UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI

KRZYSZTOF GODZWON

# RÓWNOWAŻNOŚĆ PRZEZ ROZKŁAD DLA WIELOKĄTÓW I WIELOŚCIANÓW.

PRACA MAGISTERSKA

NAPISANA POD KIERUNKIEM
DOKTORA JACKA ŚWIĄTKOWSKIEGO

WROCŁAW 1999

SPIS TREŚCI

# 1. WSTĘP

Niniejsza praca poświęcona jest zagadnieniu równoważności przez rozkład dla wielokątów (rozumowania są rozszerzone również o figury wielokątne) i wielościanów. Zawiera definicje i twierdzenia wraz z dowodami związane z pojęciem równoważności przez rozkład zarówno dla obiektów na płaszczyźnie jak i w przestrzeni trójwymiarowej.

Rozdział 2 dotyczy równoważności przez rozkład dla figur wielokątnych na płaszczyźnie.

Wszystkie twierdzenia i dowody w nim zawarte są sformułowane bez odwoływania się do pojęcia pola. Na podstawie tych rozważań zostanie wyprowadzona w rozdziale 3 alternatywna i raczej nie spotykana w literaturze definicja pola. Definicja ta posługuje się pojęciem równoważności przez rozkład i dotyczy oczywiście tylko figur wielokątnych.

Inne spojrzenie na problem równoważności przez rozkład figur wielokątnych prezentujemy w rozdziale 4, opierając się tu na znajomości pola definiowanego w sposób dowolny. Znajomość pola pozwala na przekształcenie równoważnie przez rozkład dowolnej figury wielokątnej na kwadrat, co prowadzi do wprowadzenia warunku koniecznego i dostatecznego aby dwie figury wielokątne mogły być sobie równoważne przez rozkład. Warunkiem tym jest właśnie równość pól.

Ostatni rozdział pracy poświęcony jest wielościanom.

Rozważań dotyczących figur płaskich nie możemy w analogiczny sposób rozszerzyć na wielościany.

Dla figur wielokątnych warunkiem koniecznym i dostatecznym równoważności przez rozkład jest równość pól, podczas gdy dla wielościanów równość objętości jest tylko jednym z warunków koniecznych (lecz nie dostatecznym), aby dwa wielościany mogły być równoważne przez rozkład. Równość objętości jest jedynie w niektórych przypadkach warunkiem wystarczającym dla równoważności przez rozkład, np. dla graniastosłupów, (także pochyłych), czego dowód prezentujemy w podrozdziale 5.2.5.

W roku 1901 M.Dehn sformułował dodatkowy warunek równoważności wielościanów, którego szczególny przypadek wraz z dowodem zostanie w niniejszej pracy przedstawiony (pkt 5.3).

Większość zamieszczonych dowodów została przeprowadzona przeze mnie dla potrzeb tej pracy. Twierdzenia zawarte w podrozdziale 5.3 jak i sposób rozumowania wykorzystywany w dowodach zostały zaczerpnięte z pozycji A.Ehrenfeucht pt. „Ciekawy czworościan”[7].

# 2. RÓWNOWAŻNOŚĆ WIELOKĄTÓW PRZEZ ROZKŁAD.

Rozdział ten poświęcony jest równoważności przez rozkład dla wielokątów (lub figur wielokątnych). Podane są w nim twierdzenia („przepisy") mówiące o tym, które wielokąty są równoważne przez rozkład. Przy dowodach twierdzeń korzystać będziemy tylko z definicji równoważności i z własności określających relację równoważności. W żadnym z rozumowań nie będzie wykorzystywane pojęcie pola. Zakładamy w tym rozdziale, że pojęcie pola jest nam obce i na razie zupełnie niepotrzebne. Dowody w tej części można porównać do zabawy dziecka polegającej na rozcinaniu jakiegoś obrazka, a następnie poprzez przestawianie elementów układanki na tworzeniu z dokładnie wszystkich kawałków innego obrazka. Należy tu tylko zastrzec, że poszczególne elementy nie będą na siebie zachodziły. Ponadto, zarówno „obrazki" jak i elementy, na które je rozcinamy będą wielokątami.

## 2.1 Podstawowe własności figur równoważnych przez rozkład

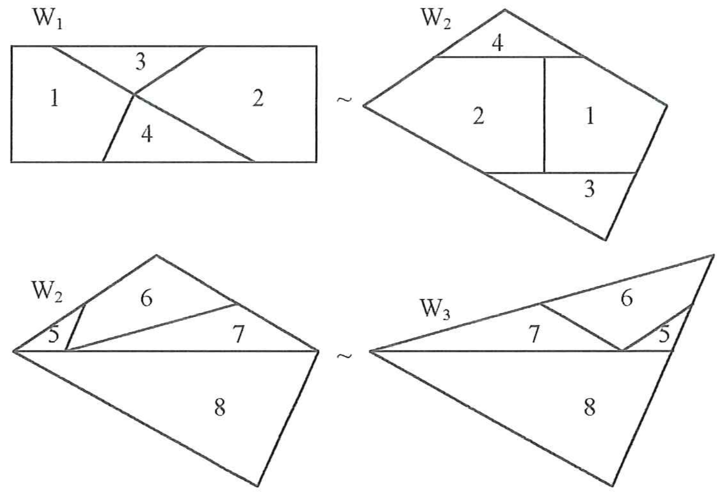
Definicja 2.1:

*Dwa wielokąty nazywamy równoważnymi przez rozkład wtedy i tylko wtedy, gdy można je podzielić na jednakową liczbę wielokątów odpowiednio do siebie przystających.*[1]

Zdanie: „Wielokąt $W_1$ jest równoważny przez rozkład wielokątowi $W_2$" zapisujemy:

$$W_1 \sim W_2.$$

Na poniższym rysunku są pokazane figury równoważne: prostokąt i czworokąt oraz ten sam czworokąt i trójkąt.



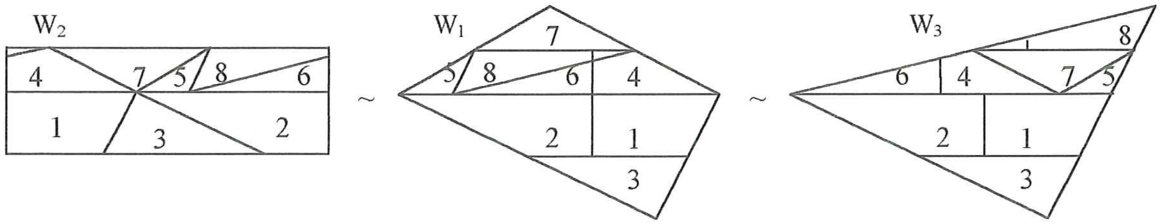
rys1

Wielokąt $W_1$ (prostokąt) został pocięty raz siecią 4 odcinków (rys1), z których powstał wielokąt $W_2$ (czworokąt), następnie ten sam wielokąt $W_2$ został pocięty siecią 3 odcinków, z których powstał wielokąt $W_3$ (trójkąt). Wystarczy więc $W_1$ pociąć jednocześnie siecią 3 i 4 odcinków aby z $W_1$ można było złożyć $W_3$.

Rysunek 2 jest ilustracją twierdzenia:

Twierdzenie 2.2:

Jeśli dwa wielokąty są równoważne przez rozkład trzeciemu wielokątowi, to te dwa wielokąty są sobie równoważne.[2]



rys2

Na podstawie twierdzenia 2.2 można wywnioskować, że:

a) dla dowolnych wielokątów $W_1$, $W_2$, $W_3$ mamy:

$$W_1 \sim W_2 \wedge W_2 \sim W_3 \Rightarrow W_1 \sim W_3 \qquad (1)$$

czyli relacja równoważności wielokątów przez rozkład jest przechodnia;

b) dla dowolnych wielokątów $W_1$, $W_2$ mamy

$$W_1 \sim W_2 \Rightarrow W_2 \sim W_1 \qquad (2)$$

czyli relacja równoważności wielokątów przez rozkład jest symetryczna;

c) dla dowolnego wielokąta $W_1$

$$W_1 \sim W_1 \qquad (3)$$

czyli relacja równoważności wielokątów przez rozkład jest zwrotna.

Każda relacja, która jest przechodnia, symetryczna i zwrotna jest relacją równoważności. Wynika więc z tego, że nazwa „relacja równoważności wielokątów przez rozkład" jest uzasadniona.

Z samego określenia relacji równoważności wielokątów przez rozkład wynikają następujące własności tej relacji:

a) jeżeli dwa wielokąty $W_1$ i $W_2$ są przystające to są równoważne sobie przez rozkład,

$$W_1 = W_2 \Rightarrow W_1 \sim W_2 \qquad (4)$$

b) sumy wielokątów odpowiednio sobie równoważnych przez rozkład są równoważne przez rozkład, czyli:

jeżeli $W_1$, $W_2$, $W_3$ i $W_4$ są wielokątami i $W_1 \sim W_2$ i $W_3 \sim W_4$

to

$$W_1 + W_3 \sim W_2 + W_4 \qquad (5)$$

gdzie symbol + oznacza rozłączną sumę figur.

## 2.2 Równoważność przez rozkład kilku typów figur.

### 2.2.1 Równoważność dla równoległoboków.

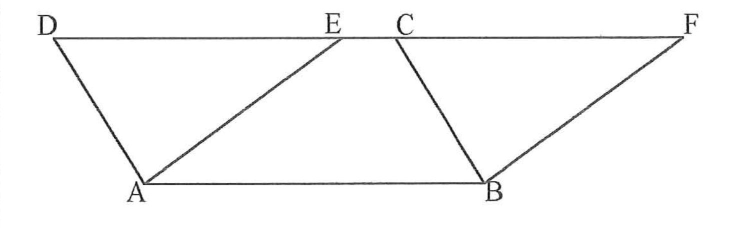
Twierdzenie 2.3:

*Dwa równoległoboki o równych podstawach i wysokościach są równoważne przez rozkład.*

Dowód:

Dla ułatwienia umieszczę oba równoległoboki na jednej podstawie.

Przypadek 1 (boki CD i EF częściowo na siebie zachodzą).



rys3

Z rysunku widać, że czworokąt ABCE jest częścią wspólną obu równoległoboków, a trójkąty $\Delta ADE$ i $\Delta BCF$ są przystające, ponieważ $|AD|=|BC|$ i $|AE|=|BF|$ (są to boki odpowiednich równoległoboków) oraz $\angle ADE=\angle BCF$ (są to kąty współprzyległe).

Więc na mocy definicji 2.1 trójkąty są równoważne przez rozkład:

$$ABCD = ABCE + ADE$$

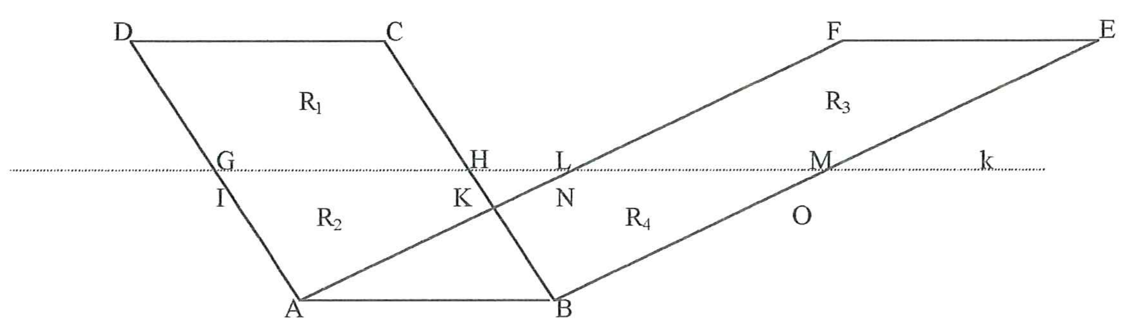
$$ABFE = ABCE + BFC$$

czyli

$$ABCD = ABCE + ADE \sim ABCE + BFC = ABFE \Rightarrow ABCD \sim ABFE$$

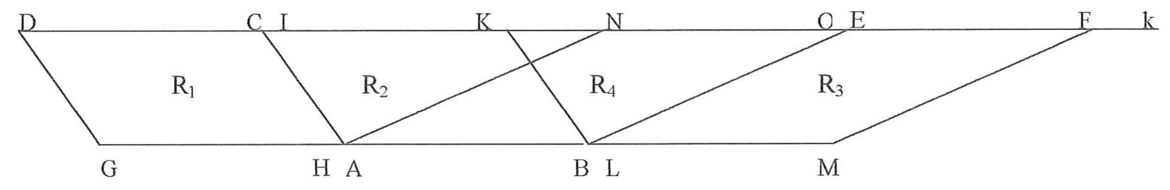
#

Przypadek 2 (boki CD i EF nie zachodzą na siebie).



rys4

Dzielimy oba równoległoboki prostą równoodległą od obu podstaw na odpowiednio przystające równoległoboki $R_1=R_2$ i $R_3=R_4$ i układamy je jak na rysunku 5.



rys5

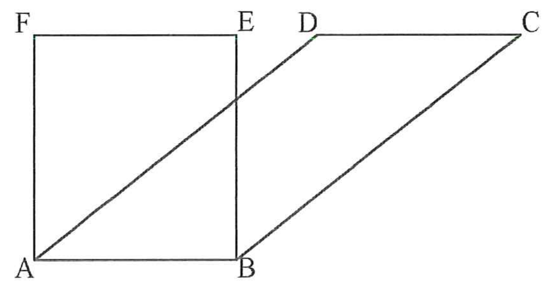
Powtarzamy tą czynność tak długo, aż nowo powstałe „górne" boki pokryją się przynajmniej w jednym punkcie. Dzięki temu przypadek ten sprowadził się do poprzedniego.

#

Na mocy twierdzenia 2.3 można sformułować następujący wniosek:

Wniosek 2.4:

*Dla każdego równoległoboku ABCD istnieje równoważny przez rozkład prostokąt ABEF którego bokami są jeden z boków równoległoboku i wysokość opuszczona na ten bok.*



rys 6

2.2.2 Równoważność dla równoległoboków i trójkątów.

Twierdzenie 2.5:

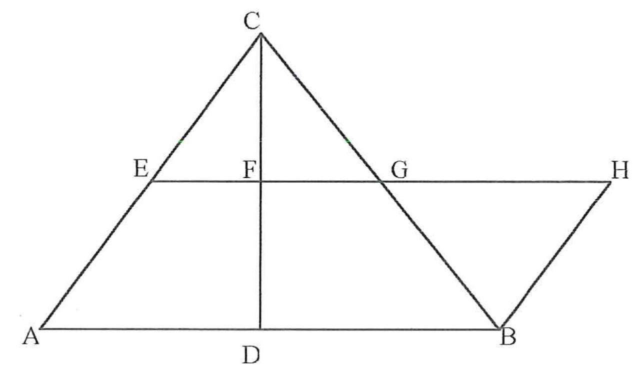
*Każdy trójkąt jest równoważny przez rozkład równoległobokowi o takiej samej podstawie, a wysokości dwa razy mniejszej.*

Dowód:

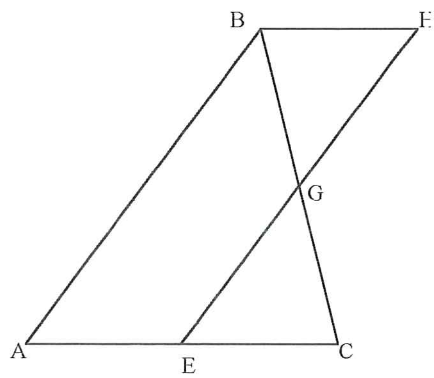
W trójkącie ABC przez środek wysokości F prowadzimy prostą równoległą do podstawy AB a następnie odcinek BH równoległy do AC. Trójkąty EGC i BGH są przystające ponieważ:

|CF|=|FD| z założenia, więc na mocy twierdzenia Talesa |CE|=|AE| i |CG|=|GB|. Ponieważ HB jest równoległy do AE i odcinki te są zawarte między prostymi równoległymi to |AE|=|HB|, to |CE|=|HB|, kąt $\angle CGE = \angle BGH$, czyli:

$$ABC = ABGE+EGC \sim ABGE+BHG = ABHE \Rightarrow ABC \sim ABHE$$



rys7



rys 8

W taki sam sposób można dowieść, że:

Twierdzenie 2.6: (rysunek 8)

*Każdy trójkąt jest równoważny przez rozkład równoległobokowi o takiej samej wysokości i podstawie dwa razy mniejszej.*

Wniosek 2.7:

*Trójkąt jest równoważny przez rozkład prostokątowi o takiej samej podstawie i wysokości dwa razy mniejszej.*

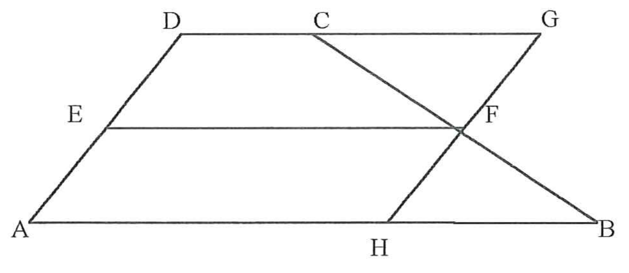
Wniosek 2.8:

*Dwa trójkąty o równych podstawach i wysokościach są równoważne przez rozkład.*

2.2.3 Równoważność dla równoległoboków i trapezów.

Twierdzenie 2.9:

*Trapez jest równoważny przez rozkład równoległobokowi, który ma wysokość trapezu a podstawą jest linia środkowa trapezu.*




rys 9

Dowód:

Przez środki boków trapezu ABCD prowadzimy prostą EF a następnie przez punkt F prostą HG równoległą do AD. Aby trapez był równoważny przez rozkład równoległobokowi AHGD wystarczy pokazać, że $\Delta HBF$ jest przystający do $\Delta CFG$.

Ze sposobu przeprowadzenia prostej EF wynika, że $|AE|=|ED|=|HF|=|FG|$, $|CF|=|FB|$ i $\angle HFB = \angle CFG$. Więc $\Delta CFG$ i $\Delta HFB$ mają dwa równe boki i równy kąt między nimi, co wystarczy aby te trójkąty były przystające, czyli:

$$ABCD = AHFCD+HBF \sim AHFCD+FGC = AHGD \Rightarrow ABCD \sim AHGD$$

#

## 2.3 Zasadnicze twierdzenie o wielokątach równoważnych przez rozkład.

Sformułujmy teraz twierdzenie pomocnicze do zasadniczego twierdzenia o wielokątach równoważnych przez rozkład.

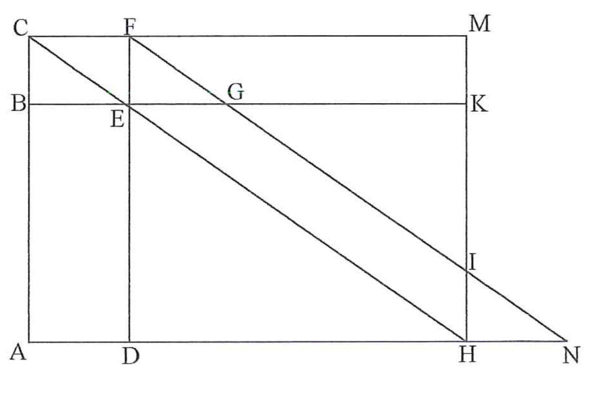
Twierdzenie 2.10:

*Dla każdego równoległoboku można zbudować prostokąt równoważny przez rozkład taki, że jeden z jego boków jest równy jednostce długości.*

Dowód:

Na mocy wniosku 2.4 dowód sprowadza się do pokazania, że dla każdego prostokąta ABED można zbudować równoważny przez rozkład prostokąt o jednym boku równym jednostce długości.

Na przedłużeniu boku DE odkładamy bok |EF|=1. Znajdujemy punkt H przecięcia prostych CE i AD. Budujemy prostokąt pomocniczy AHMC i MFEK ograniczony prostymi BE, CF,




rys10

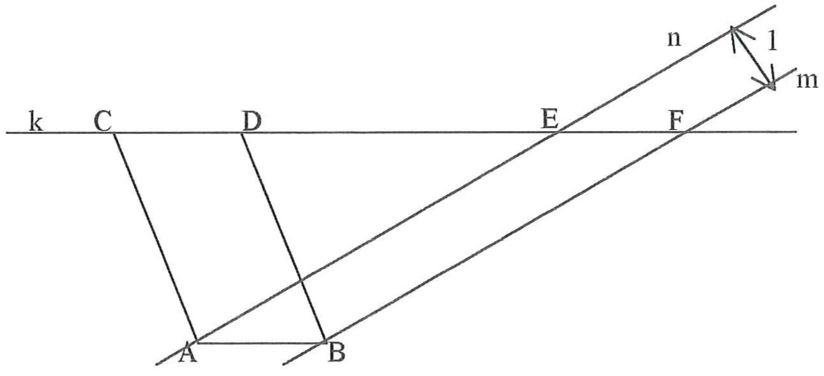
DE i HM. Prostokąt ADEB jest równoważny równoległobokowi NGEH (równa podstawa i wysokość tw 2.3). Równoległobok NGEH jest równoważny HIFE. Jak również równoległobok IFEH jest równoważny równoległobokowi MFEK (równa podstawa i wysokość), czyli:

$$ADEB \sim HNGE \sim HIFE \sim KMFE \Rightarrow ADEB \sim KMFE$$

#

To samo twierdzenie można udowodnić w jeszcze inny sposób:

Dowód 2:




rys11

Rysujemy proste *m* i *n* odległe od siebie o 1. Na prostej *m* obieramy punkt B, a na prostej *n* punkt A odległy od B o bok równoległoboku (takie punkty A są dwa, my wybieramy tylko jeden). Prosta *k* jest równoległa do AB i odległa o wysokość równoległoboku. Punkty C i D należą do *k* i są odpowiednio odległe od A i B o długość drugiego boku. Równoległobok ABDC (wyjściowy równoległobok) jest równoważny równoległobokowi ograniczonemu prostymi AB, *m*, *n* i *k* (równa podstawa AB i wysokość). Otrzymaliśmy w ten sposób równoległobok, którego wysokość jest równa jednostce długości. Równoległobok taki, jak już pokazaliśmy wcześniej (wniosek 2.4) jest równoważny przez rozkład prostokątowi o równej podstawie i wysokości.

Aby zastosować tę metodę musimy założyć, że przynajmniej jeden z boków $|AB|>1$ lub $|AC|>1$ gdyż w przeciwnym wypadku niemożliwy byłby krok, w którym obieraliśmy punkt A. Sytuacja taka, w której $|AB|<1$ i $|AC|<1$ nie jest jednak sytuacją tragiczną. Rozcinamy równoległobok ABDC na dwa przystające równoległoboki i przestawiamy je (tak jak w dowodzie twierdzenia 2.3 rysunki 4 i 5). Rozcinanie to powtarzamy tak długo, aż nowo powstała podstawa będzie niemniejsza niż 1.

#

Można już teraz przytoczyć zasadnicze twierdzenie o wielokątach równoważnych przez rozkład.

Twierdzenie 2.11:

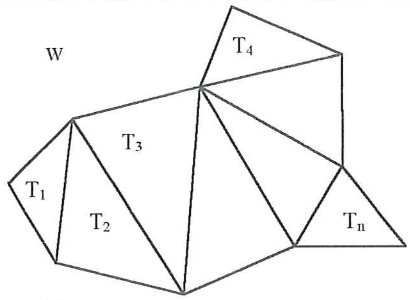
*Dla każdego wielokąta można zbudować prostokąt równoważny mu przez rozkład taki, że jeden z jego boków jest jednostką długości.*

Dowód:

Dzielimy wielokąt W odcinkami na trójkąty: $W = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$.

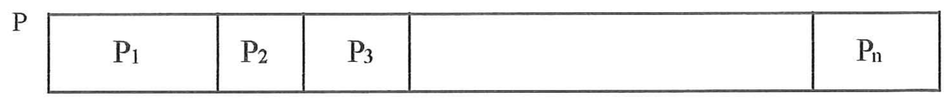
Na mocy twierdzenia 2.5 każdy z $T_i$ jest odpowiednio równoważny przez rozkład równoległobokowi $R_i$ gdzie $i=1,2,\ldots,n$, a z twierdzenia 2.10 każdy z $R_i$ jest równoważny prostokątowi $P_i$ o jednym boku równym jednostce długości.

$$\begin{array}{l} T_1 \sim R_1 \sim P_1 \Rightarrow T_1 \sim P_1 \\ T_2 \sim R_2 \sim P_2 \Rightarrow T_2 \sim P_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad \vdots \\ T_n \sim R_n \sim P_n \Rightarrow T_n \sim P_n \end{array}$$



rys12

$$W = T_1+T_2+\ldots+T_n \sim R_1+R_2+\ldots+R_n \sim P_1+P_2+\ldots+P_n = P \Rightarrow W \sim P$$



rys13

Na koniec zwróćmy jeszcze uwagę, że żaden z omawianych przypadków nie wymagał zmiany orientacji jakiegokolwiek z wielokątów powstałych z rozcięcia figury wyjściowej. Dowodzi to istnienia nie tylko równoważności przez rozkład ale nawet zorientowanej (!) równoważności przez rozkład.

# 3. OKREŚLENIE POJĘCIA POLA.

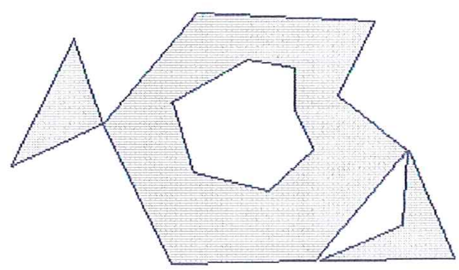
W rozdziale tym uogólnimy poprzednie rozważania na figury wielokątne, jak również za pomocą tylko i wyłącznie cytowanych wcześniej twierdzeń spróbujemy wprowadzić pojęcie pola. Postaramy się również wyprowadzić podstawowe własności pola. Pokażemy, że zdefiniowane przez nas pole figury wielokątnej jest określone w sposób jednoznaczny.

## 3.1 Równoważność przez rozkład dla figur wielokątnych.

Definicja 3.1:

*Figurą wielokątną nazywamy każdą figurę, którą można striangulować, tzn. przedstawić jako sumę trójkątów o parami rozłącznych wnętrzach.*

Przykładem takiej figury może być każdy wielokąt, ale nie tylko. Figura przedstawiona na rysunku 14, nie będąca wielokątem też jest figurą wielokątną.



rys 14

Twierdzenie 3.2:

*Dla każdej figury wielokątnej istnieje równoważny przez rozkład prostokąt o jednym boku równym jednostce długości.*

Dowód:

Twierdzenie to jest uogólnieniem twierdzenia 2.11 ale jak łatwo zauważyć dowód jest dokładnie taki sam, ponieważ: dzielimy figurę wielokątną na trójkąty (z definicji figury wielokątnej wiemy, że jest to możliwe), każdy trójkąt przekształcamy równoważnie na prostokąty, prostokąty na prostokąty o jednym boku równym jednostce długości, a te łączymy ze sobą tworząc jeden prostokąt.

#

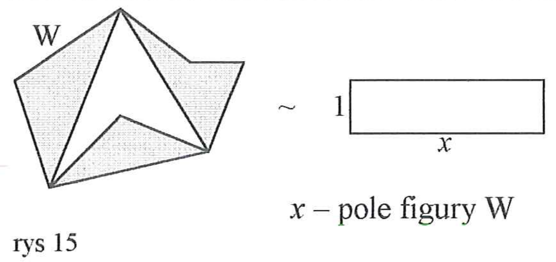
Pokazaliśmy w ten sposób, że poprzedni rozdział dotyczy nie tylko wielokątów. Wszystkie rozważania w nim przeprowadzane są prawdziwe również w odniesieniu do figur wielokątnych.

### 3.2 Określenie pojęcia pola.

Na podstawie twierdzenia 3.2 wiemy, że nie tylko każdy wielokąt, ale także każdą figurę wielokątną można przedstawić jako prostokąt o jednym boku równym jednostce długości, a drugim równym jakiejś nie zerowej liczbie $x$.

Definicja 3.3:

*Polem figury wielokątnej nazywamy liczbę $x$ będącą długością drugiego boku równoważnego przez rozkład prostokąta o jednym boku równym jednostce długości.*

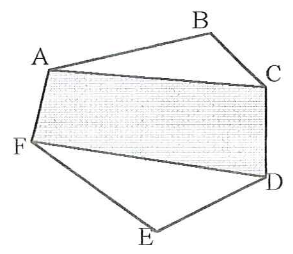


rys 15

Pytanie, które nasuwa się w tym momencie jest następujące: czy w ten sposób określone pole jest na pewno określone jednoznacznie, tzn. czy istnieją dwa różne rozkłady wielokąta W (figury wielokątnej) na prostokąty, jeden o bokach 1 i $x$, a drugi o bokach 1 i $y$, gdzie $x$ i $y$ są różne? Gdyby tak mogło się zdarzyć to oznaczałoby to, że jedna figura może mieć dwa lub więcej różnych pól.

W celu pokazania, że zdefiniowane w nasz sposób pole jest jednoznaczne posłużymy się postulatem de Zolta. Treść tego postulatu jest następująca:

*Wielokąt nigdy nie może okazać się równoważny przez rozkład swojej części* (rys 16).[3]



rys 16

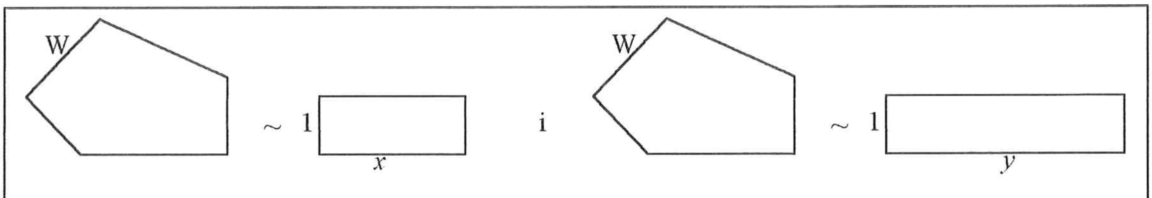
W – wielokąt ABCDEF

G – wielokąt ACDF

$$\neg(W \sim G)$$

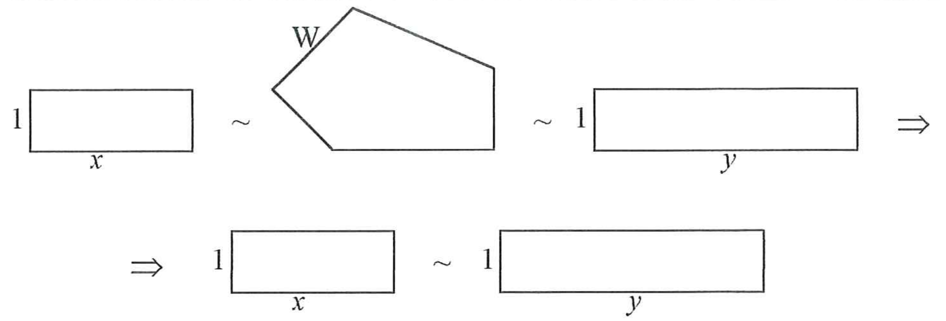
Postulat ten nazwany od nazwiska jego twórcy przyjmiemy w tej pracy jako pewnik i nie będziemy go dowodzić.

Załóżmy, że dany jest wielokąt W i dwa jego różne rozkłady na prostokąty o jednych bokach równych 1.



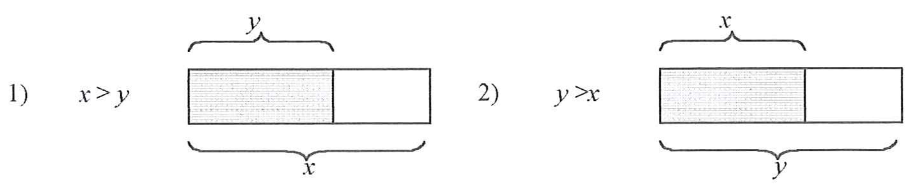
rys 17

Wiemy, że relacja równoważności jest przechodnia, czyli:



rys 18

Rozpatrzmy dwa przypadki:



rys 19

W pierwszym przypadku, w którym $x > y$ widzimy, że prostokąt o bokach 1 i $y$ jest zawarty w drugim (większym) prostokącie (w drugim przypadku jest odwrotnie). Na mocy postulatu de Zolta wiemy, że te dwa prostokąty nie mogą być równoważne, ponieważ jeden jest częścią drugiego. Wynika stąd, że nasze założenie o rozkładach figury wielokątnej na prostokąty o jednych bokach równych, a drugich nie było błędne.

Można teraz odpowiedzieć na postawione wcześniej pytanie, a mianowicie:

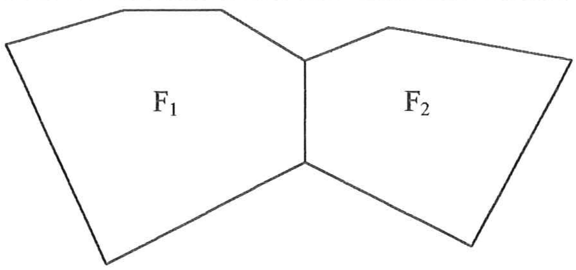
***tak określone pole jest określone jednoznacznie.***

## 3.3 Podstawowe własności pola figur wielokątnych.

W tym podrozdziale wyprowadzimy znane własności pola. Pokażemy w ten sposób, że nasza definicja pola figur wielokątnych jest zgodna z oczekiwaniami i intuicją.

1) Jeśli figury $F_1$ i $F_2$ nie zachodzą na siebie, to pole ich sumy równe jest sumie ich pól, tzn.

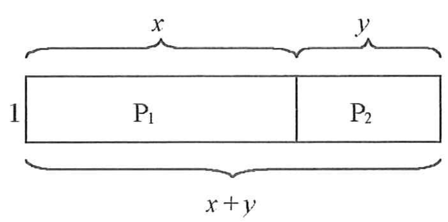
$$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2) \tag{6}$$



rys 20

Dowód:

Na mocy twierdzenia 2.11 wiemy, że figury $F_1$ i $F_2$ są odpowiednio równoważne prostokątom o jednym boku równym jednostce długości, wtedy: $F_1 \sim P_1$ i $F_2 \sim P_2$



rys 21

$P(F_1) = x$ , $P(F_2) = y$

$$P(F_1 \cup F_2) = x + y = P(F_1) + P(F_2)$$

#

2) Figury wielokątne przystające mają równe pola.

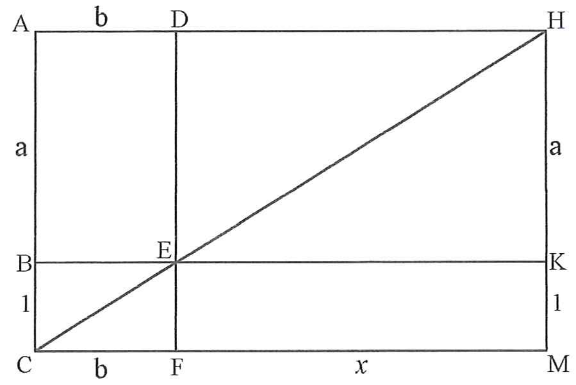
Figura $F_1$ rozkłada się na trójkąty $T_1, T_2, \ldots, T_k$, a $F_2$ na trójkąty $T_1', T_2', \ldots, T_k'$, gdzie $T_i$ i $T_i'$ tworzą trójkąty przystające. Z rozkładu $F_1$ budujemy prostokąt $P_1$ o jednym boku równym jednostce długości. Z rozkładu $F_2$ w identyczny sposób jak dla $F_1$ budujemy $P_2$. Powstałe w ten sposób prostokąty mają boki odpowiednio równe: $P_1 - 1$ i $x$, a $P_2 - 1$ i $y$. Oznacza to, że $P(F_1) = x$, a $P(F_2) = y$, ale prostokąty $P_1$ i $P_2$ są przystające ponieważ składają się z parami przystających trójkątów ułożonych w identyczny sposób, a co za tym idzie mają boki równej długości, czyli:

$$F_1 = F_2 \Rightarrow P(F_1) = x = y = P(F_2) \Rightarrow P(F_1) = P(F_2)$$

#

3) Pole prostokąta o bokach $a$ i $b$ wynosi $a \cdot b$.

W celu sprawdzenia, że tak jest posłużymy się twierdzeniem Talesa. Wykorzystamy również do tego rysunek 22, który jest analogiczny do rysunku 10.




rys 22

Na podstawie wspomnianego twierdzenia wynika, że:

$$\frac{b}{1} = \frac{b+x}{1+a} \Leftrightarrow b(1+a) = b + x \Leftrightarrow b + ab = b + x \Leftrightarrow ab = x$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że *pole prostokąta jest równe iloczynowi długości jego boków.*

#

Korzystając z tego, że znamy pole prostokąta i z wniosku 2.4 potrafimy wyprowadzić wzór na pole równoległoboków, które jest równe iloczynowi długości jednego boku i wysokości na ten bok opuszczonej. Wykorzystując twierdzenie 2.5 wiemy również, że pole trójkąta jest równe iloczynowi podstawy i połowy wysokości opuszczonej na tę podstawę.

# 4. RÓWNOWAŻNOŚĆ PRZEZ ROZKŁAD DLA WIELOKĄTÓW Z WYKORZYSTANIEM POJĘCIA POLA.

W rozdziale tym wprowadzimy alternatywne twierdzenie o wielokątach równoważnych przez rozkład. Rozdział ten będzie opierał się na innych założeniach niż rozdział 2. Zakładamy w nim, że pojęcie pola figury zdefiniowane w inny sposób niż w rozdziale 3 (np. jako miara Jordana, czy w sposób spotykany w szkole, przez wypełnianie figury kwadratami jednostkowymi) jest nam doskonale znane. Zakładamy również podstawowe własności pola jak np. to, że pole sumy dwóch rozłącznych figur jest równe sumie ich pól, czy to, że figury przystające mają równe pole. Pokażemy w nim, że każdą figurę wielokątną można równoważnie przez rozkład przedstawić jako kwadrat.

Twierdzenie 4.1:

*Dla każdego wielokąta (figury wielokątnej) istnieje równoważny przez rozkład kwadrat.*

Udowodnijmy najpierw dwa twierdzenia pomocnicze:

Twierdzenie 4.2:

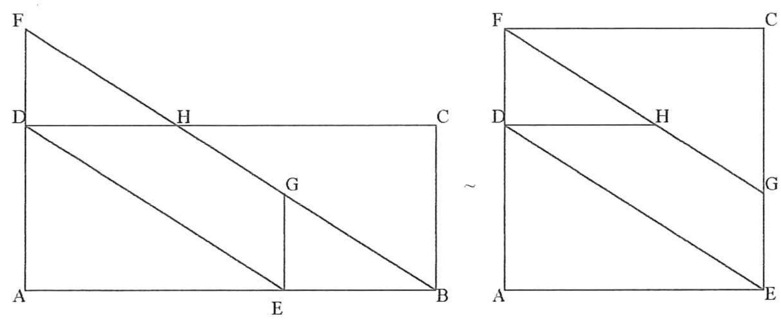
*Dla każdego prostokąta istnieje równoważny przez rozkład kwadrat.*

Dowód:

Rozpatrzmy dwa przypadki:

Przypadek 1 $|AD|<|AB|$ i $2|AD|>\sqrt{|AB||AD|}$

Obieram punkt E w taki sposób aby $|AE|=\sqrt{|AB||AD|}$, przez punkt B prowadzimy prostą równoległą do DE. Trójkąt $\Delta GEB$ przesuwamy na $\Delta DHF$ (trójkąty te są przystające ponieważ boki $|FD|=|GE|$, $|DH|=|EB|$ i są to odpowiednio przyprostokątne trójkątów prostokątnych) a następnie przesuwamy $\Delta HBC$ tak aby odcinek BH porył się z odcinkiem FG. Odcinki te pokryją się ponieważ: $|FH|=|GB|$ (są to odpowiednie boki trójkątów przystających), a odcinek HG jest ich częścią wspólną, a co za tym idzie są równej

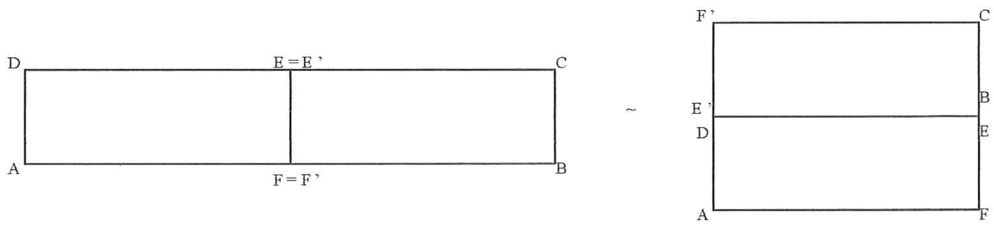



rys 23

długości. Mogłoby się pojawić pytanie czy nowo powstała figura AECF jest na pewno kwadratem. Wiemy, że prostokąt ABCD i figura AECF składają się z odpowiednio przystających wielokątów (o których wiemy, że mają odpowiednio równe pola), żadne dwa wielokąty nie zachodzą na siebie, a więc ich pola są równe. Z założenia wiemy, że $|AE|=\sqrt{|AB||AD|}$. Pole prostokąta $ABCD=|AB||AD|$, więc jeżeli jeden z boków nowego czworokąta jest równy $\sqrt{|AB||AD|}$ to drugi bok musi być równy tyle samo. Wynika z tego, że figurą tą może być tylko kwadrat, mógłby być też romb, ale $\angle DAE$ jest kątem prostym, a w rombie jeżeli jeden kąt jest równy 90° to już wszystkie są równe 90°.

#

Przypadek 2 $|AD|<|AB|$ i $2|AD|<\sqrt{|AB||AD|}$




rys 24

Jeżeli jest tak to odcinkiem EF prostopadłym do AB dzielimy prostokąt na dwa przystające prostokąty AFED i BCE'F' i ustawiamy je jak na rysunku 24. Jeżeli w nowo powstałym prostokącie $|F'A|<|AF|$ i $2|F'A|>\sqrt{|AF||AF'|}$ to przypadek ten sprowadził się do poprzedniego, jeżeli nie to czynność tą powtarzamy aż do skutku. Mogłoby się zdarzyć również tak, że w prostokącie AFCF' $|F'A|>|AF|$ ale wtedy $2|AF|>|AD|$ bo $2|AF|=|AB|$ a boki AB i AD są bokami prostokąta „przed podziałem". Jeżeli więc prostokąt AFCF', w którym $|F'A|>|AF|$ obrócimy o kąt 90° (w dowolną stronę) to przypadek ten sprowadzi się również do przypadku 1.

#

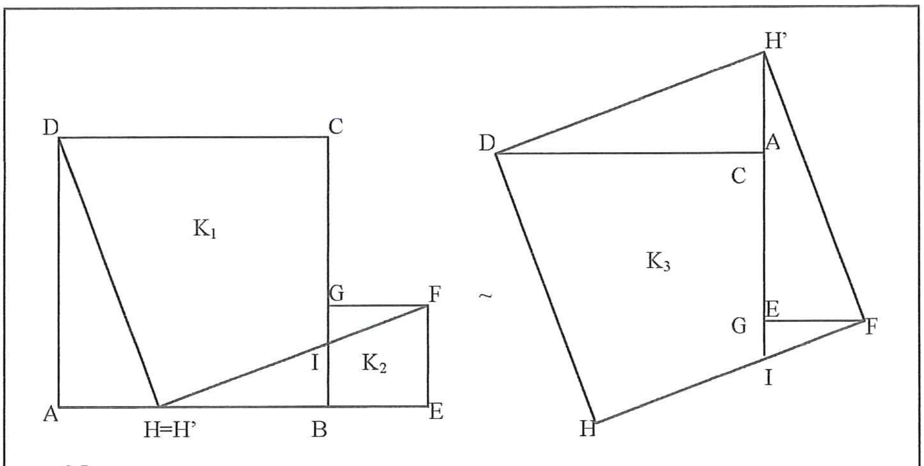
Należy jeszcze pokazać, prawdziwość poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 4.3:

*Dla każdych dwóch kwadratów istnieje kwadrat równoważny im przez rozkład.*

Dowód 1.

Ustawmy kwadraty $K_1$ i $K_2$ jak na rysunku 25. Wyznaczmy punkt H tak aby $|AH|=|BE|$. Następnie rozcinamy $K_1 + K_2$ odcinkami DH i HF. Pokażemy teraz, że powstały czworokąt HFH'D jest kwadratem:




rys 25

$\angle HDC + \angle ADH' = 90°$ (kąt $K_1$), $\Delta ADH' = \Delta H'EF$ (oba trójkąty są prostokątne i mają odpowiednio równe przyprostokątne), $\angle AH'D = \angle EFH'$ i $\angle AH'D + \angle ADH' = 90° \Rightarrow \angle AH'D + \angle EH'F = 90°$, $\angle EFH' + \angle IFG = 90°$ (kąt $K_2$). Korzystając z tego, że suma kątów w czworokącie wynosi 360° i wiedząc, że trzy kąt dają w sumie $3*90°=270°$, to wiemy też, że czwarty kąt musi być równy 90°. Na razie pokazaliśmy, że czworokąt HFH'D jest prostokątem. Dwa sąsiadujące boki DH' i H'F tego prostokąta są na pewno równe ponieważ są to przeciwprostokątne przystających trójkątów $\Delta ADH'$ i $\Delta H'EF$. Wynika więc stąd, że prostokąt ten musi być kwadratem.

#

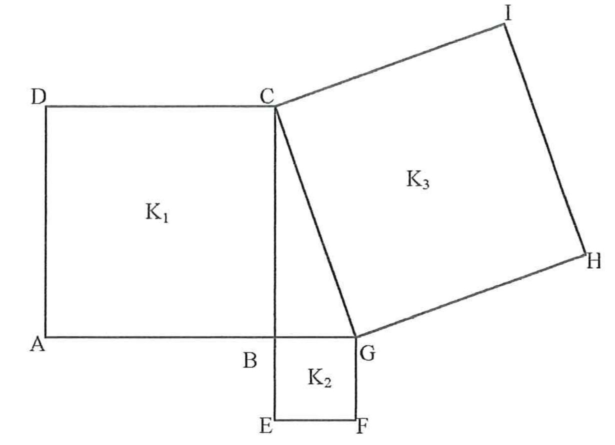
Udowodnijmy twierdzenie 4.3 w jeszcze inny sposób.

Dowód 2:

Ustawmy $K_1$ i $K_2$ w jak na rysunku 26. Ze sposobu ustawienia $\angle GBC = 90°$. Korzystając teraz z twierdzenia Pitagorasa mówiącego : *„Jeżeli trójkąt jest prostokątny to suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej"* pokazaliśmy, że jeżeli:

$P(K_1)$, $P(K_2)$ i $P(K_3)$ są odpowiednio polami kwadratów $K_1$, $K_2$ i $K_3$ i

$$P(K_1) + P(K_2) = P(K_3) \Leftrightarrow K_1 + K_2 \sim K_3$$




rys 26

#

Możemy już teraz udowodnić twierdzenie 4.1.

Dowód:

Podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2.11 dzielimy wielokąt W na trójkąty T. Na mocy twierdzenia 2.5 wiemy, że każdy z $T_i \sim R_i$ gdzie $R_i$ jest odpowiednio równoważnym przez rozkład równoległobokiem. Z wniosku 2.4 wiemy, że każdy z $R_i \sim P_i$ gdzie $P_i$ jest równoważnym przez rozkład prostokątem. Korzystając z twierdzeń 4.2 i 4.3 wiemy, że z każdego prostokąta mogę zbudować równoważny przez rozkład kwadrat, a każde dwa kwadraty zastąpić jednym równoważnym. Powtarzając tą czynność, zastępujemy sumę tych kwadratów jednym równoważnym przez rozkład.

#

## 4.1 Warunek konieczny równoważności przez rozkład dla figur wielokątnych.

Zacytujemy i udowodnimy twierdzenie, które jest warunkiem koniecznym i dostatecznym do tego aby figury wielokątne były równoważne przez rozkład.

Twierdzenie 4.4: (F.Bolyai i P.Gerwien)

*Figury wielokątne $F_1$ i $F_2$ są równoważne przez rozkład wtedy i tylko wtedy gdy mają równe pola:*

$$F_1 \sim F_2 \Leftrightarrow P(F_1) = P(F_2)$$

Dowód:

Udowodnijmy najpierw implikację w jedną stronę ($\Rightarrow$), tzn:

$$F_1 \sim F_2 \Rightarrow P(F_1) = P(F_2)$$

Ponieważ $F_1 \sim F_2$, to istnieją wielokąty $A_1 + A_2 + ... + A_m$ i $B_1 + B_2 + ... + B_m$, takie że

$$F_1 = A_1 + A_2 + ... + A_m \quad \text{i} \quad F_2 = B_1 + B_2 + ... + B_m, \text{ oraz } A_i = B_i.$$

Wiemy również, że jeżeli:

$$A_i = B_i \Rightarrow P(A_i) = P(B_i)$$

i

$$P(F_1) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_m) \quad \text{i} \quad P(F_2) = P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_m).$$

Więc:

$$F_1 \sim F_2 \Rightarrow A_1 + A_2 + ... + A_m \sim B_1 + B_2 + ... + B_m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_m) = P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_m) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(F_1) = P(F_2)$$

#

W drugą stronę dowód jest następujący ($\Leftarrow$):

$$P(F_1) = P(F_2) \Rightarrow F_1 \sim F_2$$

Przy dowodzie wykorzystamy fakt, że jeżeli dwa kwadraty mają równe pola to są przystające.

Niech $P(F_1) = P(K_1)$ i $P(F_2) = P(K_2)$, gdzie $K_1$ i $K_2$ są kwadratami odpowiednio równoważnymi: $F_1 \sim K_1$ i $F_2 \sim K_2$. Kwadraty takie istnieją, co wynika z twierdzenia 4.1.

Wówczas mamy:

$$P(F_1) = P(F_2) \Rightarrow P(K_1) = P(K_2) \Rightarrow K_1 \sim K_2 \Rightarrow F_1 \sim K_1 \sim K_2 \sim F_2 \Rightarrow F_1 \sim F_2$$

#

# 5. RÓWNOWAŻNOŚĆ WIELOŚCIANÓW PRZEZ ROZKŁAD.

W poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się równoważnością przez rozkład dla figur wielokątnych. W tym rozdziale spróbujemy nasze poprzednie rozważania rozszerzyć na wielościany. Pokażemy, że w odniesieniu do wielościanów sprawa nie jest tak oczywista jak dla figur wielokątnych. Tam dla równoważności wystarczyła równość pól, tutaj równość objętości to za mało, aby równoważność przez rozkład miała zawsze miejsce. Sprawa nie jest jednak całkiem tragiczna, gdyż istnieją pewne grupy wielościanów, dla których równość objętości jest wystarczającym warunkiem dla równoważności. Jest tak np. dla wszystkich graniastosłupów w tym także pochyłych. Dla reszty wielościanów przedstawimy dodatkowe warunki, poza równością objętości (równość objętości jest warunkiem koniecznym), dzięki którym będziemy w stanie stwierdzić, czy równoważność przez rozkład jest możliwa. Warunki takie sformułowane zostaną w twierdzeniu Dehna. Dowód pewnego szczególnego przypadku tego twierdzenia będzie przedstawiony w późniejszej części tego rozdziału.

## 5.1 Podstawowe własności wielościanów równoważnych przez rozkład.

Definicja 5.1:

*Dwa wielościany nazywamy równoważnymi przez rozkład wtedy i tylko wtedy, gdy można je podzielić na jednakową liczbę wielościanów odpowiednio do siebie przystających.*[4]

Warunek 5.2:

*Aby dwa wielościany były przystające, musza mieć wszystkie ściany i wszystkie kąty bryłowe odpowiednio przystające i ściany muszą następować po sobie w tym samym porządku.*[5]

Zdanie: „Wielościan $W_1$ jest równoważny przez rozkład wielościanowi $W_2$" zapisujemy:

$$W_1 \sim W_2$$

Podobnie jak dla wielokątów (rozdział 2.1) sprawdzamy, że relacja spełniająca poniższe warunki jest równoważnością, tzn. że:

Dla dowolnych wielościanów $W_1$, $W_2$ i $W_3$ mamy:

$$W_1 \sim W_2 \text{ i } W_2 \sim W_3 \Rightarrow W_1 \sim W_3 \tag{7}$$

czyli relacja ta jest przechodnia;

$$W_1 \sim W_2 \Rightarrow W_2 \sim W_1 \tag{8}$$

czyli relacja ta jest symetryczna;

$$W_1 \sim W_1 \tag{9}$$

czyli relacja ta jest zwrotna.

Podobnie można uogólnić własności (4) i (5), a mianowicie:

a) jeżeli wielościany $W_1$ i $W_2$ są do siebie przystające to są równoważne przez rozkład

$$W_1 = W_2 \Rightarrow W_1 \sim W_2 \tag{10}$$

b) sumy wielościanów rozłącznych odpowiednio sobie równoważnych przez rozkład są równoważne przez rozkład, czyli:

jeżeli $W_1$, $W_2$, $W_3$ i $W_4$ są wielościanami i

$$W_1 \sim W_3 \text{ i } W_2 \sim W_4$$

to

$$W_1 + W_2 \sim W_3 + W_4 \tag{11}$$

Prawdziwe są również własności dotyczące objętości wielościanów:

a) Jeśli wielościany $W_1$ i $W_2$ są rozłącznymi wielościanami to objętość ich sumy jest równa sumie ich objętości;

$$V(W_1 \cup W_2) = V(W_1) + V(W_2) \tag{12}$$

b) Jeśli wielościany $W_1$ i $W_2$ są przystające to mają równą objętość;

$$W_1 = W_2 \Rightarrow V(W_1) = V(W_2) \tag{13}$$

## 5.2 Równoważność przez rozkład dla graniastosłupów.

W podrozdziale tym pokażemy, że równoważność przez rozkład w odniesieniu do graniastosłupów jest dokładnym uogólnieniem równoważności dla wielokątów. Pokażemy również, że równość objętości jest warunkiem koniecznym i dostatecznym do tego, aby dwa graniastosłupy mogły być równoważne przez rozkład.

### 5.2.1 Równoważność przez rozkład dla równoległościanów o przystających podstawach i równych wysokościach.

Twierdzenie 5.3:

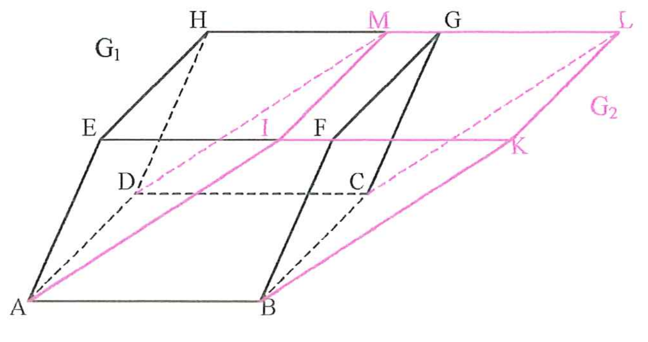
*Dwa równoległościany o przystających podstawach i równych wysokościach są równoważne przez rozkład.*

Dowód:

Dla ułatwienia umieszczamy oba równoległościany na jednej podstawie. Rozpatrzymy trzy przypadki:

Przypadek 1.

Górne podstawy zachodzą na siebie jak na rysunku 27.




rys 27

$$ABCD\ EFGH = ABCD\ IFGM + AD\ EIMH = G_1$$

$$ABCD\ IKLM = ABCD\ IFGM + BC\ FKLG = G_2$$

Z rysunku widać, że wielościan ABCD IFGM jest częścią wspólną obu równoległościanów. Dla równoważności $G_1$ i $G_2$ wystarczy pokazać przystawanie wielościanów AD EIMH i BC FKLG. Pokażemy teraz, że AD EIMH przystaje do BC FKLG ponieważ:

$$EIMH + IFGM = EFGH = IKLM = IFGM + FKLG \Rightarrow EIMH = FKLG$$

$$AIE = BKF \text{ i } DMH = CLG \quad \text{(dowód tw. 2.3)}$$

$$ADHE = BCGF \text{ i } ADMI = BCLK \quad \text{(z własności budowy równoległościanów).}$$

Czyli odpowiednie ściany są przystające i następują w takiej samej kolejności, a to wystarczy aby graniastosłupy AD EIMH i BC FKLG były przystające.

Więc na mocy definicji równoważności przez rozkład wynika, że:

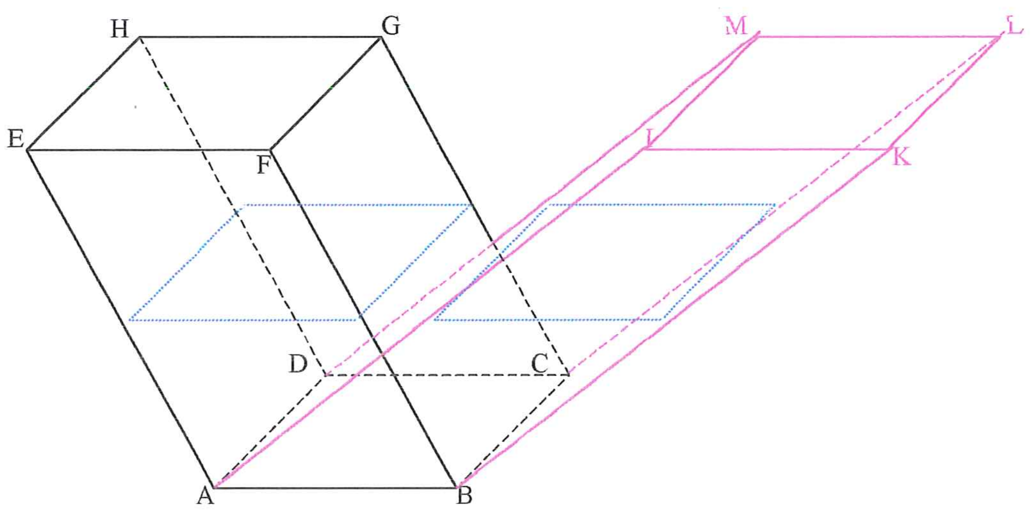
$$ABCD\ EFGH = ABCD\ IFGH + AD\ EIMH = ABCD\ IFGH + BC\ FKLG = ABCD\ IKLM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ABCD\ EFGH \sim ABCD\ IKLM$$

#

Przypadek 2.

Górne podstawy nie zachodzą na siebie, ale są położone między prostymi równoległymi (rysunek28).




rys 28

Przy dowodzie tego przypadku wykorzystamy dowód twierdzenia 2.3 (przypadek 2), postępując w sposób analogiczny, z tym tylko, że nie dzielimy prostą, ale płaszczyzną równoległą i równoodległą od podstaw. Działanie to powtarzamy aż górne podstawy pokryją się, co sprowadzi ten przypadek do poprzedniego, czyli:

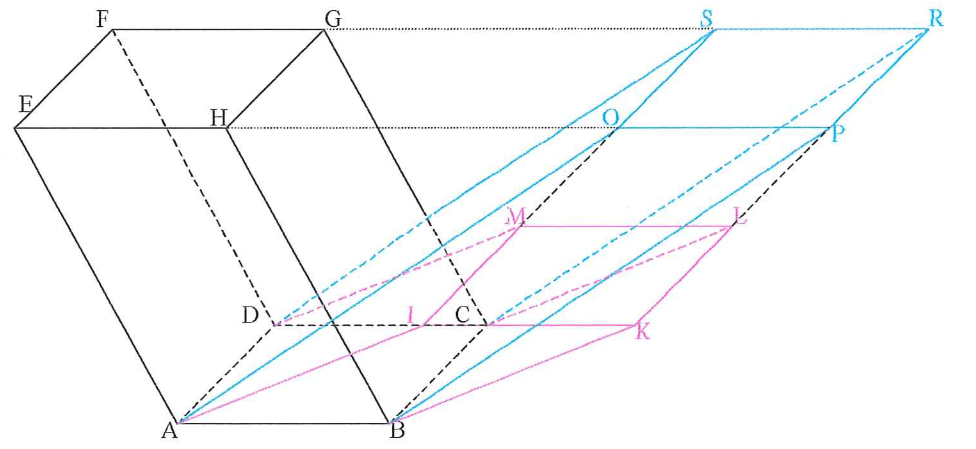
$$ABCD\ EFGH \sim ABCD\ IKLM.$$

Przypadek 3.

Górne podstawy nie zachodzą na siebie i nie są położone między prostymi równoległymi (rysunek 29[6]).

W tym przypadku aby pokazać równoważność równoległościanów ABCD EFGH i ABCD IKLM wprowadzimy równoległościan pomocniczy ABCD OPRS.

Na mocy prawdziwości przypadku 2 widać, że:



rys 29

$$ABCD\ EFGH \sim ABCD\ OPRS,$$

i

$$ABCD\ OPRS \sim ABCD\ IKLM$$

więc na mocy własności (7)

$$ABCD\ EFGH \sim ABCD\ IKLM$$

#

Wniosek 5.4:

*Każdy równoległościan jest równoważny przez rozkład graniastosłupowi prostemu o przystającej podstawie i równej wysokości.*

## 5.2.2 Równoważność przez rozkład dla graniastosłupów o przystających podstawach i równych wysokościach.

Twierdzenie 5.5:

*Dla każdego graniastosłupa istnieje równoważny przez rozkład graniastosłup prosty o przystającej podstawie i równej wysokości.*

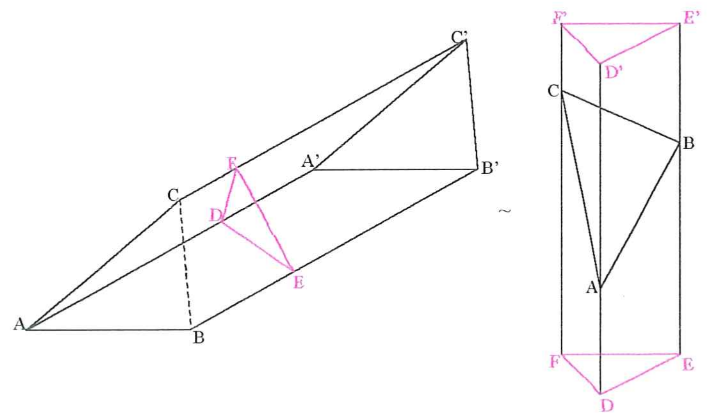
Udowodnijmy najpierw twierdzenie pomocnicze.

Twierdzenie 5.6:

*Graniastosłup trójkątny jest orientowalnie równoważny przez rozkład, tzn. jest równoważny przez rozkład graniastosłupowi, który jest jego odbiciem lustrzanym.*

Dowód:

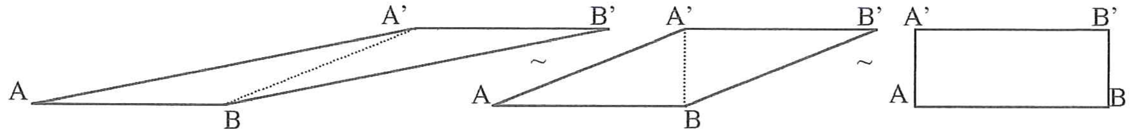
Wiadomo, że w każdym graniastosłupie (także pochyłym), wszystkie krawędzie łączące podstawy są równoległe (ponieważ ścianami bocznymi są prostokąty lub równoległoboki). Istnieje więc płaszczyzna, do której te krawędzie są prostopadłe.



rys 30

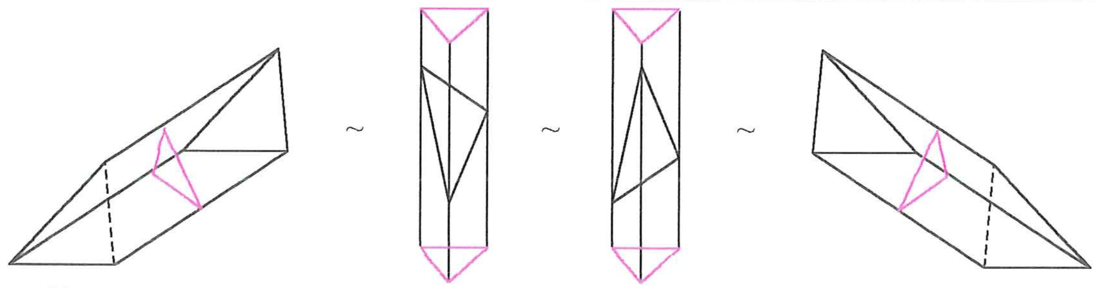
Wyznaczamy punkty DEF powstałe z przecięcia graniastosłupa z taką właśnie płaszczyzną. Powstałe w ten sposób wielościany po przestawieniu (rysunek 30) utworzą nam równoważny przez rozkład graniastosłup prosty.

Warto tu jeszcze zauważyć, że niezależnie do tego jak wybierzemy punkty DEF (warunek jest tylko taki, aby leżały na krawędziach łączących podstawy), to rozcinając ten graniastosłup płaszczyzna przechodzącą przez te punkty, a następnie odpowiednio przestawiając powstałe wielościany otrzymamy graniastosłup (najprawdopodobniej pochyły) równoważny przez rozkład graniastosłupowi wyjściowemu. Może się bowiem okazać, że na nie uda nam się znaleźć płaszczyzny, która będzie jednocześnie przecinała pod kątem prostym wszystkie krawędzie ścian bocznych. Możemy wówczas prostować graniastosłup „na raty".




rys 31

Wybieramy sobie jedną ze ścian graniastosłupa np. ABB'A' i przekształcamy ten graniastosłup tak, aby ta ściana stała się prostokątem. Za każdym razem rozcinamy graniastosłup płaszczyzną przechodzącą przez punkty DE (w tym przypadku pokrywają się one odpowiednio z punktami B i A'), i punkt F, który leży w dowolnym miejscu na krawędzi CC', a następnie przestawiamy powstałe wielościany uzyskując równoważny graniastosłup. Czynność tą powtarzamy aż do skutku. Następnie wybieramy którąś z dwóch pozostałych płaszczyzn i postępujemy z nią w analogiczny sposób, z tym tylko, że



rys 32

punkty DE muszą już leżeć na odcinku równoległym do AB.

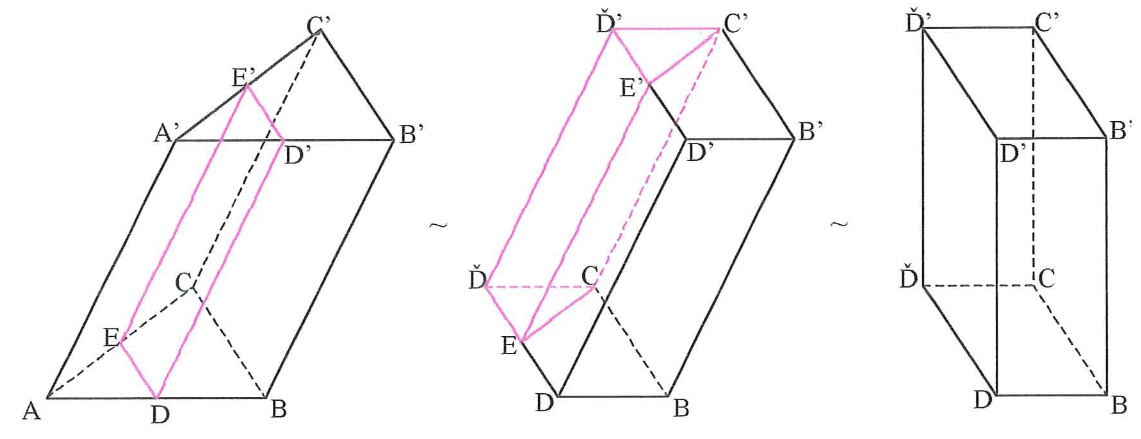
Pokazaliśmy w ten sposób, że każdy graniastosłup o podstawie trójkąta można równoważnie przez rozkład wyprostować. Następnie postępujemy z naszym wyprostowanym graniastosłupem w analogiczny sposób, z tą różnicą, że robimy to w drugą stronę. Otrzymamy w ten sposób graniastosłup, który jest odbiciem lustrzanym wyjściowego graniastosłupa i dodatkowo jest tak samo zorientowany jak graniastosłup wyjściowy.

#

Możemy teraz już udowodnić twierdzenie 5.5.

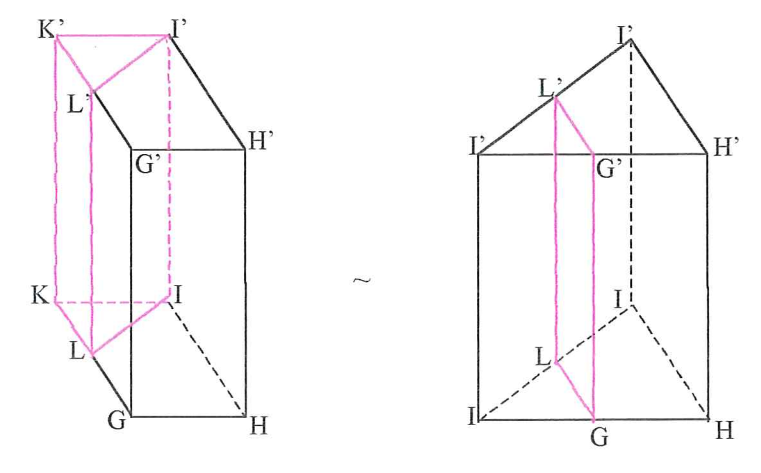
Dowód:

Na początek pokażemy to dla graniastosłupów o podstawie trójkątnej. Rozcinamy graniastosłup ABC A'B'C' jak na rysunku 33.




rys 33

Następnie graniastosłup ADE A'D'E' „zamieniamy" na graniastosłup, który jest do niego przystający, lecz jest inaczej zorientowany (jest jego odbiciem lustrzanym). Przestawiamy ten nowy graniastosłup CĎE C'Ď'E' tak aby powstał równoległościan. Nie trudno zauważyć, że wyjściowy graniastosłup i powstały równoległościan są równoważne przez rozkład, ponieważ składają się z wielościanów odpowiednio do siebie przystających (pomimo, że nie wszystkie są tak samo zorientowane). Dalej na mocy wniosku 5.4 wiemy, że tak powstały równoległościan jest równoważny przez rozkład graniastosłupowi prostemu o przystającej podstawie i równej wysokości. Tak otrzymany graniastosłup




rys 34

rozcinamy tak jak na rysunku 34. Cięcie to jest analogiczne do cięcia w pierwszym kroku.

Otrzymaliśmy w ten sposób graniastosłup trójkątny prosty ĬHI Ĭ'H'I' równoważny przez rozkład graniastosłupowi ABCA'B'C'.

Warto zwrócić uwagą na to, że wszystkie dotychczasowe dowody nie wymagały zmiany orientacji żadnego z „kawałków" wielościanu (było tak również dla figur płaskich).

Zastanówmy się, czy gdyby wzmocnić warunki, które muszą być spełnione aby dwa wielościany mogły być przystające o to, aby dało się je w przestrzeni trójwymiarowej „nałożyć na siebie", to czy również wtedy istniałby podział graniastosłupa trójkątnego na równoważny mu równoległościan? Korzystając z twierdzenia 5.6 odpowiedź jest natychmiastowa. Sposób rozumowania jest taki jak wyżej, z tą różnicą, że graniastosłup ADEA'D'E' zamieniamy tak jak przy dowodzie twierdzenia 5.6.

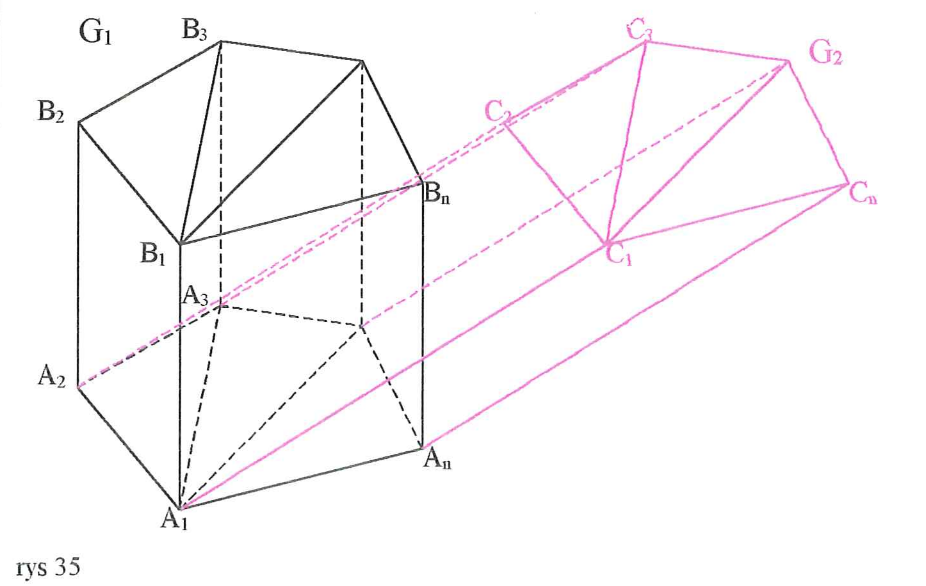
Uogólnimy to teraz na graniastosłup o dowolnej podstawie.

Dzielimy podstawy graniastosłupa na parami przystające trójkąty, a następnie rozcinamy graniastosłup płaszczyznami przechodzącymi przez boki odpowiednich trójkątów (rysunek 35).

$$A_1A_2A_3\, B_1B_2B_3 + A_1A_3A_4\, B_1B_3B_4 + \ldots + A_1A_{n-1}A_n\, B_1B_{n-1}B_n = G_1$$

analogicznie

$$A_1A_2A_3\, C_1C_2C_3 + A_1A_3A_4\, C_1C_3C_4 + \ldots + A_1A_{n-1}A_n\, C_1C_{n-1}C_n = G_2$$




rys 35

Na mocy twierdzenia 5.5 mamy:

$$A_1A_2A_3\ B_1B_2B_3 \sim A_1A_2A_3\ C_1C_2C_3$$

$$A_1A_3A_4\ B_1B_3B_4 \sim A_1A_3A_4\ C_1C_3C_4$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots$$

$$A_1A_{n-1}A_n\ B_1B_{n-1}B_n \sim A_1A_{n-1}A_n\ C_1C_{n-1}C_n$$

czyli na mocy własności (11)

$$G_1 = A_1A_2A_3\ B_1B_2B_3 + A_1A_3A_4\ B_1B_3B_4 + \ldots + A_1A_{n-1}A_n\ B_1B_{n-1}B_n \sim$$

$$\sim A_1A_2A_3\ C_1C_2C_3 + A_1A_3A_4\ C_1C_3C_4 + \ldots + A_1A_{n-1}A_n\ C_1C_{n-1}C_n = G_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_1 \sim G_2.$$

#

Oznacza to, że każdy graniastosłup można równoważnie przez rozkład „wyprostować".

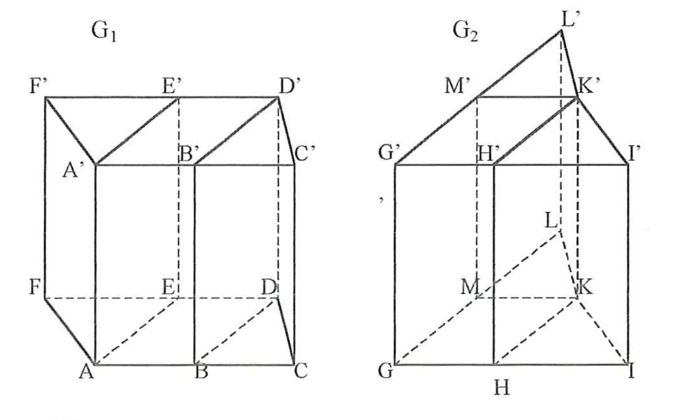
## 5.2.3 Równoważność przez rozkład dla graniastosłupów o równoważnych przez rozkład podstawach i równych wysokościach.

Twierdzenie 5.7:

*Każde dwa graniastosłupy o równoważnych przez rozkład podstawach i równych wysokościach są równoważne przez rozkład.*

Dowód:

Opierając się na twierdzeniu 5.5 czyli wiedząc, że każdy graniastosłup można wyprostować ograniczymy się do graniastosłupów prostych. Na mocy definicji 2.1 wiemy, że jeżeli wielokąty są równoważne przez rozkład (w tym przypadku podstawy) to można je podzielić na jednakową liczbę odpowiednio przystających wielokątów.



rys 36

Rozcinając następnie nasze graniastosłupy $G_1$ i $G_2$ płaszczyznami prostopadłymi do podstaw i przechodzącymi przez linie podziału, otrzymujemy graniastosłupy, które są odpowiednio do siebie przystające na mocy warunku 5.2, a więc:

AEF A'E'F' ~ HIK H'I'K'

ABDE A'B'D'E' ~ GHKM G'H'K'M'

i

BCD B'C'D' ~ MKL M'K'L'.

Więc na mocy definicji 5.1 wiemy, że:

ACDF A'C'D'F' ~ GIKLM G'I'K'L'M'

#

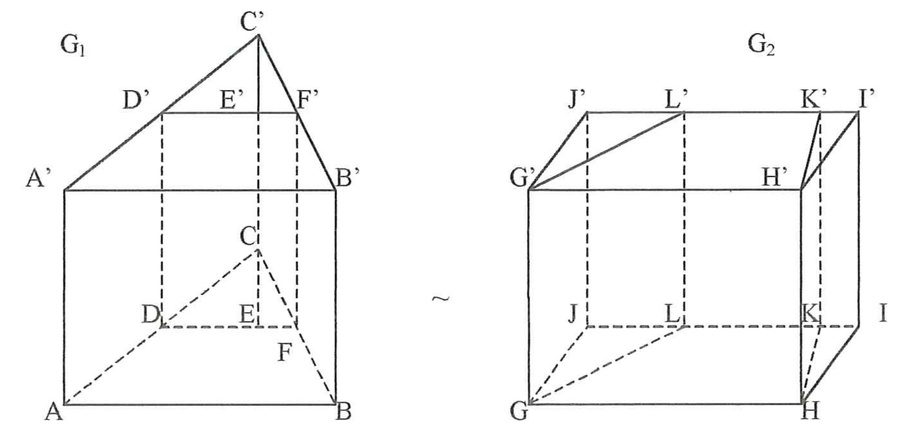
## 5.2.4 Równoważność przez rozkład dla graniastosłupów trójkątnych i prostopadłościanów

Twierdzenie 5.8:

*Dla każdego graniastosłupa trójkątnego istnieje równoważny przez rozkład prostopadłościan o równym polu podstawy i równej wysokości.*

Dowód:

Dowód jest analogiczny jak w twierdzeniu 5.7.




rys 37

$$ABFD\ A'B'F'D' = GHKL\ G'H'K'L'$$

$$DEC\ D'E'C' = GLJ\ G'L'J'$$

$$EFC\ E'F'C' = HIK\ H'I'K'$$

$$G_1 = ABFD\ A'B'F'D' + DEC\ D'E'C' + EFC\ E'F'C' \sim$$

$$\sim GHKL\ G'H'K'L' + GLJ\ G'L'J' + HIK\ H'I'K' = G_2 \Rightarrow G_1 \sim G_2$$

#

## 5.2.5 Zasadnicze twierdzenie o graniastosłupach równoważnych przez rozkład.

Twierdzenie 5.9:

*Dwa graniastosłupy są równoważne przez rozkład wtedy i tylko wtedy gdy mają równe objętości.*

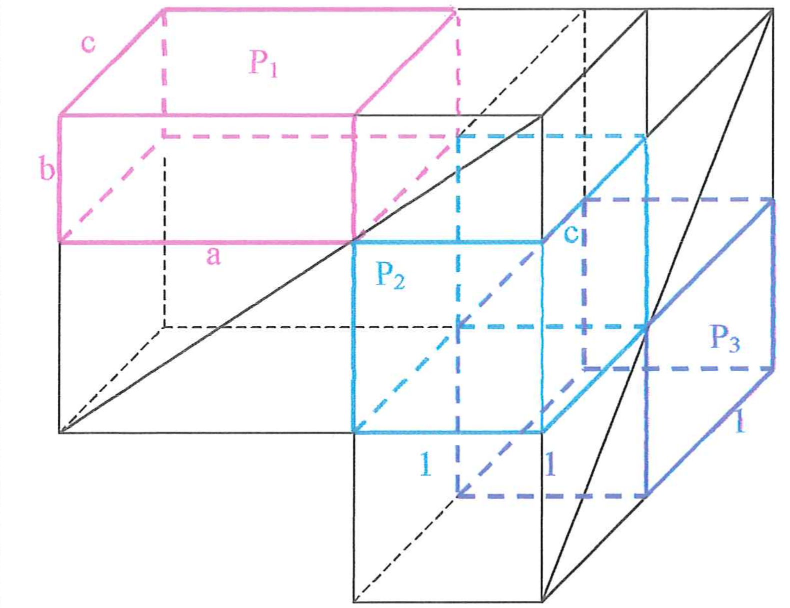
Przed przystąpieniem do dowodu zasadniczego twierdzenia udowodnimy sobie twierdzenia, które będą twierdzeniami pomocniczymi przy dowodzie twierdzenia 5.9.

Twierdzenie 5.10:

*Dla każdego prostopadłościanu istnieje równoważny przez rozkład prostopadłościan, taki którego dwa doki są równe jednostce długości.*

Dowód:

W dowodzie tego twierdzenia wykorzystamy dowód 1 analogicznego twierdzenia na płaszczyźnie, czyli twierdzenia 2.10. Prostopadłościany $P_1$ i $P_2$ mają równą wysokość *c* i równoważne przez rozkład podstawy (twierdzenie 2.10) więc na mocy twierdzenia 5.5 prostopadłościany $P_1$ i $P_2$ są równoważne przez rozkład. Prostopadłościan $P_2$ został tak dobrany aby jeden z boków był równy jednostce długości. W zupełnie analogiczny sposób uzasadniamy równoważność przez rozkład prostopadłościanów $P_2$ i $P_3$.



rys 38

Na mocy własności (7) mamy:

$$P_1 \sim P_2 \text{ i } P_2 \sim P_3 \Rightarrow P_1 \sim P_3.$$

#

Drugie twierdzenie, jest uogólnieniem powyższego twierdzenia, a mianowicie:

Twierdzenie 5.11:

*Dla każdego graniastosłupa istnieje równoważny przez rozkład prostopadłościan, taki którego dwa boki są równe jednostce długości.*

Dowód:

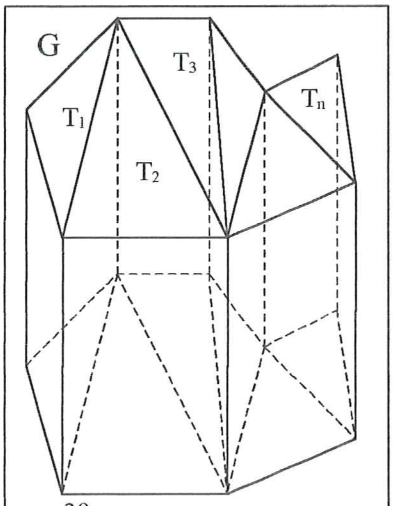
Dzielimy podstawę na trójkąty, a następnie płaszczyznami prostopadłymi do podstawy rozcinamy graniastosłup na graniastosłupy trójkątne. Każdy graniastosłup $T_i$ przekształcamy równoważnie na prostopadłościan $R_i$, a ten na prostopadłościan o dwóch bokach równych jednostce długości $P_i$ (twierdzenia 5.8 i 5.10), czyli:

$G = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$, gdzie $T_i$ – graniastosłupy trójkątne.

$T_i \sim R_i$ gdzie $R_i$ - prostopadłościan (twierdzenie 5.8)

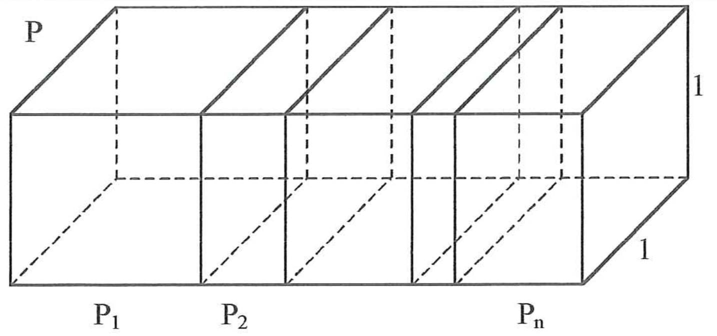
$R_i \sim P_i$ gdzie $P_i$ - prostopadłościan o dwóch bokach równych 1.

$T_i \sim R_i \sim P_i \Rightarrow T_i \sim P_i$



rys 39

$$G = T_1 + T_2 + \ldots + T_n \sim P_1 + P_2 + \ldots + P_n = P$$




rys 40

#

Możemy już teraz przystąpić do udowodnienia zasadniczego twierdzenia o graniastosłupach równoważnych przez rozkład.

Dowód:

Rozbijmy dowód tego twierdzenia na dwie części:

1) *Jeżeli $G_1$ i $G_2$ są równoważne przez rozkład, to mają równe objętości.*

Dowód:

Graniastosłup $G_1$ rozkłada się na $K_1, K_2, \ldots, K_n$, a $G_2$ na $M_1, M_2, \ldots, M_n$ graniastosłupów, ale $G_1$ i $G_2$ są z założenia równoważne przez rozkład więc na mocy definicji 5.1 $K_i$ musi być przystające do $M_i$. Z własności (13) wiemy, że $V(K_i) = V(M_i)$, a z własności (12) wiadomo, że:

$$V(G_1) = V(K_1) + V(K_2) + \ldots + V(K_n) = V(M_1) + V(M_2) + \ldots + V(M_n) = V(G_2) \Rightarrow V(G_1) = V(G_2)$$

#

2) *Jeżeli $G_1$ i $G_2$ mają równe objętości, to są równoważne przez rozkład.*

Dowód:

Oznaczmy przez $v$ objętość graniastosłupa wyjściowego. Niech $G_1 \sim P_1$ i $G_2 \sim P_2$ gdzie $P_1$ i $P_2$ mają po dwa boki równe jednostce długości. Ponieważ $G_1$ jest równoważne $P_1$ to mają równe objętości, wynika stąd, że $P_1$ ma wymiary $1 \times 1 \times v$, ale $G_1$ i $G_2$ mają z założenia równe objętości, więc $P_2$ ma takie same wymiary jak $P_1$. Jeżeli dwa prostopadłościany mają równych długości krawędzie, to są przystające, a co za tym idzie są równoważne przez rozkład.

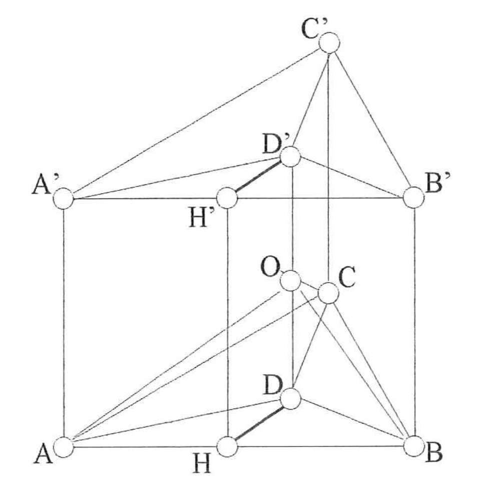
#

## 5.3 Warunek konieczny równoważności wielościanów.

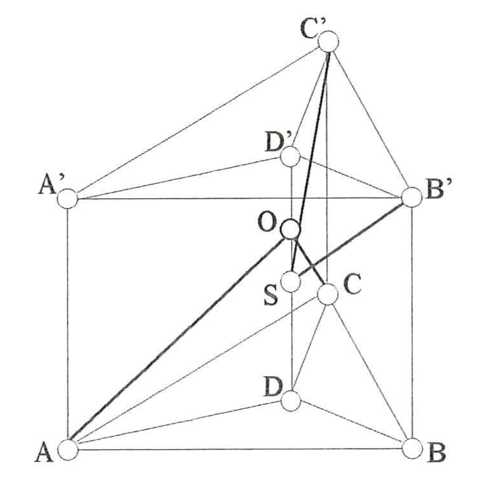
Wiemy, że wszystkie dowody wzoru na objętość czworościanu opierają się na teorii granic. Nie potrafimy przez rozkład przekształcić dowolnego czworościanu na równoważny mu prostopadłościan po to żeby obliczyć jego objętość elementarnymi metodami. Na pytanie kiedy dwa wielościany są równoważne przez rozkład odpowiedział M.Dehn. Postaramy się omówić warunek Dehna (w pewnym szczególnym przypadku), jaki musi być spełniony, aby dwa wielościany mogły być równoważne przez rozkład.
Dla uproszczenia zapisu w dalszej części tego rozdziału wielościany, które powstały z podziału wielościanu wyjściowego będziemy nazywać bryłkami.

Narzućmy następujące ograniczenie, które jest o tyle istotne, że dzięki niemu udowodnimy twierdzenie trochę słabsze od twierdzenia Dehna. Pełnego twierdzenia Dehna nie będziemy dowodzić.
Zakładamy, że w każdym z równoważnych przez rozkład wielościanów $W_1$ i $W_2$ krawędzie bryłek, z których wielościany wyjściowe są zbudowane tworzą pewną sieć (rysunek 41). Sieć ta jest o tyle specyficzna, że każde dwie bryłki, które mają wspólny punkt wewnętrzny jakiejś krawędzi to mają wspólną całą krawędź. Rysunek 42 pokazuje sytuację, w której ten warunek nie jest spełniony, ponieważ np. dla wielościanów ABDO i B'C'D'S krawędzie DO i SD' tylko częściowo zachodzą na siebie, co jest niezgodne z założeniem.

Przy tak przyjętym ograniczeniu możemy udowodnić pierwsze twierdzenie pomocnicze Dehna.



rys 41



rys 42

Twierdzenie 5.12:

*Jeżeli wielościany $W_1$ i $W_2$ są równoważne przez rozkład. Krawędzie wielościanów, z których są zbudowane wielościany $W_1$ i $W_2$, tworzą sieć w każdym z tych wielościanów; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ są miarami kątów dwuściennych wielościanu $W_1$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ są miarami kątów dwuściennych wielościanu $W_2$; to istnieją liczby naturalne $n_1, n_2, \dots, n_m, l_1, l_2, \dots, l_k, s$ i $p$ takie, że spełniona jest równość:*

$$N_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \dots + n_m\alpha_m + s \cdot \pi = l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \dots + l_k\beta_k + p \cdot \pi \qquad (14)$$

Dowód:

Rozpatrzmy jeden z wielościanów. Z założenia wiemy, że bryłki, z których jest on zbudowany, schodzą się wzdłuż całych krawędzi. Mamy więc do rozpatrzenia trzy przypadki.

Przypadek 1.

*Wspólna krawędź bryłek leży we wnętrzu wielościanu.*

Jak łatwo zauważyć na rysunku 41 bryłki schodzące się wzdłuż odcinka DO, tworzą w sumie kąt pełny. Suma miary kątów dwuściennych schodzących wzdłuż tej krawędzi wynosi $2\pi$. Więc suma miar kątów dwuściennych w całym wielościanie schodzących się wzdłuż odcinków leżących we wnętrzu wielościanu wynosi całkowitą wielokrotność kąta $2\pi$.

Przypadek 2.

*Wspólna krawędź bryłek leży na ścianie wielościanu.*

Na rysunku 41 widać, że kąty dwuścienne bryłek schodzących się wzdłuż krawędzi HH', a leżącej na ścianie wielościanu tworzą w sumie kąt półpełny, suma ich miar wynosi więc $\pi$. Więc suma miary wszystkich kątów dwuściennych schodzących się wzdłuż krawędzi leżących na ścianach wielościanów wynosi całkowitą wielokrotność kąta $\pi$.

Przypadek 3.

*Wspólna krawędź bryłek leży na krawędzi wielościanu.*

Na rysunku 41 widzimy również bryłki, których wspólna krawędź leży na krawędzi wielościanu. Rozpatrzmy krawędź AA' i przyjmijmy, że kąt dwuścienny przy tej krawędzi wynosi $\alpha_1$. Kąty dwuścienne bryłek AHDA'H'D' i ADCA'D'C' tworzą w sumie kąt $\alpha_1$.

Zauważmy jeszcze, że np. wzdłuż krawędzi AB schodzi się więcej niż jedna „warstwa" bryłek (na tym rysunku są dwie). Więc jeżeli kąt dwuścienny przy tej krawędzi wynosi $\alpha_2$ to suma wszystkich kątów dwuściennych przylegających do tej krawędzi $2\cdot \alpha_2$, a ogólniej $n_2 \cdot \alpha_2$. Jeżeli powtórzymy to rozumowanie względem każdej krawędzi, to otrzymamy, że suma miar wszystkich kątów dwuściennych, przylegających do krawędzi wielościanu wynosi:

$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_n\alpha_n$, gdzie $n_1, n_2, \ldots, n_n$ oznaczają liczby naturalne.

Zatem suma miar wszystkich kątów dwuściennych wszystkich bryłek, z których zbudowany jest wielościan wynosi:

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_n\alpha_n + s\pi.$$

To samo rozumowanie możemy powtórzyć względem drugiego wielościanu i otrzymamy, że suma miar wszystkich kątów dwuściennych w tym wielościanie wynosi:

$l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \ldots + l_m\beta_m + p\pi$, gdzie $l_1, l_2, \ldots, l_m$ oznaczają liczby naturalne.

Ponieważ te dwa wielościany są równoważne przez rozkład to na mocy definicji są zbudowane z tych samych bryłek, więc:

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_n\alpha_n + s\pi = l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + \ldots + l_m\beta_m + p\pi.$$

#

Udowodnimy jeszcze drugie twierdzenie pomocnicze do twierdzenia Dehna.

Twierdzenie 5.13:

*Jeżeli* $\alpha$ *oznacza miarę kąta dwuściennego w czworościanie foremnym i* $n$ *jest dowolną liczbą naturalną, to* $\cos n\alpha$ *jest ułamkiem nieskracalnym postaci* $A \cdot 3^{-n}$.

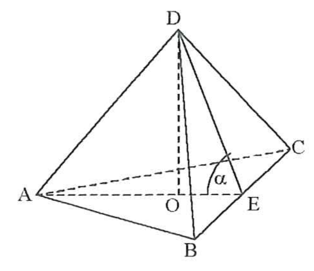
Dowód:

Przy dowodzie wykorzystamy twierdzenie, które jest równoważne zasadzie indukcji matematycznej:

Jeżeli jakieś twierdzenie, w których jest mowa o liczbach naturalnych, jest prawdziwe dla liczb 1 i 2, i jeżeli z tego, że twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnych liczb naturalnych $n$ i $n+1$, wynika, że jest ono prawdziwe dla liczby $n+2$, to twierdzenie jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej.

Sprawdźmy, że twierdzenie to jest prawdziwe dla $n = 1$ i dla $n = 2$.

a) Obliczamy cos $\alpha$ . AE i DE są wysokościami ścian czworościanu ABCD. OE = $\frac{1}{3}$AE, ale AE = DE więc OE = $\frac{1}{3}$DE. Wynika stąd, że $\cos\alpha = \frac{OE}{DE} = \frac{\frac{1}{3}DE}{DE} = \frac{1}{3}$,



rys 43

czyli $\cos\alpha = \frac{A}{3^1}$, gdzie A = 1.

b) Obliczamy $\cos 2\alpha$.

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}$, czyli $\cos 2\alpha = \frac{A}{3^2}$, gdzie A = –7.

Zastosujmy teraz wzór:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos(n+2)\alpha + \cos n\alpha = 2\cos(n+1)\alpha\cos\alpha$$

stąd

$$\cos(n+2)\alpha = 2\cos(n+1)\alpha\cos\alpha - \cos n\alpha$$

Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla liczb naturalnych $n$ i $n + 1$, tzn. że:

$$\cos n\alpha = \frac{B}{3^n} \quad \text{i} \quad \cos(n+1)\alpha = \frac{C}{3^{n+1}}$$

gdzie B i C oznaczają liczby naturalne niepodzielne przez 3.

Mamy więc:

$$\cos(n+2)\alpha = 2\cdot\frac{C}{3^{n+1}}\cdot\frac{1}{3} - \frac{B}{3^n}$$

czyli

$$\cos(n+2)\alpha = \frac{2C - 9B}{3^{n+2}}$$

Ponieważ C jest niepodzielne przez 3, więc 2C jest niepodzielne przez 3, ale 9B jest podzielne przez 3. Wobec tego różnica A = 2C – 9B nie jest podzielna przez 3.

Stąd:

$$\cos(n+2)\alpha = \frac{A}{3^{n+2}}$$

Twierdzenie Dehna:

*Czworościan foremny i prostopadłościan nie są równoważne przez rozkład.*

Przed przystąpieniem do dowodu warto przypomnieć, że nasze ograniczenia o podziale wielościanu w specyficzną sieć jest dalej aktualne. W przypadku ogólnym czworościan foremny też nie jest równoważny przez rozkład prostopadłościanowi.

Dowód:

W dowodzie wykażemy, że warunek (14) nie jest spełniony.

Czworościan foremny na 6 równych kątów dwuściennych: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_6 = \alpha$, a prostopadłościan ma 12 równych kątów dwuściennych $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{12} = \frac{\pi}{2}$.

W tym przypadku warunek 14 przybiera postać:

$$n\alpha + s\pi = l \cdot \frac{\pi}{2} + p\pi, \text{ gdzie } n, l, s \text{ i } p \text{ oznaczają liczby naturalne}$$

$$n\alpha = (l + 2p - 2s)\, \frac{\pi}{2}.$$

Wprowadźmy oznaczenie pomocnicze: $q = l + 2p - 2s$, gdzie q jest liczbą całkowitą.

Otrzymaliśmy więc:

$$n\alpha = q\, \frac{\pi}{2}.$$

Czworościan foremny i prostopadłościan byłby równoważny wtedy gdyby jakaś całkowita wielokrotność kąta dwuściennego czworościanu była jednocześnie wielokrotnością kąta prostego. Na mocy drugiego twierdzenia pomocniczego wiemy, że dla każdego $k$ całkowitego prawdziwe są równości:

$$\cos(4k)\cdot\frac{\pi}{2} = 1,\ \cos(4k+1)\cdot\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos(4k+2)\cdot\frac{\pi}{2} = -1,\ \cos(4k+3)\cdot\frac{\pi}{2} = 0$$

Równość $n\alpha = q\,\frac{\pi}{2}$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy gdy:

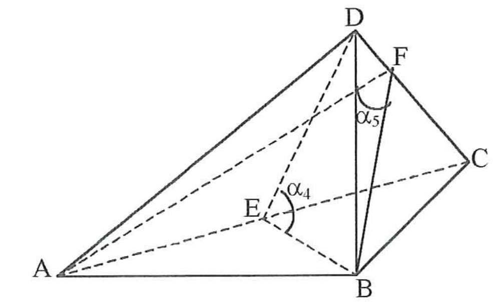
$$\cos n\alpha = 0,\ \cos n\alpha = 1 \text{ lub } \cos n\alpha = -1.$$

Wiemy również , że dla każdego $n$ naturalnego $\cos(n\alpha) = \frac{A}{3}$, gdzie A jest liczbą niepodzielną przez 3. Zatem cos $n\alpha$ nie może być liczbą całkowitą. Ponieważ warunek(14) nie jest spełniony, więc czworościan nie może być równoważny przez rozkład prostopadłościanowi.

#

## 5.3.1 Specjalny czworościan Hill'a.

Pokazaliśmy wcześniej, że istnieją czworościany, które nie są równoważne przez rozkład prostopadłościanowi. Nie jest tak jednak zawsze, gdyż są całe rodziny czworościanów równoważnych prostopadłościanowi. Omówimy teraz jeden z takich czworościanów. Będzie nim tzw. specjalny czworościan Hill'a.




rys 44

Oznaczmy przez $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... , $\alpha_6$ miary kątów dwuściennych, a przez $n_1$, $n_2$, ..., $n_6$ i $q$ pewne liczby naturalne. Pokażemy, że czworościan ten spełnia warunek (14), który w tym przypadku przybiera postać:

$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_6\alpha_6 = q \cdot \frac{\pi}{2}$$

Z założenia jest to czworościan trójprostokątny, w którym kąty $\alpha_1$ przy krawędzi DB, $\alpha_2$ przy krawędzi AB i $\alpha_3$ przy krawędzi BC są proste, krawędzie AB i BC są równe i wynoszą $\sqrt{2}$, a krawędź DB jest równa 1 i punkt E dzieli krawędź AC na dwie równe części. Długość pozostałych krawędzi obliczamy z twierdzenia Pitagorasa, czyli:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3},$$

$$CD^2 = BC^2 + BD^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3},$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow AC = 2,$$

Wysokość trójkąta ABC jest równa: BE = ½ AC = 1. Wynika stąd, że trójkąt BDE jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, w którym kąt $\angle BED = \alpha_4 = \frac{\pi}{4}$.

Przecinamy czworościan płaszczyzną ABF prostopadłą do krawędzi DC. Powstały w ten sposób trójkąt ABF jest prostokątny ponieważ krawędź AB jest prostopadła do ściany

BCD. Przez $\alpha_5$ oznaczmy $\angle AFB$. Przy pomocy twierdzenia Talesa obliczamy długości odcinków BF i AF:

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BF}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow BF = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{AF}{AC} = \frac{DE}{DC} \Rightarrow \frac{AF}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow AF = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Obliczmy jeszcze miarę kąta $\alpha_5$:

$$\cos\alpha_5 = \frac{BF}{AF} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}; \qquad \text{czyli} \quad \alpha_5 = \frac{\pi}{3}$$

Musimy jeszcze dobrać liczby $n_1, n_2, \ldots, n_6$ tak aby wyrażenie $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_6\alpha_6$ było całkowitą wielokrotnością kąta $\frac{\pi}{2}$, czyli:

$$n_1\frac{\pi}{2} + n_2\frac{\pi}{2} + n_3\frac{\pi}{2} + n_4\frac{\pi}{4} + n_5\frac{\pi}{3} + n_6\frac{\pi}{3} = 12 \cdot \frac{\pi}{2}$$

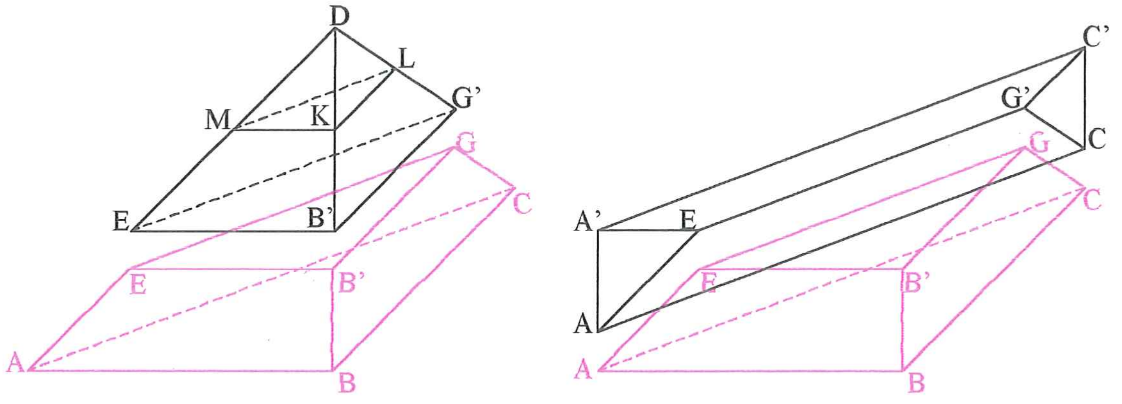
$$\frac{\pi(6n_1 + 6n_2 + 6n_3 + 3n_4 + 4n_5 + 4n_6)}{12} = 6\pi \quad / \div \pi$$

$$6n_1 + 6n_2 + 6n_3 + 3n_4 + 4n_5 + 4n_6 = 72$$

Nie trudno zauważyć, że rozwiązanie tego równania nie jest jednoznaczne. Spełniają je np. liczby: $n_1 = n_6 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $n_4 = 4$ i $n_5 = 5$.

Pokazaliśmy w ten sposób, że warunek (14) jest spełniony. Oznacza to, że ten czworościan ma szansę na to aby być równoważnym przez rozkład prostopadłościanowi. Należy jeszcze dodać, że obie figury tzn. czworościan i równoważny mu prostopadłościan muszą mieć równa objętość. Niestety oba te warunki są warunkami koniecznymi, lecz nie są warunkami dostatecznymi. Nasuwa się od razu pytanie czy specjalny czworościan Hill'a jest faktycznie równoważny przez rozkład prostopadłościanowi. W celu odpowiedzi na to pytanie pokażemy jak dokonać podziału, czyli jak porozcinać czworościan aby móc z niego złożyć prostopadłościan. Czworościan i prostopadłościan mają przystające podstawy, a wysokość prostopadłościanu jest trzy razy mniejsza od wysokości czworościanu.

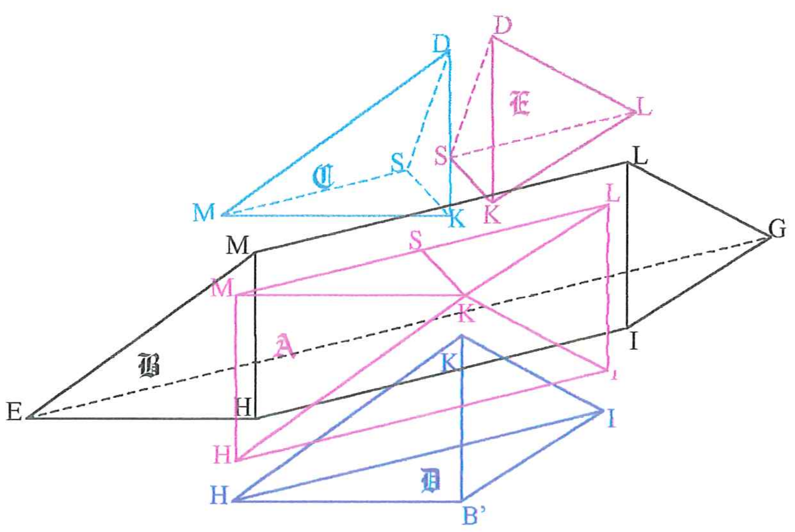
Rozcinamy oba wielościany tak jak na rysunku 45.




rys 45

Czworościan ABCD rozcięto płaszczyzną równoległą do postawy, w taki sposób aby 3|BB'|=|BD|, a prostopadłościan płaszczyzną ACE w taki sposób aby 3|A'E|=|AB|. W obu wielościanach występuje wielościan ABC A'B'C', więc aby wielościany wyjściowe były równoważne, to muszą być równoważne wielościany EB'GD i AA'EGCC'.

Przecinamy czworościan EB'GD płaszczyzną MKL w taki sposób, że 2|B'K|=|B'D|.

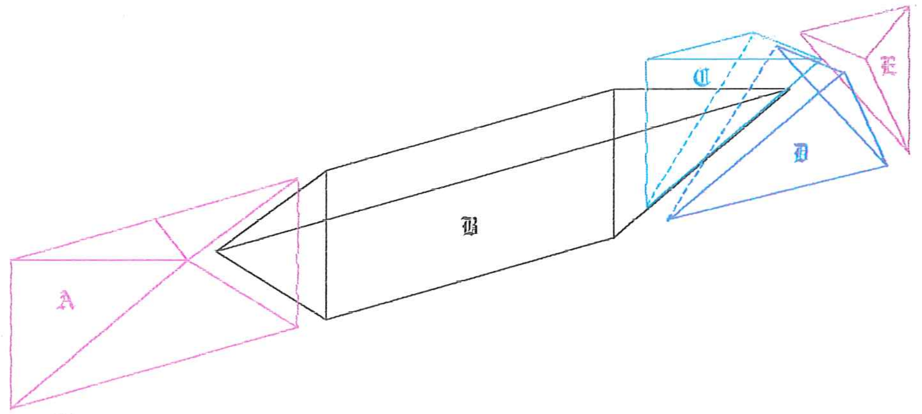



rys 46

Otrzymaliśmy czworościan MKLD, który dzielimy na dwa symetryczne do siebie czworościany MKSD - ℭ i KLSD - 𝔈. Pozostały ostrosłup ścięty dzielimy przekrojem HILM, gdzie H jest środkiem krawędzi EB', I zaś środkiem B'G. Otrzymujemy wielościan

EHMJGL=$\mathfrak{B}$ i graniastosłup trójkątny, który następnie dzielimy na sotrosłup czworokątny MHJLK=$\mathfrak{B}$ i czworościan HB'JK=$\mathfrak{D}$.

Zajmijmy się teraz wielościanem AA'ECC'G. Na rysunku 47 pokazany jest podział tego wielościanu.




rys 47

Wielościan ten składa się z dokładnie takich samych bryłek, co czworościan EB'GD, a więc na mocy definicji wielościany te są równoważne przez rozkład.

## 5.3.2 Przykłady rodzin czworościanów równoważnych przez rozkład prostopadłościanowi.

W podanych poniżej tabelkach przedstawiamy dwa przykłady rodzin czworościanów równoważnych przez rozkład prostopadłościanowi.

a) Czworościan Hill'a pierwszego typu.

Dwie równe przeciwległe krawędzie tego czworościanu, przy których kąty dwuścienne są proste, przyjmujemy za jednostkę. Jeden z kątów dwuściennych $\alpha$ można obrać dowolnie pod warunkiem, że jest ostry i większy od $\frac{\pi}{6}$, wtedy pozostałe krawędzie i kąty dwuścienne czworościanu są wyznaczone. Podajemy je w następującej tabeli:

| | AB | AC | AD | BC | BD | CD |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Długość krawędzi czworościanu | $\sin\alpha$ | $\sqrt{3}\cos\alpha$ | 1 | 1 | $\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| Miara kąta dwuściennego przy tej krawędzi | $\alpha$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi - 2\alpha$ | $\alpha$ |

b) Czworościan Sydlera pierwszego typu.

Jest to czworościan trójprostokątny. Jedną z krawędzi przyległych do kątów prostych przyjmujemy za parametr i oznaczamy ją przez $a$, drugą za jednostkę. Pozostałe długości krawędzi i miary kątów odczytujemy z tabeli:

| | AB | AC | AD | BC | BD | CD |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Długość krawędzi czworościanu | $a$ | $a^{-1}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt{a}$ | $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt{a^{-1}}$ |
| Miara kąta dwuściennego przy tej krawędzi | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{5}$ | $\frac{2\pi}{5}$ |

# Przypisy

1. Aniela Ehrenfeucht „Ciekawy czworościan"; PZWS – Warszawa 1966r. str. 86.
2. Aniela Ehrenfeucht „Ciekawy czworościan"; PZWS – Warszawa 1966r. str. 87.
3. Jan Zydler „Geometria"; Prószyński i S-ka – Warszawa 1997r. str. 145.
4. Aniela Ehrenfeucht „Ciekawy czworościan"; PZWS – Warszawa 1966r. str. 91.
5. Jan Zydler „Geometria"; Prószyński i S-ka – Warszawa 1997r. str. 343.
6. Jan Zydler „Geometria"; Prószyński i S-ka – Warszawa 1997r. str. 344.
7. Aniela Ehrenfeucht „Ciekawy czworościan"; PZWS – Warszawa 1966r. str. 111.