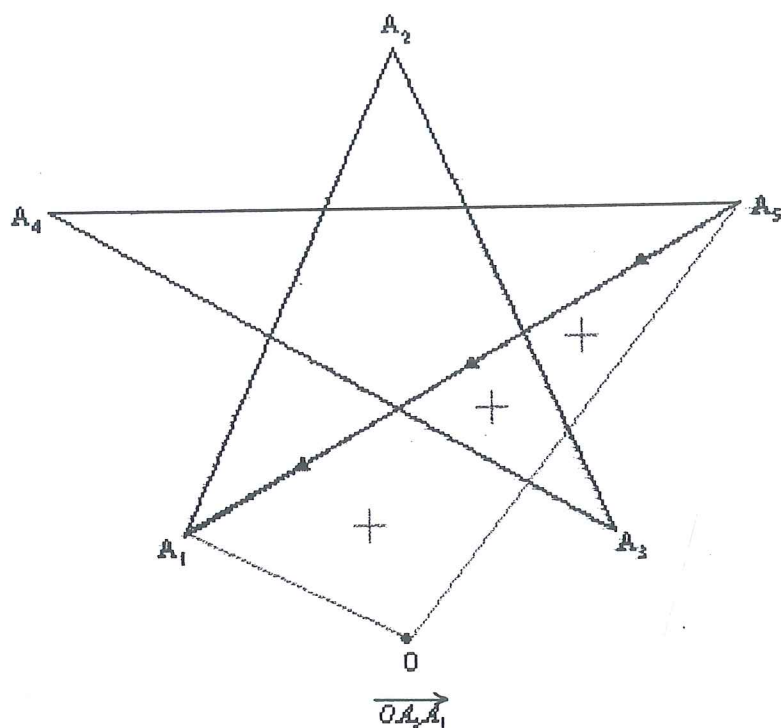


Rys. 36.IV

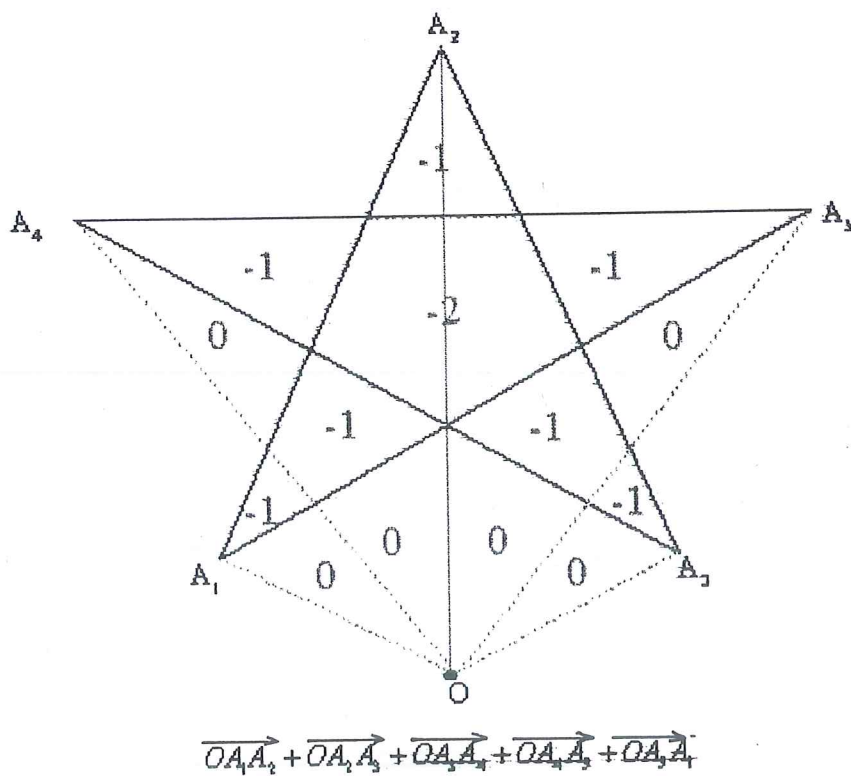




Rys. 36.V



Rys. 36.VI

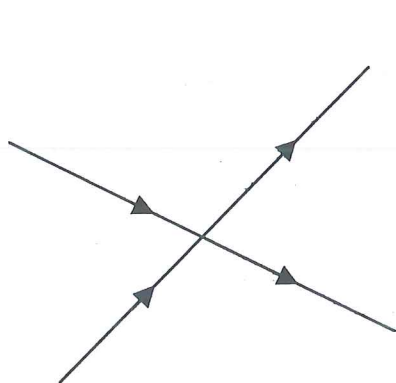


Na kolejnych rysunkach 36.I, 36.II, 36.III, 36.IV, 36.V interpretowane są kolejne składniki omawianej sumy. Znaki plus, bądź minus symbolizują orientację poszczególnych trójkątów, czyli jednocześnie mówią, jaką liczbą będzie wyrażone zorientowane pole. Również tak jak w przypadku trójkąta  $\overline{OA_1A_2}$  dla jasności rysunku, minus został zapisany w każdym mniejszym elemencie tego trójkąta.

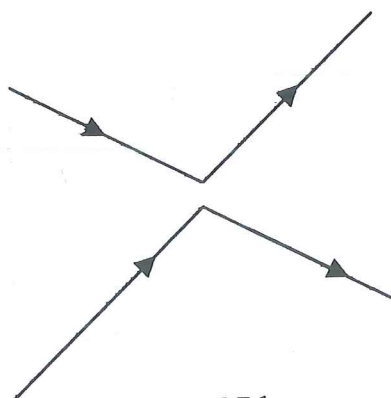
Rysunek 36.VI jest rysunkiem, na którym zebrane są wszystkie informacje. Liczby, które pojawiły się na tym rysunku są zsumowanymi wkładami wyrażającymi wartość pola poszczególnych elementów wchodzących w skład trójkątów kolejno analizowanych na rysunkach 36.I, 36.II, 36.III, 36.IV, 36.V.

Wynik interpretacji geometrycznej jest następujący: pola trójkątów oraz pole pięciokąta zawartego między nimi wnoszą w zorientowane pole pięciokąta gwiazdzistego wkład ujemny, a dodatkowo pole małego pięciokąta wnosi wkład podwójnie ujemny.

Dość trudną rzeczą byłoby przeprowadzanie analizy wielkości  $\overline{A_1 \dots A_n}$  jako  $\sum_{i=1}^n \overline{OA_i A_{i+1}}$  dla dowolnych wielokątów gwiazdzistych. Ułatwieniem w przypadku interpretacji geometrycznych dla bardziej skomplikowanych wielokątów będzie dokonywanie rozdziału na wielokąty zorientowane bez samoprzecięć. Sposób rozdziału omówię na przykładzie pięciokąta gwiazdzistego (rys.38).

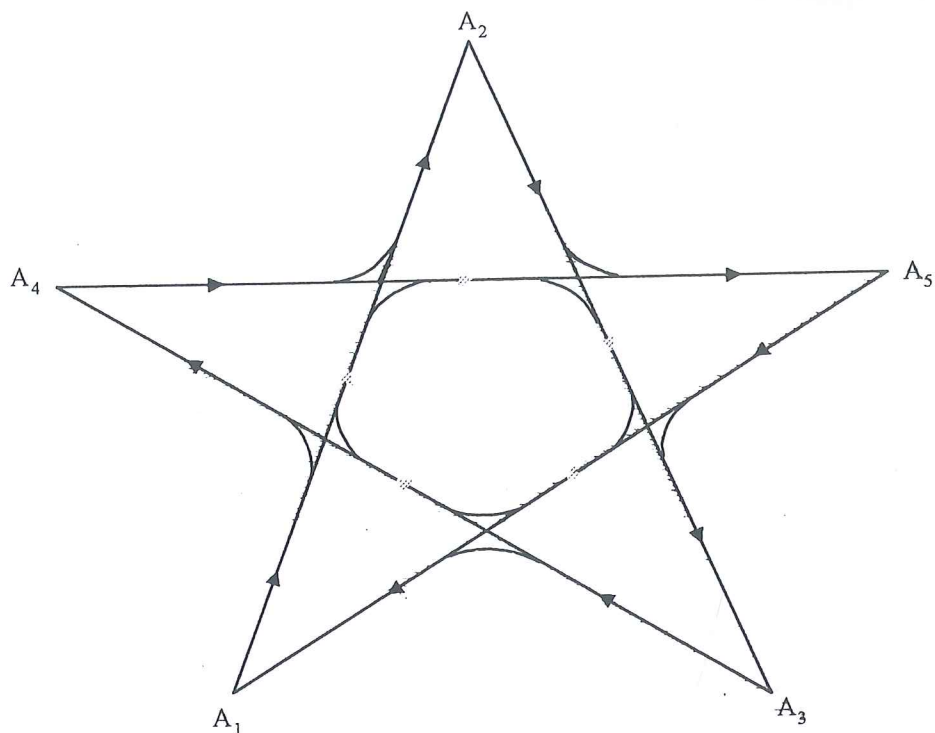


Rys. 37 a



Rys. 37 b

Rys. 37



Rys. 38

Rozdziału dokonujemy w punktach samoprzebieć, tam gdzie kierunek orientacji figury zostaje zaburzony. Takie miejsce pokazuje rys 37 a.

Rozcięcia dokonujemy w taki sposób, aby po rozdziale powstały wielokąty zorientowane bez samoprzebieć. Wynik tej operacji pokazuje rysunek 37 b.

W wyniku rozdziału z pięciokąta gwiazdzistego z rysunku 38 powstaną wielokąty bez samoprzebieć, a dokładniej dziesięciokąt w postaci gwiazdy zorientowany ujemnie, oraz pięciokąt położony wewnątrz tego wielokąta gwiazdzistego, również zorientowany ujemnie. Podobnie można dokonać rozdziału na zorientowane wielokąty bez samoprzebieć dowolnego wielokąta gwiazdzistego.

*W takim razie zorientowane pole  $\overrightarrow{A_1 A_2 \dots A_5}$  możemy równie dobrze przedstawić jako sumę zorientowanych pól tych dwóch wielokątów otrzymanych z podziału.*

Gdybyśmy dokonali podobnej operacji rozdziału dla wielokąta gwiazdzistego z rysunku 32 w efekcie otrzymalibyśmy dwa trójkąty, z czego jeden zorientowany dodatnio, drugi ujemnie.

Również w tym przypadku okazuje się, że zorientowane pole całego wielokąta gwiaździstego jest równe sumie pól dwóch zorientowanych wielokątów bez samoprzecięć, powstałych w wyniku operacji rozdziału.

Na podstawie tych spostrzeżeń można postawić następującą hipotezę.

### OGÓLNA HIPOTEZA

Zorientowane pole dowolnego wielokąta gwiaździstego jest równe sumie zorientowanych pól wielokątów bez samoprzecięć, które otrzymujemy w wyniku operacji rozdziału wielokąta gwiaździstego na wielokąty zorientowane bez samoprzecięć.

### UZASADNIENIE

Rozważmy dowolny zorientowany wielokąt gwiaździsty  $A_1 \dots A_n$ . Zorientowane pole tego wielokąta w myśl definicji możemy zapisać jako  $\sum \overrightarrow{OA_i A_{i+1}}$ . Przyglądnijmy się pojedynczym składnikom  $\overrightarrow{OA_i A_{i+1}}$  powyższej sumy.

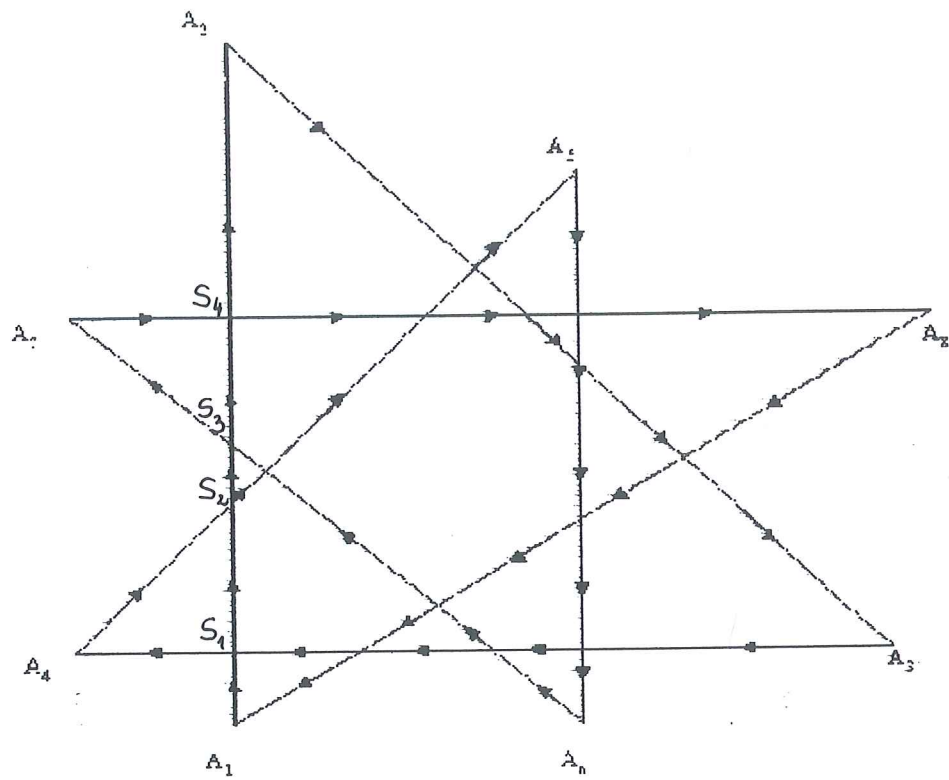
Bok  $A_i A_{i+1}$  trójkąta  $\overrightarrow{OA_i A_{i+1}}$  przecina być może niektóre z pozostałych boków wielokąta gwiaździstego. Punkty przecięcia oznaczamy przez  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . Odwołując się do przykładowego rysunku 39, na boku  $A_1 A_2$  trójkąta  $\overrightarrow{OA_1 A_2}$  mamy punkty przecięcia  $S_1, S_2, S_3, S_4$ .

A zatem  $\overrightarrow{OA_i A_{i+1}}$  możemy zapisać jako sumę:

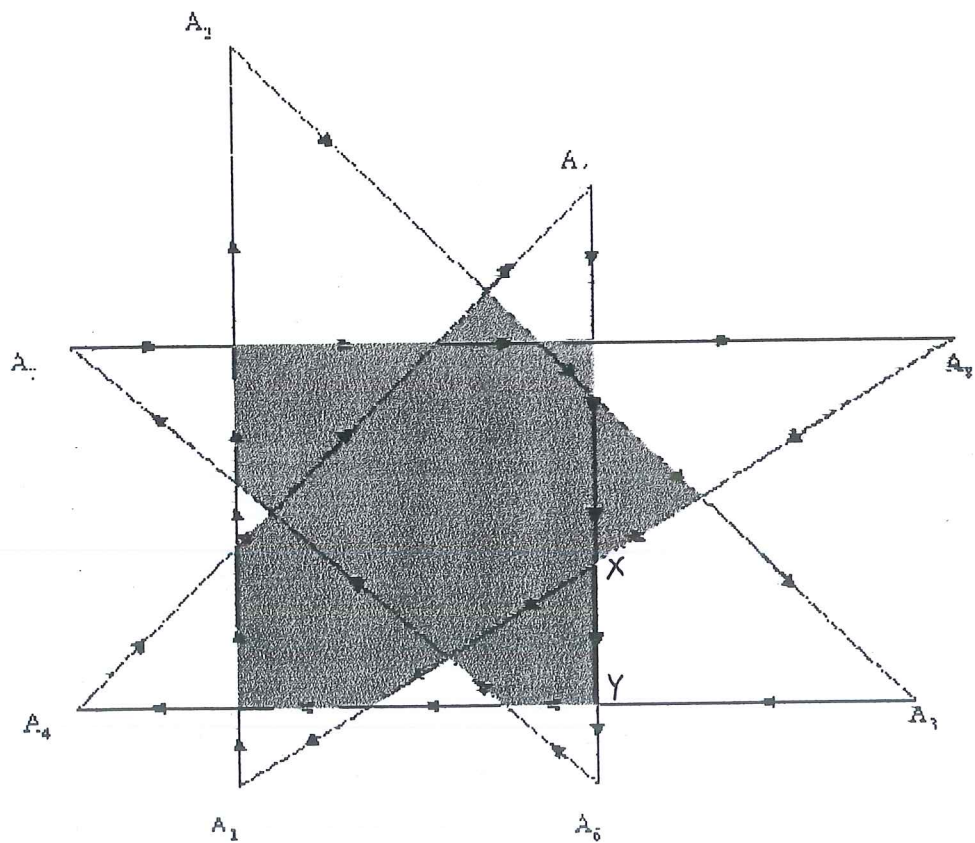
$$\overrightarrow{OA_i A_{i+1}} = \overrightarrow{OA_i S_1} + \overrightarrow{OS_1 S_2} + \dots + \overrightarrow{OS_n A_{i+1}} \quad (*).$$

Dla wskazanego trójkąta z rysunku 39 mamy  $\overrightarrow{OA_1 A_2} = \overrightarrow{OA_1 S_1} + \overrightarrow{OS_1 S_2} + \dots + \overrightarrow{OS_4 A_2}$ .

Jeśli każdy składnik  $\overrightarrow{OA_i A_{i+1}}$  rozbijemy na sumę postaci (\*), dostaniemy sumę złożoną z dużej ilości składników postaci  $\overrightarrow{OXY}$ . Każdy  $XY$  jest bokiem jednego z wielokątów bez samoprzecięć, uzyskanych przez opisaną wcześniej operację rozdziału naszego wielokąta gwiaździstego. Przykładowy odcinkiem  $XY$  jest pokazany na rysunku 40. (jest on bokiem wielokąta wyróżnionego kolorem).



Rys. 39



Rys. 40

Składniki postaci  $\overline{OXY}$  możemy pogrupować w innej kolejności w zależności od tego, czy odcinki XY są kolejnymi bokami wielokąta, ale takiego, który powstał w wyniku operacji rozdziału. Według tej zasady grupujemy składniki  $\overline{OXY}$  do momentu wyczerpania wszystkich składników.

Przyglądnijmy się jednej takiej grupie składników. Dokonując zmiany oznaczeń w celu ujednolicenia zapisu, oznaczamy kolejne składniki jako  $\overline{OQ_1Q_2}$ ,  $\overline{OQ_2Q_3}$ , .... Jeśli zsumujemy zgrupowane składniki to w myśl definicji możemy zapisać

$$\sum \overline{OQ_iQ_{i+1}} = \overline{OQ_1 \dots Q_n},$$

Ta wielkość przedstawia zorientowane pole wielokąta podziału  $Q_1 \dots Q_n$ . Dokonując analogicznej obserwacji następnych grup składników dojdziemy do takiego samego wniosku. A zatem kolejne grupy składników utworzą następne wielokąty podziału.

Podsumowując rozważania dochodzimy do wniosku, że zorientowane pole analizowanego wielokąta gwiaździstego można przedstawić, jako sumę zorientowanych pól wielokątów podziału, co potwierdza naszą hipotezę

Należy również zwrócić uwagę, że to rozumowanie rozstrzyga także problem zasygnalizowany na początku tego rozdziału. Uzasadniając postawioną hipotezę uzasadniliśmy fakt, że wielkość wyrażająca zorientowane pole wielokąta gwiaździstego nie zależy od wyboru punktu O.

## Bibliografia

[K] S.Kułczycki, Opowieści z dziejów liczb, według rękopisu pozostawionego przez Autora przygotował do wydania drukiem S. Straszewicz, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa (1976).

[St] S.Straszewicz, Matematyka dla klasy III liceum ogólnokształcącego, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa (1976).

[Sz] L. Szczerba, O mierze Jordana, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa (1977).

[P] A.В.Погорелов, Геометрия, „Наука”, Moskwa (1983).