Uniwersytet Wrocławski

Wydział Matematyki i Informatyki

Instytut Matematyczny

Specjalność: matematyka nauczycielska

Magdalena Gapska

Objętość brył, których funkcja pola przekroju jest wielomianem co najwyżej trzeciego stopnia.

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2005

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Głównym celem niniejszej pracy jest pokazanie jednego ze sposobów obliczania objętości pewnej obszernej klasy brył. Sposób ten nie jest powszechnie znany, wykorzystuje on pola przekroju bryły, której objętości szukamy. Niech P_g, $P_{śr}$, P_d będą polami przekroju bryły płaszczyzną równoległą do podstawy na odpowiednich wysokościach. P_g to „pole górne" – pole przekroju na wysokości H równej wysokości bryły, „pole środkowe" – $P_{śr}$ to pole przekroju na wysokości $\frac{1}{2}H$, a P_d – „pole dolne" to pole przekroju na wysokości równej 0. W wielu przypadkach P_g i P_d będą po prostu polami podstawy górnej i dolnej, ale pojęcia te mają szerszy sens – mogą być stosowane w przypadkach brył nie mających ścian będących podstawami, jak sfera czy ostrosłup.

W niektórych sytuacjach, dla pewnych brył i określonych wcześniej przekrojów, wielkość $\frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$ może wyznaczać ich objętość. Znaczącym faktem, przy zastosowaniu tego wyrażenia jest to, że bryła musi spełniać określone warunki, między innymi wielkość $\frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$ wyznacza objętość wtedy, gdy pole przekroju rozpatrywanej bryły jest funkcją będącą wielomianem co najwyżej trzeciego stopnia. Dlatego aby nie wprowadzać w błąd czytelnika przez wszystkie strony pracy wyrażenie równe $\frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$ będzie określane symbolem Q.

Przy wyżej wymienianych warunkach koniecznych na to, aby wielkość Q w sposób prawdziwy wyznaczała objętość, użyłam pojęcia „funkcji pola przekroju". Z jej zdefiniowaniem i przykładami spotkamy się w rozdziale III. A we wcześniejszych częściach pracy czytelnik znajdzie przykłady podstawowych brył, dla których wyrażenie $Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$ prawidłowo wyznacza ich objętości.

Jednak istotą tej pracy jest dowód, który pokazuje, że wyliczając wielkości $Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$, dla określonej klasy brył, wyliczmy ich objętości (rozdział IV i V). Celem jest uzasadnienie wzoru metodami elementarnymi, bez odwoływania się do rachunku całkowego. Brak zaangażowania do pokazanego dowodu „narzędzi" analizy sprawia, że dowód ten staje się dostępny nawet dla uczniów gimnazjum. Z kolei wykorzystanie w dowodzie elementarnych uzasadnień z geometrii, między innymi przypomnienie i zastosowanie zasady Cavallieriego, może być przykładem takiego rodzaju dowodu, jakim mogliby się posłużyć matematycy w XVI wieku, przed odkryciem rachunku różniczkowego i całkowego.

W dodatku zamieszczonym na końcu pracy, dla porównania wcześniejszego elementarnego dowodu, znajdziemy obliczenia całkowe, które także wykażą, że dla określonej klasy brył, wielkość $Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$ wyznacza objętość.

ROZDZIAŁ I

Obliczanie objętości brył przy użyciu wzoru $Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$.

Jednym ze sposobów obliczania objętości brył – sposobu nie tak powszechnie znanego, jest zastosowanie wzoru $Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$. Wzór ten wykorzystuje pola przekroju bryły, której objętości szukamy. Naszą bryłę umieszczamy pomiędzy dwiema poziomymi, równoległymi do siebie płaszczyznami Π_1 i Π_2 położonymi w odległości H od siebie. Ponadto obie płaszczyzny mają przynajmniej jeden punkt wspólny z rozpatrywana bryłą. H jest to także jednocześnie wysokość bryły. P_g, $P_{śr}$, P_d to pola przekroju bryły płaszczyzną równoległą do podstawy na odpowiednich wysokościach. P_g to „pole górne" – pole przekroju na wysokości $h = H$, $P_{śr}$ – „pole środkowe" to pole przekroju na wysokości $h = \frac{1}{2}H$, a P_d – „pole dolne" to pole przekroju na wysokości $h = 0$.

Zastrzec jednak należy, że ów wzór nie jest uniwersalnie prawdziwy, jest prawdziwy tylko dla niektórych brył, których cechy charakterystyczne poznamy w dalszych częściach pracy.

Spróbujmy przyjrzeć się wybranym, dobrze znanym nam bryłom. Sprawdźmy czy w ich przypadku zastosowanie wzoru wyliczającego wielkość Q daje wynik będący objętością rozpatrywanych brył.

Badając poszczególne bryły będziemy kolejno szukać odpowiednich przekrojów P_g, $P_{śr}$, P_d, następnie wyznaczymy wartość Q i porównamy ją z objętością rozpatrywanej bryły.

a) *Walec o promieniu r i wysokości H.*

Dla rozpatrywanego walca pola P_g, $P_{śr}$ i P_d są sobie równe i wynoszą πr^2.

Obliczmy Q:

$$Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right) = \frac{1}{6}H\left(\pi r^2 + 4\pi r^2 + \pi r^2\right) = \frac{1}{6}H \cdot 6\pi r^2 = H \cdot \pi r^2 .$$

Wyznaczona wielkość Q jest równa znanej powszechnie objętości walca.

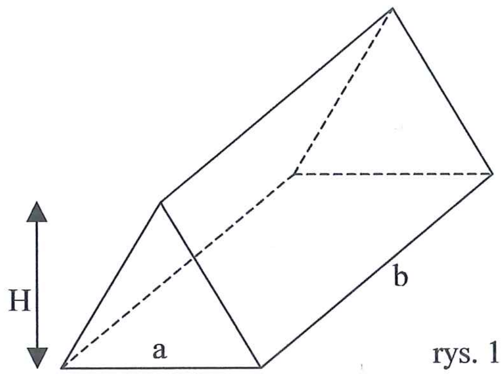
b) Kula o promieniu r.

W przypadku kuli $P_g = P_d = 0$ a $P_{śr} = \pi r^2$. $Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$, gdzie

$H = 2r$, tak więc $Q = \frac{1}{6} \cdot 2r\left(0 + 4 \cdot \pi r^2 + 0\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Obliczona wielkość Q jest rzeczywiście równa objętości kuli.

c) Graniastosłup prosty trójkątny.



rys. 1

Jeden z prostokątów będący ścianą boczną graniastosłupa ma długości boków równe *a, b*. Wysokość ściany będącej trójkątem wynosi *H* (rys. 1).

Dla naszego graniastosłupa pola P_g, $P_{śr}$, P_d wynoszą odpowiednio: $P_g = 0$,

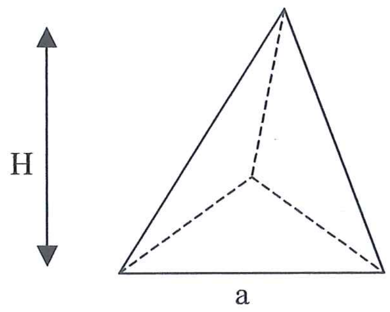
$P_{śr} = \frac{1}{2}ab$ i $P_d = ab$.

Obliczmy wielkość Q.

$$Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right) = \frac{1}{6}H\left(0 + 4 \cdot \frac{1}{2}ab + ab\right) = \frac{1}{6}H \cdot 3ab = \frac{1}{2}abH .$$

Rozważany graniastosłup miał podstawę będącą trójkątem o wysokości H i podstawie a, a ściany będące prostokątami miały wysokość b, więc obliczona wielkość Q jest równa objętości tego graniastosłupa.

d) Czworościan o wysokości H i podstawie będącej dowolnym trójkątem o podstawie a i wysokości h.



rys. 2

Pola przekrojów na odpowiednich wysokościach wynoszą: $P_g = 0$, $P_{śr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{8} ah$ (przekrój środkowy jest trójkątem podobnym do podstawy w skali $\frac{1}{2}$) oraz $P_d = \frac{1}{2} ah$.

Mając wyznaczone P_g, $P_{śr}$ oraz P_d obliczamy Q.

$$Q = \frac{1}{6} H \left(P_g + 4P_{śr} + P_d \right) = \frac{1}{6} H \left(0 + 4 \cdot \frac{1}{8} ah + \frac{1}{2} ah \right) = \frac{1}{6} Hah.$$

Sprawdźmy czy obliczona wielkość Q jest taka sama jak objętość liczona w sposób „tradycyjny", jako iloczyn $\frac{1}{3}$, pola podstawy i wysokości.

Pole podstawy – $P_p = \frac{1}{2} ah$, wtedy $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ah \cdot H = \frac{1}{6} Hah$.

Tym samym pokazaliśmy, że obliczona wcześniej wartość Q jest równa objętości czworościanu.

ROZDZIAŁ II

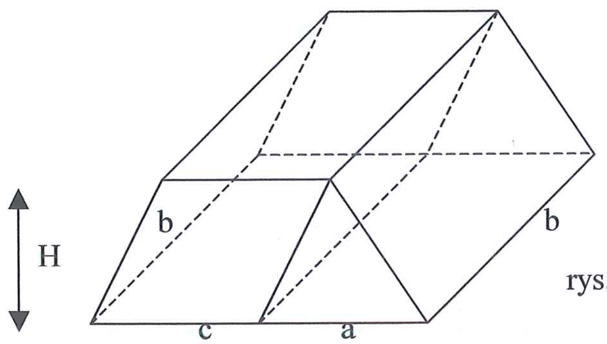
Suma i różnica brył.

Rozważmy teraz bryły będące sumą, bądź różnicą innych brył – brył wyjściowych, dla których wzór $Q=\frac{1}{6}H\left(P_g+4P_{śr}+P_d\right)$ wyznacza nam w sposób prawidłowy ich objętość. Zobaczmy czy wówczas dla takich brył wielkość $Q=\frac{1}{6}H\left(P_g+4P_{śr}+P_d\right)$ dalej poprawnie wyznacza, nam ich objętość.

1. Suma brył

PRZYKŁAD 1.1

Rozważmy bryłę *B* (rys. 3), będącą sumą dwóch brył – równoległościanu o bokach podstawy długości *c* i *b* oraz wysokości *H*, oraz rozważanego wcześniej graniastosłupa prostego trójkątnego (o własnościach jak w rozdziale I – rys. 1).



rys. 3

Zacznijmy od wyznaczenia wielkości *Q* dla bryły *B*. Widzimy, że przekroje *B* na odpowiedniej wysokości są zawsze prostokątami, wiemy także, że jeden z boków prostokąta, dla każdego z przekrojów ma długość *b*. I tak $P_g=c\cdot b$, $P_{śr}=\left(\frac{1}{2}a+c\right)\cdot b$

a $P_d = (a+c)\cdot b$, więc

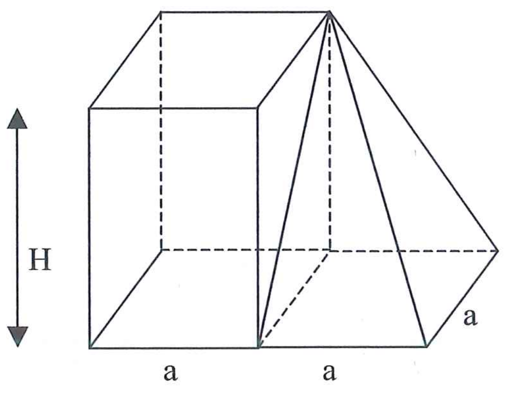
$$Q = \frac{1}{6}H\left(cb + 4\left(\frac{1}{2}ab + cb\right) + ab + cb\right) = \frac{1}{6}H(6cb + 3ab) = Hcb + \frac{1}{2}Hab.$$

Niech Q_1 i Q_2 oznaczają wielkości Q odpowiednich brył składowych – równoległościanu i graniastosłupa. Z obliczeń we wcześniejszym rozdziale znamy wielkości Q_2, która wynosi $\frac{1}{2}abH$. Odpowiednie pola przekroju dla równoległościanu są sobie równe: $P_g = P_{śr} = P_d = cb$, tym samym otrzymujemy wielkość $Q_1 = \frac{1}{6}H(cb + 4cb + cb) = \frac{1}{6}H \cdot 6cb = cbH$.

Widać, więc że $Q = Q_1 + Q_2$. Ponadto Q_1 i Q_2 prawidłowo wyznaczają objętość równoległościanu i graniastosłupa, tym samym $Q = Q_1 + Q_2 = V_1 + V_2 = V$.

PRZYKŁAD 1.2

Rozważmy bryłę będącą sumą dwóch brył (rys. 4): prostopadłościana i ostrosłupa, o tych samych podstawach będących kwadratem o boku *a* i takich samych wysokościach *H*.



rys. 4

Przekrój P dla takiej bryły jest sumą przekroju prostopadłościana P_1 i przekroju ostrosłupa P_2. Tym samym $P_g = P_{1g} + P_{2g}$, $P_{śr} = P_{1śr} + P_{2śr}$, $P_d = P_{1d} + P_{2d}$, gdzie P_{1g}, $P_{1śr}$, P_{1d} to pola przekrojów prostopadłościana, a P_{2g}, $P_{2śr}$, P_{2d} to pola przekrojów ostrosłupa. Tak więc: $P_g = a^2 + 0 = a^2$, $P_{śr} = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$,

$P_d = a^2 + a^2 = 2a^2$. Z wyznaczonymi wartościami P_g, $P_{śr}$, P_d obliczamy wielkość Q:

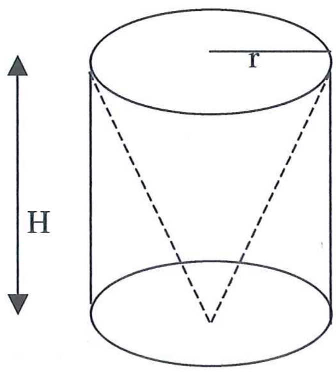
$$Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right) = \frac{1}{6}H\left(a^2 + 4\cdot\frac{5}{4}a^2 + 2a^2\right) = \frac{1}{6}H\cdot 8a^2 = \frac{4}{3}a^2 H.$$

Sprawdźmy: objętość prostopadłościana jest równa a^2H, objętość ostrosłupa wynosi $\frac{1}{3}a^2H$, nasza bryła jest sumą prostopadłościana i ostrosłupa, czyli jej objętość $V = \frac{4}{3}\pi r^2 H$, co zgadza się z naszymi wcześniejszymi obliczeniami wyznaczającymi wielkość Q.

2. Różnica brył

PRZYKŁAD 2.1

Niech naszą rozpatrywaną bryłą będzie walec z wyciętym stożkiem (rys. 5).



rys. 5

Aby obliczyć wielkość Q musimy wcześniej wyznaczyć pola P_g, $P_{śr}$, P_d. Poszczególne pola będą różnicą pola przekroju walca i pola przekroju stożka, i tak:

$P_g = \pi r^2 - \pi r^2 = 0$, $P_{śr} = \pi r^2 - \pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2 = \frac{3}{4}\pi r^2$ oraz $P_d = \pi r^2 - 0 = \pi r^2$.

Wyznaczone wartości pola przekroju pozwalają nam teraz obliczyć wielkość Q:

$$Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right) = \frac{1}{6}H\left(0 + 4\cdot\frac{3}{4}\pi r^2 + \pi r^2\right) = \frac{1}{6}H\cdot 4\pi r^2 = \frac{2}{3}\pi r^2 H.$$

Istotnie objętość walca z wyciętym stożkiem jest równa $\pi r^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 H$, czyli $\frac{2}{3}\pi r^2 H$.

Przedstawione przykłady brył będących sumą, bądź różnicą innych brył pokazują, że jeśli wzór $Q = \frac{1}{6}H(P_g + 4P_{śr} + P_d)$ poprawnie oddawał objętość brył wyjściowych (składowych sumy bądź różnicy), to zastosowanie w takich przypadkach wzoru $Q = \frac{1}{6}H(P_g + 4P_{śr} + P_d)$ prawidłowo wyznacza nam ich objętości.

Spróbujmy teraz uogólnić zauważone własności.

Niech dane będą dwie bryły B_1 i B_2. Niech ich pola przekroju na określonych wysokościach wynoszą odpowiednio dla bryły pierwszej: P_{1g}, $P_{1śr}$, P_{1d}, a dla bryły drugiej: P_{2g}, $P_{2śr}$, P_{2d}.

- Znajdźmy wielkość Q bryły B będącej sumą naszych danych dwóch brył. Dla szukanej bryły określamy odpowiednio przez P_g, $P_{śr}$, P_d pola przekroju na wysokościach: H, $\frac{1}{2}H$, 0. Wówczas $Q = \frac{1}{6}H(P_g + 4P_{śr} + P_d)$.

  Jeśli $B = B_1 \cup B_2$, to odpowiednie przekroje B są sumą odpowiednich przekrojów B_1 i B_2, czyli $P_g = P_{1g} + P_{2g}$, $P_{śr} = P_{1śr} + P_{2śr}$ oraz $P_d = P_{1d} + P_{2d}$. Z tak wyznaczonymi polami przekroju wróćmy do naszego wzoru:

  $$Q = \frac{1}{6}H\left(P_{1g} + P_{2g} + 4\left(P_{1śr} + P_{2śr}\right) + P_{1d} + P_{2d}\right) =$$
  $$= \frac{1}{6}HP_{1g} + \frac{1}{6}HP_{2g} + \frac{1}{6}H \cdot 4P_{1śr} + \frac{1}{6}H \cdot 4P_{2śr} + \frac{1}{6}HP_{1d} + \frac{1}{6}HP_{2d} =$$
  $$= \frac{1}{6}H\left(P_{1g} + 4P_{1śr} + P_{1d}\right) + \frac{1}{6}H\left(P_{2g} + 4P_{2śr} + P_{2d}\right) = Q_1 + Q_2,$$ gdzie Q_1 to wielkość Q dla bryły B_1, a Q_2 to wielkość Q dla bryły B_2.

Tym samym widzimy, że *jeśli wielkość Q poprawnie oddaje objętość dla dwóch brył, to Q jest także objętością bryły będącej ich sumą.*

- Spróbujmy teraz znaleźć wielkość Q bryły B będącej różnicą dwóch brył B_1 i B_2. Nasze rozumowanie będzie podobne jak przy szukaniu objętości sumy brył. Tym razem $B = B_1 \setminus B_2$, a odpowiednie przekroje B są różnicą odpowiednich przekrojów B_1 i B_2, i tak $P_g = P_{1g} - P_{2g}$, $P_{śr} = P_{1śr} - P_{2śr}$ a $P_d = P_{1d} - P_{2d}$.

  Wyznaczone pola przekrojów pozwalają nam wyliczyć wielkość Q:

$$Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right) = \frac{1}{6}H\left(P_{1g} - P_{2g} + 4\left(P_{1śr} - P_{2śr}\right) + P_{1d} - P_{2d}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}HP_{1g} - \frac{1}{6}HP_{2g} + \frac{1}{6}H \cdot 4P_{1śr} - \frac{1}{6}H \cdot 4P_{2śr} + \frac{1}{6}HP_{1d} - \frac{1}{6}HP_{2d} =$$

$$= \frac{1}{6}H\left(P_{1g} + 4P_{1śr} + P_{1d}\right) - \frac{1}{6}H\left(P_{2g} + 4P_{2śr} + P_{2d}\right) = Q_1 - Q_2.$$

Z wyniku przeprowadzonych obliczeń widzimy, że *jeżeli wielkość Q poprawnie oddaje objętość dla dwóch brył, to Q jest także objętością bryły będącej ich różnicą.*

ROZDZIAŁ III

Określenie funkcji pola przekroju.

1. Zdefiniowanie funkcji pola przekroju.

Dana jest bryła B umieszczona pomiędzy dwiema poziomymi, równoległymi do siebie płaszczyznami Π_1 i Π_2, położonymi w odległości H od siebie. H to jednocześnie wysokość bryły, a wspomniane płaszczyzny mają przynajmniej jeden punkt wspólny z rozpatrywaną bryłą. Dana jest także płaszczyzna Π_h równoległa do podstawy bryły B i płaszczyzn Π_1 i Π_2, na wysokości h. Funkcją pola przekroju będziemy nazywać takie przyporządkowanie S: [0 ; H] → **R**, dla którego $S(h)$ to pole figury będącej częścią wspólną Π_h oraz B.

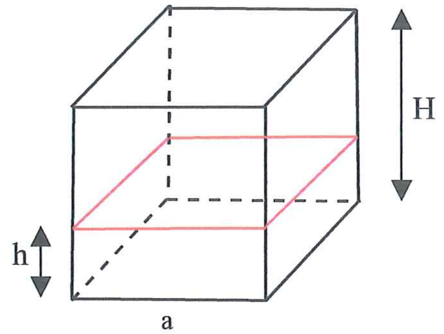
2. Przykłady brył z funkcją pola przekroju stopnia co najwyżej drugiego.

W rozdziałach I i II poznaliśmy przypadki brył, dla których zastosowanie wzoru $Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$ w sposób prawidłowy wyznaczało ich objętości. Zastrzegliśmy wówczas jednak, że ów wzór nie jest uniwersalny, jest prawdziwy tylko dla niektórych brył, mających pewną wspólną cechę charakterystyczną. Specyfika tych brył, dająca możliwość wyliczania ich objętości z użyciem wielkości Q, związana jest właśnie z ich funkcją pola przekroju.

Przyjrzyjmy się teraz dokładniej funkcji pola przekroju wybranych brył zwracając uwagę na ich wielomianową postać.

a) Stała funkcja pola przekroju.

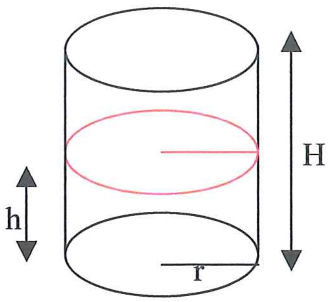
- Rozpatrujemy sześcian o boku a i wysokości H, który przecinamy płaszczyzną Π_h na wysokości h (rys. 6).



rys. 6

Dla naszego sześcianu funkcja pola przekroju $S(h) = a^2$.

- Weźmy walec, którego promień podstawy jest równy r a wysokość jest równa H (rys.7). Podobnie walec przecinamy płaszczyzną Π_h na wysokości h.

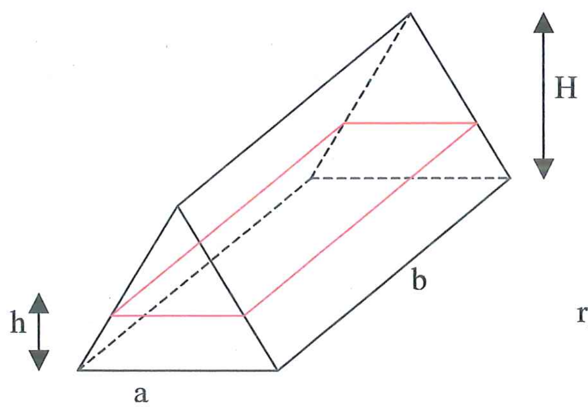


rys. 7

Dla walca otrzymamy również stałą funkcję pola przekroju $S(h) = \pi r^2$.

b) Funkcja pola przekroju stopnia jeden.

- Rozważmy graniastosłup prosty trójkątny. Jeden z prostokątów będący ścianą boczną graniastosłupa ma długości boków równe a i b. Wysokość ściany będącej trójkątem wynosi H (rys. 8). Graniastosłup przecinamy płaszczyzną Π_h na wysokości h.



rys. 8

Figura powstała w wyniku przekroju graniastosłupa płaszczyzną Π_h to prostokąt o bokach a' i b. Tak, więc funkcja pola przekroju będzie równa: $S(h) = a'b$.

Korzystając z tw. Talesa układamy odpowiednią proporcję, która pozwoli nam wyznaczyć a' poprzez dane a, h, H.

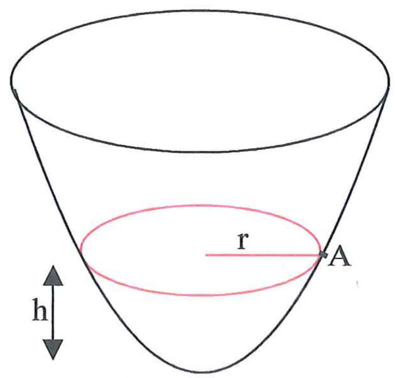
$$\frac{H}{a} = \frac{H-h}{a'} \Rightarrow a' = \frac{a(H-h)}{H}$$

Mając wyznaczone a' obliczamy $S(h)$:

$$S(h) = \frac{a(H-h)}{H}b = \frac{aH}{H}b - \frac{ah}{H}b = ab - \frac{ab}{H}h.$$

I otrzymana funkcja przekroju jest funkcja pierwszego stopnia zmiennej h.

- Rozpatrzmy teraz bryłę powstałą wskutek obrotu paraboli postaci $y = x^2$, wokół osi OY (rys. 9). Paraboloidę przecinamy płaszczyzną Π_h na wysokości h i szukamy pola przekroju figury będącej częścią wspólną płaszczyzny i bryły.



rys. 9

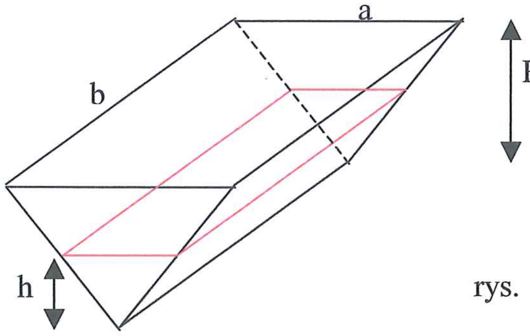
Wynikiem przekroju jest koło o promieniu r. Punkt A leży na paraboli, więc spełnia jej równanie. Ponadto widzimy, że punkt A ma współrzędne (r, h), tym samym nasze r jest równe $\sqrt{h}$.

Dla powstałego przekroju funkcja pola przekroju ma postać:

$S(h) = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{h}\right)^2 = \pi h$, jest więc funkcją liniową względem argumentu h.

Uwaga: dla ułatwienia rachunków mających miejsce w następnym rozdziale, odwrócimy niektóre z naszych brył „do góry nogami", w celu uzyskania funkcji pola przekroju w postaci czysto wielomianowej danego stopnia, to znaczy dla funkcji pola przekroju stopnia jeden interesuje nas postać zwierająca tylko i wyłącznie czynnik liniowy.

b') Obracamy rozważany wcześniej prostopadłościan (rys. 10)

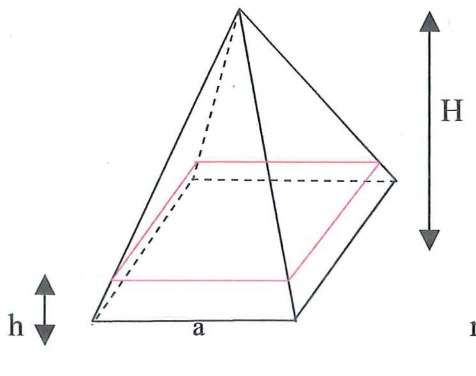


rys. 10

Wówczas z tw. Talesa $\dfrac{H}{a} = \dfrac{h}{a'} \Rightarrow a' = \dfrac{ah}{H}$ i tym samym nasza funkcja pola przekroju ma postać czysto linową: $S(h) = a'b = \dfrac{ah}{H}b = \dfrac{ab}{H}h$.

c) *Funkcja pola przekroju stopnia dwa.*

- Rozpatrzmy tym razem ostrosłup o wysokości H i podstawie będącej kwadratem o boku długości a (rys. 11). Podobnie jak wcześniej ostrosłup przecinamy płaszczyzną Π_h na wysokości h i szukamy pola powstałej figury.



rys. 11

Powstała figura jest kwadratem o boku a'. Jej funkcja pola przekroju będzie, więc równa $S(h) = (a')^2$.

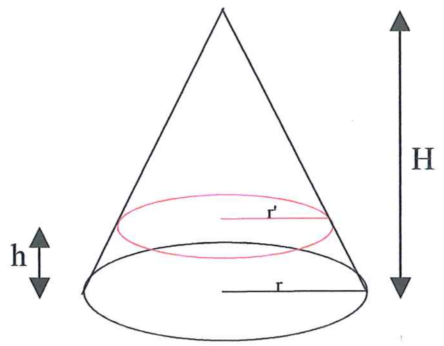
Układając odpowiednią proporcję wyznaczymy a', a następnie z wyznaczonym a' wracamy do obliczenia funkcji pola przekroju ostrosłupa.

$\frac{H}{a} = \frac{H-h}{a'}$, tym samym $a' = \frac{a(H-h)}{H}$, i możemy obliczyć już $S(h)$:

$$S(h) = (a')^2 = \left(\frac{a(H-h)}{H}\right)^2 = \frac{a^2(H^2 - 2Hh + h^2)}{H^2} = h^2\frac{a^2}{H^2} - h\frac{2a^2}{H} + a^2.$$

Otrzymana funkcja pola przekroju jest wielomianem drugiego stopnia względem argumentu h, zaś wyrażenia, w których występują dane a i H są współczynnikami tego wielomianu.

- Weźmy stożek o promieniu podstawy równym r i wysokości równej H (rys. 12), który przecinamy płaszczyzną Π_h na wysokości h.



rys. 12

W tym przypadku obliczenie pola przekroju sprowadza się do obliczenia pola koła o promieniu r', powstałego w wyniku przecięcia płaszczyzny Π_h ze stożkiem, zatem $S(h) = \pi r'^2$.

Możemy zauważyć, że $\frac{H}{r} = \frac{H-h}{r'}$, czyli $r' = \frac{r(H-h)}{H}$.

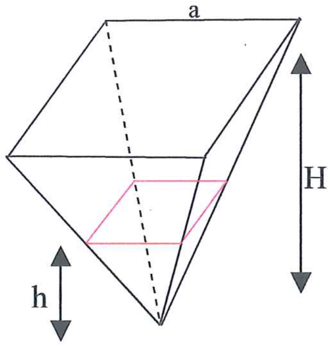
Tym samym:

$$S(h) = \pi\frac{r^2(H-h)^2}{H^2} = \frac{\pi r^2}{H^2}(H^2 - 2Hh + h^2) = h^2\frac{\pi r^2}{H^2} - h\frac{2\pi r^2}{H} + \pi r^2,$$

a otrzymana funkcja jest funkcją drugiego stopnia.

c') Chcąc uzyskać czysto kwadratową funkcję pola przekroju obracamy rozważane wcześniej bryły .

- Odwrócony ostrosłup (rys. 13)

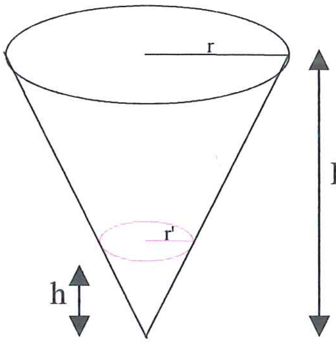


rys. 13

Ogólny wzór przekroju nie ulega zmianie – $S(h) = (a')^2$, ale zmienia się wartość a', mianowicie teraz $\dfrac{H}{a} = \dfrac{h}{a'}$, tym samym $a' = \dfrac{ah}{H}$. Mając wyznaczone a' obliczamy już *S*(*h*): $S(h) = (a')^2 = \left(\dfrac{ah}{H}\right)^2 = h^2\dfrac{a^2}{H^2}$.

Otrzymana funkcja pola przekroju ma tylko czynnik drugiego stopnia różny od zera.

- Odwrócony stożek (rys. 14)



rys. 14

W tym przypadku zmianie ulega proporcja wyznaczająca nam r': $\dfrac{H}{r} = \dfrac{h}{r'}$, czyli $r' = \dfrac{rh}{H}$. Tym samym $S(h) = \pi r'^2 = \pi\dfrac{r^2h^2}{H^2} = h^2\dfrac{\pi r^2}{H^2}$.

ROZDZIAŁ IV

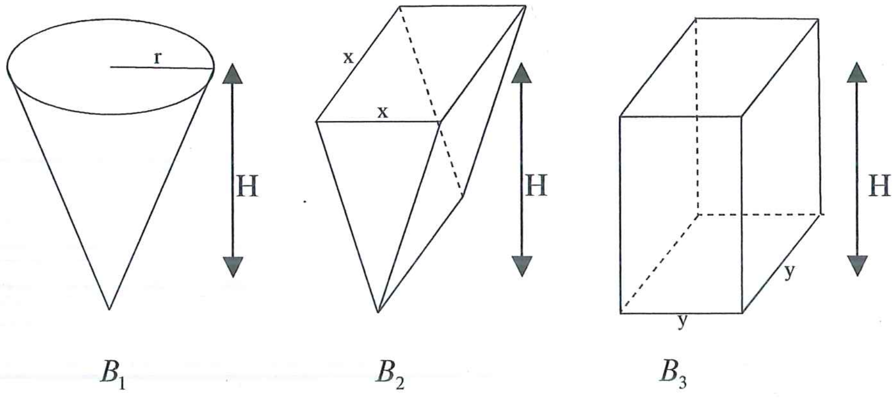
Dowód poprawności wzoru $Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$ jako wzoru na objętość, dla brył z funkcją pola przekroju drugiego stopnia.

Weźmy dowolną bryłę B o wysokości H i danej funkcji pola przekroju drugiego stopnia takiej, że $S_B(h) = a_2h^2 + a_1h + a_0$. Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy współczynniki a_0, a_1, a_2 są dodatnie.

Chcemy sprawdzić, czy dla brył z tak określoną funkcją pola przekroju wielkość Q w prawidłowy sposób wyznacza nam objętość.

Zacznijmy od utworzenia pewnej nowej bryły B'. Chcemy, aby nasza nowa bryła miała identyczną funkcję pola przekroju jak dana bryła B. Ponadto niech B' będzie sumą trzech innych brył, odpowiednio z funkcjami pola przekroju, które są wielomianami czysto stopnia 2, 1 i 0. Naszymi składowymi bryłami będą bryły (rys. 15):

- B_1 – stożek o odpowiednim promieniu podstawy r i wysokości H,
- B_2 – graniastosłup prosty trójkątny o wysokości H oraz odpowiednio dobranym x (jak na rysunku),
- B_3 – prostopadłościan o wysokości H i podstawie będącej kwadratem o boku odpowiednio dobranej długości y.



rys. 15

Z rozdziału III znamy funkcje pola przekroju brył składowych – przypomnijmy je: $S_{B_1}(h) = \frac{r^2}{H^2}\pi h^2$, $S_{B_2}(h) = \frac{x^2}{H}h$, $S_{B_3}(h) = y^2$.

Założyliśmy, że dla nowej bryły B' ma zachodzić warunek: $S_B(h) = S_{B'}(h)$, czyli $a_2h^2 + a_1h + a_0 = \frac{r^2}{H^2}\pi h^2 + \frac{x^2}{H}h + y^2$. Przyrównując odpowiednie współczynniki przy h otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{r^2}{H^2}\pi \\ a_1 = \frac{x^2}{H} \\ a_0 = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = \frac{a_2H^2}{\pi} \\ x^2 = a_1H \\ y = \sqrt{a_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = H\sqrt{\frac{a_2}{\pi}} \\ x = \sqrt{a_1H} \\ y = \sqrt{a_0} \end{cases}.$$

Wyznaczając parametry r, x, y znaleźliśmy bryłę B'.

Skoro bryły B i B' mają identyczne funkcje pola przekroju, tzn. że przekroje dla $h = 0$, $h = \frac{1}{2}H$, $h = H$ mają jednakowe pola, a co za tym idzie wielkości Q dla każdej z brył są sobie równe $Q_B = Q_{B'}$.

W rozdziale I sprawdziliśmy, że dla składowych brył B_1, B_2, B_3 wielkość Q prawidłowo wyznacza nam objętość.

Z kolei w rozdziale II sprawdziliśmy, że jeśli wzór $Q = \frac{1}{6}H(P_g + 4P_{śr} + P_d)$ wyznacza objętość dla brył będących składowymi sumy, to także wyznacza objętość dla sumy.

Spróbujmy teraz uporządkować i wypunktować opisane wyżej fakty.

1) B – dana bryła z funkcją pola przekroju stopnia 2, $B' = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, $S_B(h) = S_{B'}(h)$.

2) $Q_B = Q_{B'}$.

3) $Q_{B'} = Q_{B_1} + Q_{B_2} + Q_{B_3}$.

4) $Q_{B_1} = V_{B_1}$, $Q_{B_2} = V_{B_2}$, $Q_{B_3} = V_{B_3}$.

Naszym celem jest pokazanie, że dla danej bryły B wielkość Q wyznacza jej objętość, tzn. $Q_B = V_B$. Dążąc do niego spróbujmy teraz wykorzystać wypunktowane własności:

(*) $Q_B = Q_{B'} = Q_{B_1} + Q_{B_2} + Q_{B_3} = V_{B_1} + V_{B_2} + V_{B_3}$,

z oczywistych własności objętości otrzymujemy:

(**) $V_{B_1} + V_{B_2} + V_{B_3} = V_{B'}$.

Ostatnim naszym krokiem jest pokazanie, że $V_{B'} = V_B$. Przypomnijmy sobie w tym celu zasadę Cavalieriego.

Co mówi zasada Cavalieriego? *

Wyobraźmy sobie talię kart, która w zwykłym położeniu tworzy prostopadłościan (rys. 16), którego objętość liczymy w znany sposób – mnożąc pole podstawy przez wysokość. Przesuńmy karty talii tak, że tworzą teraz mało regularny stos (rys. 16). Według zasady Cavaleriego objętość tych dwóch stosów talii kart jest taka sama.

rys. 16

<u>Zasada Cavalieriego:</u>

Jeżeli mamy dwie bryły leżące między dwiema równoległymi płaszczyznami, jeżeli ponadto przekroje tych brył dowolną płaszczyzną równoległą do wspomnianych mają takie same pola, to bryły ta mają takie same objętości.

* JERZY MIODUSZEWSKI, *Ciągłość: szkice z historii matematyki,* WSiP, Warszawa 1996

Zasada Cavalieriego nie określa objętości liczbowo, lecz jedynie porównuje dwie bryły co do objętości. Od bryły, której objętość uważamy za znaną, poprzez porównanie przechodzimy do bryły, której objętości szukamy.

Wróćmy teraz do naszych rozważanych brył B i B'.

Bryły B i B' umieszczamy między płaszczyznami p i q, które są do siebie równoległe, ponadto spełniony jest warunek: odległość między p i q jest równa wysokości H brył B i B'.

Przecinamy bryły płaszczyzną równoległa do p i odległą od niej o h. Interesują nas powstałe przekroje tych brył, a w szczególności ich pola. Okazuje się, że pola tych przekrojów wyznaczają nam znane już dla poszczególnych brył, funkcje pola przekroju. Co więcej, wiemy że funkcje pola przekroju dla B i B' są sobie równe, tym samym pola przekrojów brył B i B', dowolną płaszczyzną równoległą do płaszczyzny p, są sobie równe. Co za tym idzie, w myśl zasady Cavalieriego objętości brył B i B' są także sobie równe.

Wróćmy po raz ostatni do postawionego na początku pytania i celu: czy $Q_B = V_B$? Z równości (*) i (**) otrzymujemy:

$Q_B = Q_{B'} = Q_{B_1} + Q_{B_2} + Q_{B_3} = V_{B_1} + V_{B_2} + V_{B_3} = V_{B'}$, a z zasady Cavalieriego $V_B = V_{B'}$,

czyli $Q_B = V_B$ ■

Rozważana przez nas wcześniej bryła B miała kwadratową funkcją pola przekroju, w której wszystkie współczynniki są dodatnie. Zajmijmy się tym razem taką bryłą B, której funkcja pola przekroju jest dalej wielomianem drugiego stopnia, ale jeden ze współczynników jest ujemy, np. niech $S_B(h) = a_2h^2 + a_1h + a_0$, dla dodatnich współczynników a_2, a_1 i ujemnego współczynnika a_0.

Nasz cel pozostaje bez zmian, tzn. chcemy sprawdzić czy Q prawidłowo wyznacza objętość rozpatrywanej bryły.

Tym razem budujemy dwie bryły pomocnicze: B_1' i B_2', których składowymi są rozważane wcześniej bryły B_1, B_2, B_3 (rys. 15). B_1' jest sumą naszej wyjściowej bryły B oraz bryły B_3 o stałej funkcji pola przekroju równej tym razem $-a_0$, a B_2' jest sumą brył B_1 i B_2 o funkcjach pola przekroju wynoszących odpowiednio a_1h i a_2h^2. Zakładamy dodatkowo, że bryły B_1' i B_2' mają równe sobie funkcje pola przekroju, mianowicie $S_{B_1'}(h) = S_{B_2'}(h)$, czyli $a_2h^2 + a_1h + a_0 + y^2 = \frac{r^2}{H^2}\pi h^2 + \frac{x^2}{H}h$.

Przyrównując odpowiednie współczynniki przy h i pamiętając oczywiście, że a_0 jest ujemny, wyznaczamy parametry r, x, y dla brył B_1, B_2 i B_3, znajdując tym samym bryły B_1' i B_2':

$$\begin{cases} r = H\sqrt{\dfrac{a_2}{\pi}} \\ x = \sqrt{a_1 H} \\ y = \sqrt{-a_0} \end{cases}.$$

Spróbujmy teraz zauważyć pewne własności brył B_1' i B_2'.

1) $B_1' = B \cup B_3$ oraz $B_2' = B_1 \cup B_2$.
2) Skoro $S_{B_1'}(h) = S_{B_2'}(h)$, to w szczególności przekroje dla h równego 0, $\frac{1}{2}H$ i H są sobie równe, tym samym $Q_{B_1'} = Q_{B_2'}$.
3) Pola przekrojów brył B_1' i B_2' na wszystkich poziomach h są sobie równe, a więc w myśl zasady Cavalieriego $V_{B_1'} = V_{B_2'}$.
4) Z rozdziału I wiemy, że dla brył składowych: B_1, B_2 i B_3 wielkość Q prawidłowo wyznacza ich objętość: $Q_{B_1} = V_{B_1}$, $Q_{B_2} = V_{B_2}$, $Q_{B_3} = V_{B_3}$.
5) Z addytywności wyrażenia Q (rozdział II) mamy $Q_{B_2'} = Q_{B_1} + Q_{B_2}$.
6) Z wymienionych wyżej własności (3) i (4) wnioskujemy, że $Q_{B_2'} = Q_{B_1} + Q_{B_2} = V_{B_1} + V_{B_2} = V_{B_2'}$.
7) Z (2), (6) i (3) otrzymujemy: $Q_{B_1'} = Q_{B_2'} = V_{B_2'} = V_{B_1'}$.

Poprzez zauważone wyżej fakty spróbujmy dojść do interesujących nas wielkości Q_B i V_B oraz do zależności zachodzących między nimi.

Z rozdziału II wiemy, że skoro wielkość Q jest równa objętości dla brył B_1' i B_3, to także wyznacza objętość dla ich różnicy. Różnica brył B_1' i B_3 to B, czyli $Q_B = Q_{B_1'} - Q_{B_3} = V_{B_1'} - V_{B_3} = V_B$ ■

Tym samym pokazaliśmy, że dla dowolnej bryły B z kwadratową funkcja pola przekroju, w której wyraz wolny jest ujemy, zaś pozostałe współczynniki są dodatnie, wielkość Q prawidłowo wyznacza objętość.

W pozostałych przypadkach kombinacji znaków współczynników mniejszych od zera, dla brył z kwadratową funkcja pola przekroju, rozumowanie prowadzące do wniosku $Q = V$ jest analogiczne do powyższego. Budujemy dwie bryły pomocnicze ze składowymi: wyjściową bryła, którą rozpatrujemy oraz trzema bryłami, odpowiednio z funkcjami pola przekroju, które są wielomianami czysto stopnia 2, 1 i 0. Następnie zauważamy odpowiednie własności i wyciągamy z nich wnioski prowadzące nas, w sposób analogiczny jak w rozumowaniu powyżej, do faktu, iż $Q = V$.

ROZDZIAŁ V

Funkcja pola przekroju trzeciego stopnia.

1. Przykłady brył z funkcją pola przekroju stopnia trzeciego.

W rozdziale III zdefiniowaliśmy funkcję pola przekroju i znaleźliśmy przykłady brył, dla których funkcja ta jest wielomianem stopnia niewiększego niż dwa.

Spróbujmy teraz znaleźć takie bryły, dla których argument h występuje w potędze trzeciej w wielomianie określającym pole przekroju rozpatrywanej bryły.

PRZYKŁAD 1.1

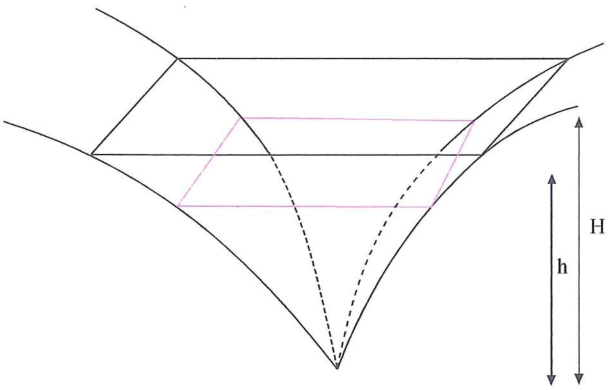
Na płaszczyźnie *OXZ* w przestrzeni weźmy wykres funkcji $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ i obróćmy go wokół pionowej osi *OZ*. Powstałą bryłę przecinamy płaszczyzną Π_h na wysokości h. Szukamy pola przekroju figury będącej częścią wspólną płaszczyzny i bryły.

Powstała w przekroju figura to koło o promieniu r. Wartość promienia obliczymy używając wzoru funkcji, mianowicie $r = x$, dla takiego x, że $f(x) = h$, czyli $h = x^{\frac{2}{3}}$, tym samym $r = x = h^{\frac{3}{2}}$. Pamiętając, że pole przekroju to pole koła, otrzymujemy S(h) $= \pi r^2 = \pi\left(h^{\frac{3}{2}}\right)^2 = \pi h^3$.

Widzimy, że funkcja pola przekroju powyższej bryły jest wielomianem stopnia trzeciego względem argumentu h.

PRZYKŁAD 1.2

W tym przykładzie tworzymy bryłę ograniczoną w następujący sposób: $\{(x, y, z): z \geq \sqrt{|x|}, z \geq |y|, z \leq H\}$, gdzie ostania z nierówności ogranicza naszą bryłę płaszczyzną równoległą do płaszczyzny *OXY* na wysokości równej H. Spróbujmy teraz znaleźć przekrój bryły płaszczyzną równoległą do jej „górnej podstawy" na wysokości h (rys. 17).



rys. 17

Szukając pola przekroju, szukamy pola powstałego prostokąta takiego, że $\{(x, y, z) : z = h, |x| \leq h^2, |y| \leq h\}$. Tym samym widzimy, że prostokąt ma boki o długości $2h$ i $2h^2$. Sprawdźmy teraz, ile przy wyznaczonych długościach boków powstałego przekroju, wynosi jego pole – S(*h*). $S(h) = 2h \cdot 2h^2 = 4h^3$ i jest wielomianem trzeciego stopnia zmiennej *h*.

2. Zmiana parametru wysokości przekroju.

Badając w poprzednim punkcie pola przekrojów, rozpatrywaliśmy bryły umieszczone pomiędzy dwiema poziomymi, równoległymi do siebie płaszczyznami Π_1 i Π_2 położonymi w odległości H od siebie (obie płaszczyzny mają przynajmniej jeden punkt wspólny z rozpatrywana bryłą). Wówczas szukaliśmy przekrojów na wysokości h takiej, że $h \in [0, H]$, gdzie płaszczyzna Π_1 znajdowała się na wysokości równej 0, a płaszczyzna Π_2 na wysokości równej H. Teraz umieśćmy bryłę tak między tymi dwiema płaszczyznami, że Π_- odpowiada wysokości równej $-\frac{H}{2}$, a Π_+ wysokości $\frac{H}{2}$. Wartość wysokości bryły nie ulega zmianie, a dla tak zmienionego parametru h' wysokości przekroju bryły, mamy $h' \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$, tzn. $h' = h - \frac{H}{2}$, czyli $h = h' + \frac{H}{2}$. Spróbujmy zobaczyć, co dzieje się teraz z wielomianem określającym funkcję pola przekroju.

PRZYKŁAD 2.1

Weźmy bryłę z funkcją pola przekroju trzeciego stopnia taką, że S(h) = ah^3 dla $h \in [0, H]$. Teraz zmieniamy parametr wysokości na $h' \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$. Dla nowo wyznaczonej wysokości przekroju sprawdźmy jego pole: i tak $S'(h') = S(h)$ dla $h = h' + \frac{H}{2}$, więc $S'(h') = S(h) = S\left(h' + \frac{H}{2}\right) = a\left(h' + \frac{H}{2}\right)^3 =$

$= ah'^3 + a \cdot 3 \cdot h'^2 \cdot \frac{H}{2} + a \cdot 3 \cdot h' \cdot \frac{H^2}{4} + \frac{H^3}{8} = ah'^3 + \frac{3aH}{2}h'^2 + \frac{3aH^2}{4}h' + \frac{H^3}{8}$, czyli nowa funkcja pola przekroju nie zmienia swojego stopnia i wynosi $S'_B(h') = b_3h'^3 + b_2h'^2 + b_1h' + b_0$, dla odpowiednio dobranych współczynników b_3, b_2, b_1, b_0.

PRZYKŁAD 2.1

Tym razem weźmy bryłę, dla której $S(h) = a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0$ i $h \in [0, H]$. Podobnie jak wcześniej szukamy wielomianu określającego pole przekroju dla $h' \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$.

$$S'(h') = S(h) = S\left(h' + \frac{H}{2}\right) = a_3\left(h' + \frac{H}{2}\right)^3 + a_2\left(h' + \frac{H}{2}\right)^2 + a_1\left(h' + \frac{H}{2}\right) + a_0 =$$

$$= a_3\left(h'^3 + 3h'^2\frac{H}{2} + 3h\frac{H^2}{4} + \frac{H^3}{8}\right) + a_2\left(h'^2 + 2h'\frac{H}{2} + \frac{H^2}{4}\right) + a_1h' + a_1\frac{H}{2} + a_0 =$$

$$= a_3h'^3 + \left(\frac{3a_3H}{2} + a_2\right)h'^2 + \left(\frac{3a_3H^2}{4} + a_2H + a_1\right) + \left(\frac{a_3H^3}{8} + \frac{a_2H^2}{4} + \frac{a_1H}{2} + a_0\right).$$

Dla $h' \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$ i odpowiednio dobranych współczynników b_3, b_2, b_1, b_0

$S'_B(h') = b_3h'^3 + b_2h'^2 + b_1h' + b_0$.

Wnioskiem z rozpatrywanych przykładów jest fakt, iż zmiana parametru wysokości przekroju nie zmienia stopnia wielomianu odpowiedzialnego za funkcję pola przekroju dla brył, których funkcja ta jest wielomianem trzeciego stopnia.

3. Dowód poprawności wzoru $Q = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right)$ jako wzoru wyznaczającego objętość brył z funkcją pola przekroju trzeciego stopnia.

Naszym celem jest pokazanie, że dla brył z funkcją pola przekroju trzeciego stopnia Q jest wielkością wyznaczającą jej objętość.

Rozpatrujemy dowolną bryłę B z funkcją pola przekroju trzeciego stopnia taką, że $S_B(h) = a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0$, oraz $h \in [0, H]$.

Wiemy już, że dla brył z funkcją pola przekroju trzeciego stopnia zmiana parametru wysokości nie zmienia stopnia wielomianu będącego tą że właśnie funkcją. Zmieńmy go w naszej bryle. Niech $h' \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$ a dla tak wyznaczonej wysokości h' funkcja pola przekroju zmienia się na $S'_B(h') = b_3h'^3 + b_2h'^2 + b_1h' + b_0$ (dla odpowiednio wyznaczonych współczynników b_3, b_2, b_1, b_0).

Zacznijmy od przypadku, w którym współczynnik przy b_3 jest dodatni oraz wyrażenie $b_2h'^2 + b_1h' + b_0$ jest większe od zera dla każdego h'. Zanim przejdziemy do dalszych kroków dowodu, upewnijmy się czy dla brył z funkcją pola przekroju drugiego stopnia, rozpatrywanie jej dla $h' \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$ jest dalej badaniem wielomianu drugiego stopnia.

Weźmy bryłę z kwadratową funkcją pola przekroju: $S(h) = a_2h^2 + a_1h + a_0$. Zmieńmy „ustawienie" wysokość tak, że teraz $h' = h - \frac{H}{2}$, czyli $h = h' + \frac{H}{2}$. Wtedy:

$$S'_B(h') = S_B(h) = S_B\left(h' + \frac{H}{2}\right) = a_2\left(h' + \frac{H}{2}\right)^2 + a_1\left(h' + \frac{H}{2}\right) + a_0 =$$

$$= a_2\left(h'^2 + 2h'\frac{H}{2} + \frac{H^2}{4}\right) + a_1 h' + a_1\frac{H}{2} + a_0 = a_2 h'^2 + (a_2 H + a_1)h' + \left(a_2\frac{H^2}{4} + a_1\frac{H}{2} + a_0\right) =$$

$= b_2 h'^2 + b_1 h' + b_0$, dla odpowiednio dobranych współczynników b_2, b_1, b_0. Widzimy, że także w tym przypadku stopień funkcji pola przekroju nie ulega zmianie – funkcja jest dalej wielomianem drugiego stopnia.

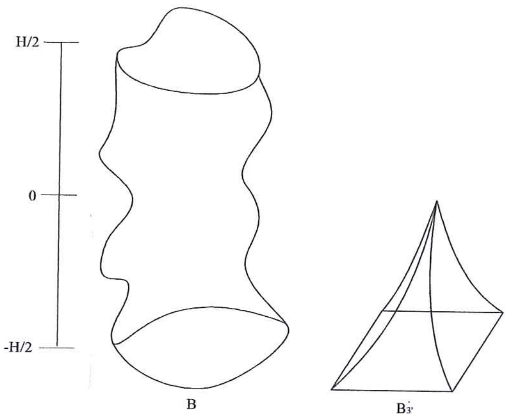
Skoro już wiemy, że zmiana parametru wysokości przekroju nie zmienia stopnia składowej $b_2 h'^2 + b_1 h' + b_0$ w funkcji pola przekroju rozpatrywanej obecnie bryły *B*, to przejdźmy do dalszej części dowodu.

Kolejnym krokiem jest utworzenie nowej bryły, która będzie miała taką samą funkcję pola przekroju, jak bryła *B*. Ponadto chcemy, aby nowa bryła była sumą brył o funkcjach pola przekroju, które są wielomianami czysto stopnia 3, 2, 1 i 0. Założyliśmy, że kwadratowa część funkcji pola przekroju naszej bryły jest dodatnia niezależnie od *h*, ale dodanie do tworzonej bryły czynnika odpowiedzialnego za elementy trzeciego stopnia wymaga chwilowego zastanowienia. Dla $h > 0$ wielkość S(*h*) jest dodatnia, ale dla $h < 0$ przekrój S(*h*) jest wielkością ujemną. Co więc w takim przypadku musimy zrobić?

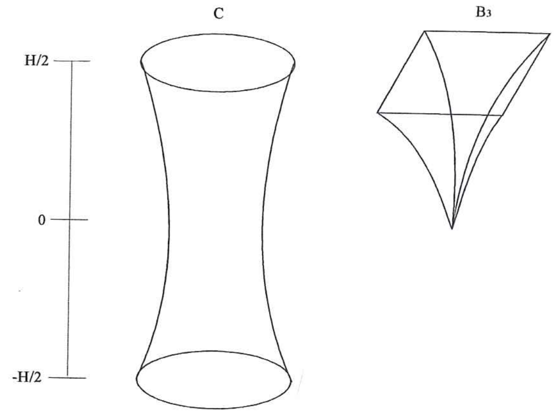
Tworzymy dwie bryły: B_1' i B_2'. B_1' (rys. 18) jest sumą naszej wyjściowej bryły *B* oraz bryły $B_{3'}$. $B_{3'}$ to bryła z funkcją pola przekroju czysto trzeciego stopnia, która zawiera się pomiędzy takimi płaszczyznami Π_- i Π_0, że Π_- znajduje się na wysokości $h' = -\frac{H}{2}$ a Π_0 na wysokości $h' = 0$. Bryłę $B_{3'}$ dobieramy ponadto w taki sposób, że jej funkcja pola przekroju, dla $h' \in \left[-\frac{H}{2}, 0\right]$, jest równa $S'_{B_{3'}}(h') = -b_3 h'^3$.

B_2' (rys. 19) jest sumą brył *C* i B_3. *C* to bryła, z kwadratową funkcją pola przekroju, która wynosi $b_2 h'^2 + b_1 h' + b_0$ i jest dodatnia dla każdego $h' \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$. B_3 to bryła z funkcją pola przekroju trzeciego stopnia, przystająca do bryły $B_{3'}$ – odwrócona „do góry nogami" względem $B_{3'}$, ale zawarta pomiędzy takimi płaszczyznami Π_0 i Π_+, że Π_0 znajduje się jak wcześniej na wysokości $h' = 0$ a Π_+ na wysokości $h' = \frac{H}{2}$.

Dla takiej bryły B_3 jej funkcja pola przekroju to $S'_{B_3}(h') = b_3 h'^3$. Zakładamy także, że bryły B_1' i B_2' mają równe sobie funkcje pola przekroju: $S_{B_1'}(h') = S_{B_2'}(h')$.



rys. 18



rys. 19

Wypunktujmy teraz znane nam własności brył B_1' i B_2', pamiętając o naszym celu, który chcemy udowodnić, mianowicie, że $Q_B = V_B$.

1) $B_1' = B \cup B_{3'}$ oraz $B_2' = C \cup B_3$.
2) Jeżeli $S'_{B_1'}(h') = S'_{B_2'}(h')$ dla każdego h, to $Q_{B_1'} = Q_{B_2'}$.
3) Skoro pola przekrojów brył B_1' i B_2' na wszystkich poziomach h są sobie równe, to w myśl zasady Cavalieriego $V_{B_1'} = V_{B_2'}$. Tym samym $V_B + V_{B_{3'}} = V_C + V_{B_3}$. Jednak bryły B_3 i $B_{3'}$ są do siebie przystające, występują tylko jako składowe różnych brył, ale ich objętość jest taka sama, więc $V_B = V_C$.
4) Z rozdziału II wiemy, że $Q_{B_1'} = Q_B + Q_{B_{3'}}$ a $Q_{B_2'} = Q_C + Q_{B_3}$.
5) B_3 i $B_{3'}$ są bryłami przystającymi i symetrycznymi względem siebie.

$$Q_{B_3} = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right) = \frac{1}{6}H\left(b_3\left(\frac{H}{2}\right)^3 + 4\cdot 0 + 0\right) = \frac{1}{6}Hb_3\frac{H^3}{8} = \frac{b_3 H^4}{48},$$

$$Q_{B_{3'}} = \frac{1}{6}H\left(P_g + 4P_{śr} + P_d\right) = \frac{1}{6}H\left(-b_3\left(-\frac{H}{2}\right)^3 + 4\cdot 0 + 0\right) = \frac{1}{6}Hb_3\frac{H^3}{8} = \frac{b_3 H^4}{48}$$

więc $Q_{B_3} = Q_{B_{3'}}$.

6) Z wymienionych wyżej własności (2), (4) i (5) wnioskujemy, że $Q_{B_1'} = Q_{B_2'}$, czyli $Q_B + Q_{B_3'} = Q_C + Q_{B_3}$, skąd ostatecznie wynika, że $Q_B = Q_C$.

7) W rozdziale IV udowodniliśmy, że dla brył z kwadratową funkcją pola przekroju $Q = V$. U nas bryła C ma funkcję pola przekroju drugiego stopnia, więc $Q_C = V_C$.

Teraz wyznaczone wyżej własności pozwalają nam dojść do końca naszego dowodu, mianowicie z własności (6), (7) i (3) otrzymujemy: $Q_B = Q_C = V_C = V_B$ ■

Rozpatrywanie bryły z funkcją pola przekroju trzeciego stopnia i wielkości Q jako objętości tej bryły, wymaga niestety przeanalizowania kilku przypadków.

Rozważmy tym razem sytuacje, w której współczynnik b_3 funkcji pola przekroju naszej bryły B, jest większy od zera, ale wyrażenie $b_2h'^2 + b_1h' + b_0$ nie jest dodatnie dla każdego $h' \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$.

W takim przypadku zaczynamy od znalezienia tak dużego α, by wielkość $b_2h'^2 + b_1h' + b_0 + \alpha$ była dodatnia dla każdego h' z przedziału $\left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$. Następnie dla tak dobranego α budujemy bryłę C z funkcją pola przekroju równą właśnie $b_2h'^2 + b_1h' + b_0 + \alpha$.

Dalej rozumowanie przebiega analogicznie do przedstawionego wcześniej, tzn. budujemy bryły B_1' i B_2', dla których $S''_{B_1'}(h') = S''_{B_2'}(h')$. B_2' jest sumą bryły C i bryły B_3 (o właściwościach jak we wcześniejszym rozumowaniu). Z kolei pamiętając o „triku" dodania α w funkcji pola przekroju bryły C, tworzymy taką bryłę B_1', która będzie sumą bryły B, bryły B_α ze stałą funkcją pola przekroju równą α i bryły $B_{3'}$ (o właściwościach jak wcześniej). Podobnie wypunktujmy własności B_1' i B_2', i tak otrzymujemy:

1) $B_1' = B \cup B_{3'} \cup B_\alpha$ oraz $B_2' = C \cup B_3$.

2) $Q_{B_1'} = Q_{B_2'}$, bo $S_{B_1'}(h') = S_{B_2'}(h')$ dla każdego h.

3) Z zasady Cavalieriego – skoro $S_{B_1'}(h') = S_{B_2'}(h')$ dla każdego h, to $V_{B_1'} = V_{B_2'}$, czyli $V_B + V_{B_3'} + V_\alpha = V_C + V_{B_3}$. Ponadto wiemy, że $V_{B_3'} = V_{B_3}$, czyli $V_B + V_\alpha = V_C$.

4) $Q_{B_1'} = Q_B + Q_{B_3'} + Q_\alpha$, $Q_{B_2'} = Q_C + Q_{B_3}$ a $Q_{B_3} = Q_{B_3'}$ to z (2) otrzymamy $Q_B + Q_\alpha = Q_C$.

Z kolei z (4), z faktu prawdziwości $Q_C = V_C$ (C jest bryłą z kwadratową funkcją pola przekroju) i (3): $Q_B + Q_\alpha = Q_C = V_C = V_B + V_\alpha$, a B_α to bryła ze stałą funkcją pola przekroju, dla której z rozdziału I wiemy, także, że $Q_\alpha = V_\alpha$, czyli $Q_B = V_B$ ∎

Zatrzymajmy się po raz ostatni dłużej przy jeszcze jednym z przypadków bryły z funkcją pola przekroju trzeciego stopnia. Mianowicie, teraz zwróćmy szczególną uwagę na przypadek, gdy współczynnik b_3 jest mniejszy od zera. W takiej sytuacji do wyjściowej bryły B dodajemy teraz bryłę B_3 zawartą między płaszczyznami Π_0 na wysokości $h' = 0$ i Π_+ na wysokości $h' = \frac{H}{2}$, tworząc tym samym bryłę B_1'. Z kolei bryła B_2' będzie zawierała bryłę C z kwadratową funkcją pola przekroju, oraz składową z funkcją pola przekroju trzeciego stopnia – bryłę $B_{3'}$, ale umieszczoną między płaszczyzną Π_0 na wysokości $h' = 0$ a płaszczyzną Π_- na wysokości $h' = -\frac{H}{2}$. Zwracając jeszcze uwagę na wartość wyrażenia $b_2 h'^2 + b_1 h' + b_0$ badanej bryły, w zależności od potrzeby szukamy tak dużego α, aby wielkość $b_2 h'^2 + b_1 h' + b_0 + \alpha$ była dodatnia dla każdego h'. Reszta dowodu wymaga zauważenie odpowiednich własności i wyciągnięcia z nich wniosków prowadzących do faktu $Q = V$, w sposób analogiczny jak w rozumowaniach powyżej.

Na koniec w zarysie ogólnym przedstawmy jeszcze schemat dowodu wielkości Q jako wielkości wyznaczającej objętość:

- dana jest bryła B z funkcją pola przekroju trzeciego stopnia dla $h \in [0, H]$,
- zmieniamy parametr wysokości przekroju na $h' \in \left[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}\right]$,
- zwracamy uwagę na znaki współczynników wielomianu funkcji pola przekroju,

- tworzymy bryły B_1' i B_2', takie że $S_{B_1'}(h') = S_{B_2'}(h')$, z odpowiednio dobranymi składowymi z funkcją pola przekroju trzeciego stopnia (na odpowiednich wysokościach), oraz w zależności od potrzeby ze składową B_α z odpowiednio dużym, stałym przekrojem α,
- zauważamy własności Q i V, wyciągamy z nich wnioski i przeprowadzamy rozumowanie prowadzących do $Q_B = V_B$.

WNIOSEK:

Jeżeli bryła ma funkcję pola przekroju będącą wielomianem stopnia niewiększego niż trzy, to objętość tej bryły można wyrazić wzorem $Q = \frac{1}{6}\mathrm{H}\left(\mathrm{P_g} + 4\mathrm{P_{śr}} + \mathrm{P_d}\right)$.

DODATEK

Całkowy dowód wzoru $Q=\frac{1}{6}\mathrm{H}\left(\mathrm{P_g}+4\mathrm{P_{śr}}+\mathrm{P_d}\right)$ jako objętości.

Przedstawione w rozdziale IV i V elementarne dowody, w których brak było zaangażowania rachunku różniczkowego i całkowego, doprowadziły nas do faktu, iż $Q=V$. Teraz dla porównania, wykorzystamy całki, aby po raz ostatni pokazać, że dla określonej klasy brył, wielkość $Q=\frac{1}{6}H\left(P_g+4P_{śr}+P_d\right)$ wyznacza objętość.

Na początek odwołajmy się do wiadomości z analizy matematycznej, łączących objętość z „narzędziem", jakim jest całka.

TWIERDZENIE:

Niech B będzie bryłą w przestrzeni trójwymiarowej. Dla ustalonego h niech $\mathrm{S}(h)$ będzie polem przekroju płaszczyzny $\{(x, y, z)\colon z = h\}$ z bryłą B. Załóżmy, że funkcja $\mathbf{R} \ni h \to \mathrm{S}(h)$ jest funkcją kawałkami ciągłą, ograniczoną i przyjmująca wartość zero poza skończonym przedziałem $[H_0, H_1]$. Wtedy objętość bryły B definiujemy jako

$$V_B = \int_{H_0}^{H_1} S(h)dh.$$

Bryła B z polem przekroju $S(h)=a_3h^3+a_2h^2+a_1h+a_0$, przyjmującym wartości różne od zera na przedziale [0, H] i dowolnymi współczynnikami a_3, a_2, a_1, a_0.

Sprawdźmy objętość liczoną przez całkowanie:

$$V_B = \int_0^H S(h)dh = \int_0^H (a_3h^3+a_2h^2+a_1h+a_0)dh = \left(\frac{a_3h^4}{4}+\frac{a_2h^3}{3}+\frac{a_1h^2}{2}+a_0h\right)\Bigg|_0^H =$$

$$=\frac{a_3H^4}{4}+\frac{a_2H^3}{3}+\frac{a_1H^2}{2}+a_0H.$$

Wyliczmy Q dla rozważanej bryły:

$$Q_B = \frac{1}{6}\mathrm{H}\left(\mathrm{P_g} + 4\mathrm{P_{śr}} + \mathrm{P_d}\right) = \frac{1}{6}\mathrm{H}\left(\mathrm{S(H)} + 4S\left(\frac{H}{2}\right) + S(0)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\mathrm{H}\left(\left(a_3H^3 + a_2H^2 + a_1H + a_0\right) + 4\left(a_3\frac{H^3}{8} + a_2\frac{H^2}{4} + a_1\frac{H}{2} + a_0\right) + a_0\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\mathrm{H}\left(\frac{3}{2}a_3H^3 + 2a_2H^2 + 3a_1H + 6a_0\right) = \frac{a_3H^4}{4} + \frac{a_2H^3}{3} + \frac{a_1H^2}{2} + a_0H.$$

Tym samym widzimy, że $Q_B = V_B$ ■

Dotychczas bryły rozważane, na wcześniejszych stronach tej pracy, były bryłami, dla których funkcja pola przekroju nie była większa niż trzeciego stopnia.

Weźmy teraz bryłę z funkcją pola przekroju czwartego stopnia. Wykorzystując całkowanie znajdźmy jej objętość. Następnie wyznaczmy Q i sprawdźmy czy dalej zwraca ona w sposób prawidłowy wyliczoną wcześniej objętość.

Bryła B z polem przekroju $S(h) = a_4h^4 + a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0$, przyjmującym wartości różne od zera na przedziale [0, H] i współczynnikiem a_4 różnym od zera.

$$V_B = \int_0^H S(h)dh = \int_0^H (a_4h^4 + a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0)dh = \left(\frac{a_4h^5}{5} + \frac{a_3h^4}{4} + \frac{a_2h^3}{3} + \frac{a_1h^2}{2} + a_0h\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{a_4H^5}{5} + \frac{a_3H^4}{4} + \frac{a_2H^3}{3} + \frac{a_1H^2}{2} + a_0H.$$

$$Q_B = \frac{1}{6}\mathrm{H}\left(\mathrm{P_g} + 4\mathrm{P_{śr}} + \mathrm{P_d}\right) = \frac{1}{6}\mathrm{H}\left(\mathrm{S(H)} + 4\mathrm{S}\left(\frac{\mathrm{H}}{2}\right) + S(0)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\mathrm{H}\left(\left(a_4H^4 + a_3H^3 + a_2H^2 + a_1H + a_0\right) + 4\left(a_4\frac{H^4}{16}a_3\frac{H^3}{8} + a_2\frac{H^2}{4} + a_1\frac{H}{2} + a_0\right) + a_0\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\mathrm{H}\left(\frac{5}{4}a_4H^4 + \frac{3}{2}a_3H^3 + 2a_2H^2 + 3a_1H + 6a_0\right) =$$

$$= \frac{5a_4H^5}{24} + \frac{a_3H^4}{4} + \frac{a_2H^3}{3} + \frac{a_1H^2}{2} + a_0H.$$

Tym razem, przeciwnie do wszystkich wcześniejszych sytuacji, wzór $Q = \frac{1}{6} \mathrm{H} \left(\mathrm{P_g} + 4\mathrm{P_{śr}} + \mathrm{P_d} \right)$ nie wyznacza nam objętości: $Q_B \neq V_B$. Podobnie będzie dla brył z funkcją pola przekroju pozostałych stopni – wartość Q na ogół nie będzie równa ich objętości.