

**Uniwersytet Wrocławski**  
**Wydział Matematyki i Informatyki**  
**Instytut Matematyczny**  
*specjalność: nauczycielska*

Weronika Buchar

**Klasyfikacja ekwitranzytywnych parkietaży za pomocą  
wielokątów foremnych**

Praca magisterska  
napisana pod kierunkiem  
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2017



## Spis treści

Wstęp.....	4
1. Parkietaże wielokątowe foremne .....	5
2. Ekwiwertyczne parkietaże foremne wielokątowe .....	18
2.1. Parkietaże foremne wielokątowe 1-ekwiwertyczne .....	18
2.2. Parkietaże foremne wielokątowe 2-ekwiwertyczne .....	18
2.3. Parkietaże foremne wielokątowe 3-ekwiwertyczne .....	32
2.4. Parkietaże foremne wielokątowe 4-ekwiwertyczne .....	45
2.5. Wnioski.....	49
Bibliografia .....	50

## Wstęp

Niniejsza praca dotyczy klasyfikacji ekwitranzytywnych parkietaży za pomocą wielokątów foremnych. Klasyfikacji tej dokonali w XX wieku belgijscy naukowcy I. Debroey i F. Landuyt w artykule *Equitransitive edge-to-edge tilings by regular convex polygons* [1].

Celem niniejszej pracy jest prezentacja ekwitranzytywnych parkietaży w sposób zaproponowany przez Debroeya i Landuyta, ale w sposób bardziej elementarny, przystępny dla zdolnych uczniów szkół średnich. W związku z tym część faktów prezentowanych w oryginale została pominięta, a pozostałe zostały uzupełnione o szczegółowe informacje, w taki sposób, by praca stanowiła jak najbardziej samodzielną pozycję.

Ponieważ praca jest odniesieniem do treści prezentowanych w [1] zachowano podobny układ. Ilustracje zamieszczone w [1] stanowiły inspirację do rysunków zamieszczonych w niniejszej pracy. Zostały jednak wykonane bardziej szczegółowo i w znacznie większej ilości, tak by ułatwić czytelnikowi zrozumienie tekstu.

Pierwsza część poniższej pracy stanowi niejako wstęp do drugiej części. Zawiera podstawowe definicje dotyczące parkietaży wielokątowych foremnych oraz fakty, spostrzeżenia i twierdzenia, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy.

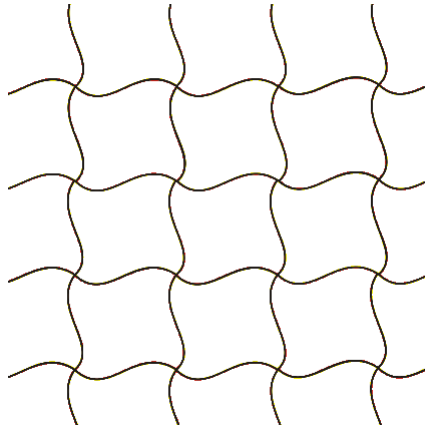
Część druga, stanowiąca większość pracy, została podzielona na podrozdziały w celu łatwiejszego rozumienia. W każdym podrozdziale zostały sklasyfikowane odpowiednio 1-, 2-, 3- i 4-ekwitranzytywne parkietaże, które są ekwitranzytywne. Dodatkowo do każdego z prezentowanych parkietaży podano uzasadnienia, że rzeczywiście jest to parkietaż ekwitranzytywny.

Pracę kończy podsumowanie, w którym w jednym miejscu spisane zostały wszystkie ekwitranzytywne parkietaże wielokątowe foremne.

# 1. Parkietaże wielokątowe foremne

Na początku wprowadzimy kilka podstawowych pojęć dotyczących parkietaży płaszczyzny.

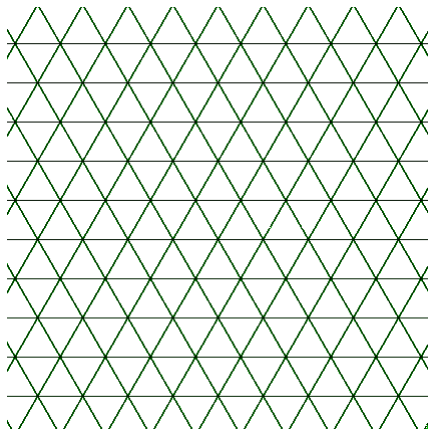
**Definicja 1.1.** *Parkietaż płaszczyzny składa się z rodziny zbiorów – zwanych plytkami, które pokrywają całą płaszczyznę bez przerw i nakładania.*



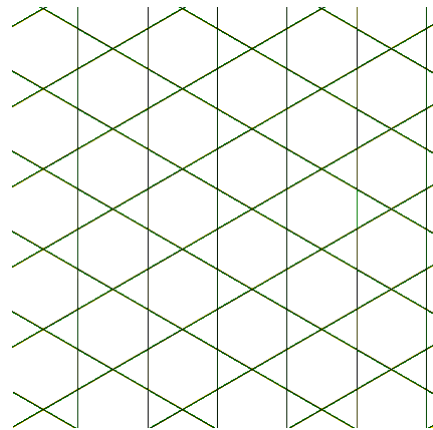
Parkietaż

W dalszej części pracy będziemy rozważać tylko foremne parkietaże wielokątowe.

**Definicja 1.2.** *Parkietaż foremny wielokątowy to parkietaż, którego wszystkie płytki są wielokątami foremnym przylegającymi do siebie ściśle całymi krawędziami.*



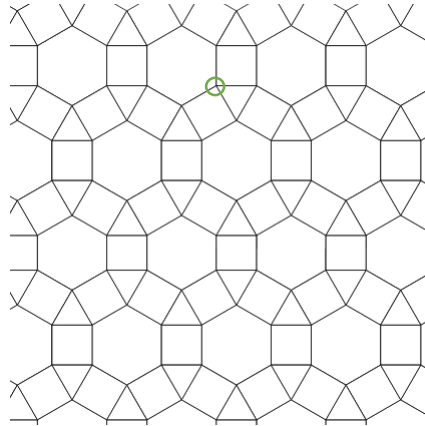
Parkietaż foremny wielokątowy  
jednopłytkowy



Parkietaż foremny wielokątowy  
dwupłytkowy

Z powyższej definicji wynika, że każde dwie płytki są albo rozłączne, albo mają dokładnie jeden punkt wspólny, który jest wierzchołkiem każdego z dwóch wielokątów lub mają część wspólną, która jest krawędzią każdego z dwóch wielokątów. Widać od razu, że wszystkie krawędzie foremnego parkietażu wielokątowego mają tę samą długość oraz że dwie dowolne  $n$ -kątne płytki o tym samym  $n$  są przystające.

**Definicja 1.3.** *Wierzchołek  $x$  parkietażu jest typu  $n_1.n_2. \dots .n_r$  jeśli płytki wokół wierzchołka  $x$  występują w porządku cyklicznym  $n_1$ -kąt,  $n_2$ -kąt, ...,  $n_r$ -kąt.*



Nie ma znaczenia od którego wielokąta zaczniemy wypisywać pozostałe oraz w którą stronę (zgodnie z ruchem wskazówek zegara czy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). W powyższym przykładzie zaznaczono wierzchołek 3.4.6.4, który możemy oznaczać również jako 4.6.4.3, 4.3.4.6 lub 6.4.3.4. Najczęściej jednak zaczynamy wypisywanie od  $n$ -kąta z najmniejszym  $n$  zgodnie z ruchem wskazówek zegara i taką zasadę będziemy stosować w dalszej części pracy.

**Uwaga 1.4.** Dla uproszczenia zapisu typu wierzchołka będziemy stosować indeksy górne. Jeśli na przykład wokół danego wierzchołka pod rząd występuje sześć trójkątnych płytek, jego typ możemy zapisać jako  $3^6$  zamiast 3.3.3.3.3.3 lub jeśli wokół wierzchołka występują kolejno trzy trójkąty i dwa kwadraty to jego typ możemy zapisać jako  $3^3.4^2$  zamiast 3.3.3.4.4. Ogólniej: jeśli wokół wierzchołka pod rząd występuje  $m$   $n$ -kątnych płytek to fragment jego typu zamiast  $n.n\dots n$  możemy zapisać jako  $n^m$ .

Zastanówmy się teraz nad możliwymi konfiguracjami wierzchołkowymi z wielokątów foremnych. Zaczniemy od kilku prostych obserwacji.

**Spostrzeżenie 1.5.** *Suma miar kątów wewnętrznych wielokątów występujących wokół jednego wierzchołka wynosi  $360^\circ$ .*

**Spostrzeżenie 1.6.** *Trójkąt równoboczny jest wielokątem foremnym o najmniejszej mierze kąta wewnętrznego.*

**Spostrzeżenie 1.7.** *Nie istnieje wielokąt foremny o mierze kąta wewnętrznego większej lub równej  $180^\circ$ .*

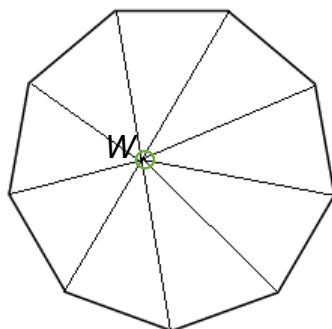
Wobec powyższych uwag możemy sformułować następujący wniosek.

**Wniosek 1.8.** *Wokół wierzchołka występują nie mniej niż 3 i nie więcej niż 6 wielokątów foremnych.*

Należałoby teraz sprawdzić wszystkie możliwości, gdy wokół wierzchołka występują 3, 4, 5 lub 6 wielokątów foremnych. Wyznamy najpierw wzór na miarę kąta wewnętrznego dowolnego  $n$ -kąta foremnego, by za jego pomocą sprawdzić jakie wielokąty foremne mogą występować wokół wierzchołków.

Każdy  $n$ -ką możemy podzielić na  $n$  trójkątów o wspólnym wierzchołku wewnątrz  $n$ -kąta (Rys. 1). Suma miar kątów w trójkącie jest równa  $180^\circ$ , natomiast suma miar kątów wokół wierzchołka  $W$  wynosi  $360^\circ$ , zatem suma miar kątów wewnętrznych  $n$ -kąta jest równa:  $n \cdot 180^\circ - 360^\circ$ . Aby zatem otrzymać wzór na miarę kąta wewnętrznego  $n$ -kąta foremnego otrzymaną różnicę dzielimy przez  $n$ , co daje następujący wniosek:

**Wniosek 1.9.** *Miara kąta wewnętrznego w wielokącie foremnym wynosi  $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ .*



Rys. 1

Wyznamy konfiguracje wierzchołkowe, w których występują 3 wielokąty  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  wokół wierzchołka. To znaczy, taki układ 3 wielokątów, że suma ich kątów wewnętrznych jest równa  $360^\circ$ . Wtedy prawdziwa jest równość:

$$\frac{180^\circ(n_1 - 2)}{n_1} + \frac{180^\circ(n_2 - 2)}{n_2} + \frac{180^\circ(n_3 - 2)}{n_3} = 360^\circ$$

Upraszczając powyższe równanie otrzymujemy:

$$\frac{n_1 - 2}{n_1} + \frac{n_2 - 2}{n_2} + \frac{n_3 - 2}{n_3} = 2$$

Dalej:

$$3 - \left(\frac{2}{n_1} + \frac{2}{n_2} + \frac{2}{n_3}\right) = 2$$

Z czego ostatecznie otrzymujemy równość postaci:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

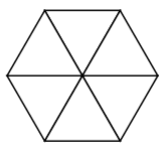
Ponieważ  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  oznaczają ilość boków wielokątów foremnych muszą być naturalne i nie mniejsze niż 3. Załóżmy, bez straty ogólności, że  $n_1 \leq n_2 \leq n_3$ . Wówczas z powyższej równości wynika, że  $n_1$  jest nie większe niż 6 (w przeciwnym wypadku lewa strona równania będzie zawsze mniejsza niż prawa). Należy teraz sprawdzić wszystkie możliwe kombinacje trzech wierzchołków, gdy  $n_1$  jest 3-, 4-, 5- lub 6-kątem foremnym. Sprawdzenie wszystkich możliwości jest proste do wykonania, ale zajmuje sporo czasu, dlatego jego szczegóły pominiemy. Podobne rozumowanie należy przeprowadzić dla wierzchołka, w którym występują 4, 5 lub 6 wielokątów foremnych. Szczegółowe rozumowanie prowadzące do klasyfikacji wszystkich konfiguracji wierzchołkowych można znaleźć w [2], [3] i [4].

Po przeprowadzeniu szczegółowej analizy powyższych przypadków otrzymujemy następujące twierdzenie:

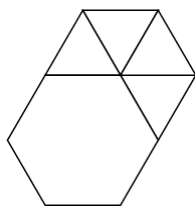
**Twierdzenie 1.10.** *Istnieje 21 możliwych konfiguracji wierzchołkowych z wielokątów foremnych, mianowicie:  $3^6$ ,  $3^4 \cdot 6$ ,  $3^3 \cdot 4^2$ ,  $3^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$ ,  $3^2 \cdot 4 \cdot 12$ ,  $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 12$ ,  $3^2 \cdot 6^2$ ,  $3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6$ ,  $3 \cdot 4^2 \cdot 6$ ,  $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4$ ,  $3 \cdot 7 \cdot 42$ ,  $3 \cdot 9 \cdot 18$ ,  $3 \cdot 8 \cdot 24$ ,  $3 \cdot 10 \cdot 15$ ,  $3 \cdot 12^2$ ,  $4^4$ ,  $4 \cdot 5 \cdot 20$ ,  $4 \cdot 6 \cdot 12$ ,  $4 \cdot 8^2$ ,  $5 \cdot 5 \cdot 10$ ,  $6^3$ .*

Prawdziwy jest poniższy fakt, którego szkic dowodu przytaczamy po Wniosku 1.12:

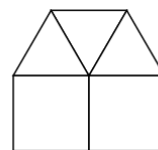
**Fakt 1.11.** *Tylko 15 spośród 21 konfiguracji wierzchołkowych wymienionych w Twierdzeniu 1.10 może być typami wierzchołkowymi parkietaży wielokątowych, mianowicie:  $3^6$ ,  $3^4 \cdot 6$ ,  $3^3 \cdot 4^2$ ,  $3^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$ ,  $3^2 \cdot 4 \cdot 12$ ,  $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 12$ ,  $3^2 \cdot 6^2$ ,  $3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6$ ,  $3 \cdot 4^2 \cdot 6$ ,  $3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4$ ,  $3 \cdot 12^2$ ,  $4^4$ ,  $4 \cdot 6 \cdot 12$ ,  $4 \cdot 8^2$ ,  $6^3$  (Rys. 2).*



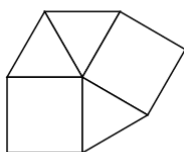
$3^6$



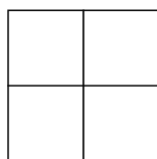
$3^4 \cdot 6$



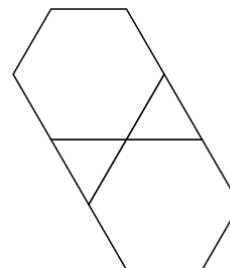
$3^3 \cdot 4^2$



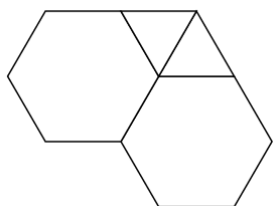
$3^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4$



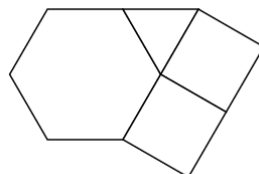
$4^4$



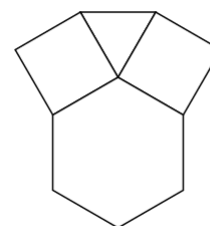
$3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6$



$3^2 \cdot 6^2$

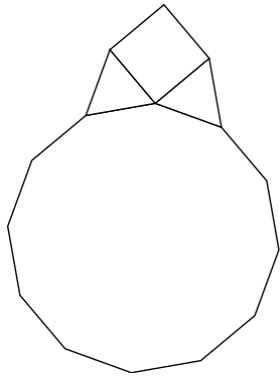


$3 \cdot 4^2 \cdot 6$

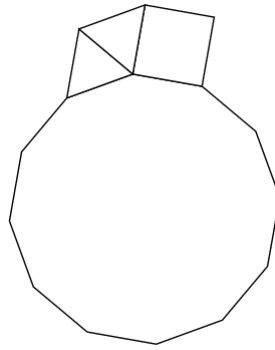


$3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4$

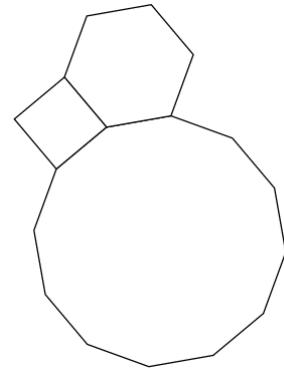




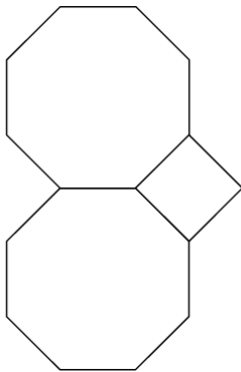
3.4.12.3



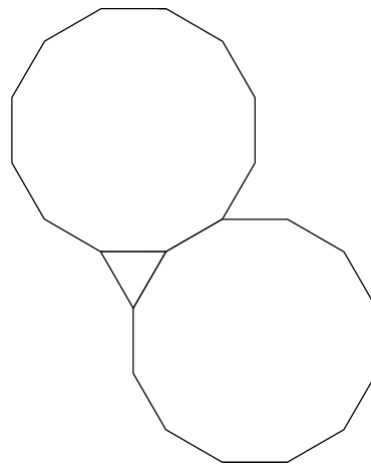
$3^2.4.12$



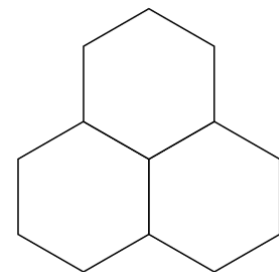
4.6.12



$4.8^2$



$3.12^2$



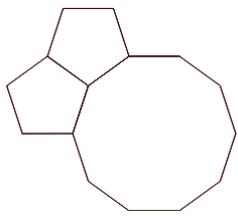
$6^3$

Rys. 2

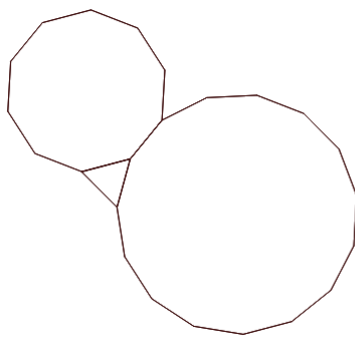
Zauważmy, że z powyższego faktu wynika następujący wniosek:

**Wniosek 1.12.** *Każda płytka parkietu wielokątowego jest trójkątem równobocznym, kwadratem, sześciokątem foremny, ośmiokątem foremnym lub dwunastokątem foremnym.*

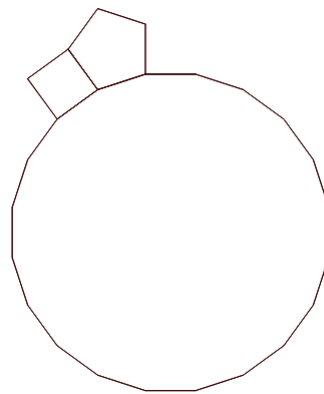
Dlaczego tylko piętnaście z dwudziestu jeden możliwych konfiguracji wierzchołkowych wielokątami foremnymi uzupełnia się do parkietu całej płaszczyzny? Przyjrzyjmy się 6 „zakazanych” konfiguracjom wierzchołkowym, które nie mogą pojawić się w żadnym parkiecie (Rys. 3).



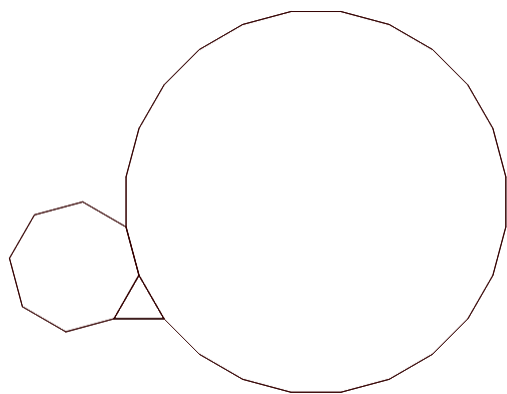
5.5.10



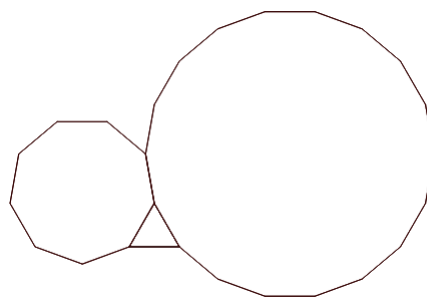
3.10.15



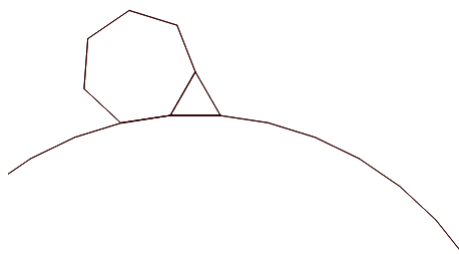
4.5.20



3.8.24



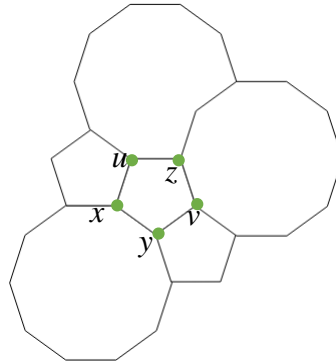
3.9.18



3.7.42

Rys. 3. „Zakazane” konfiguracje wierzchołkowe.

Rozważmy potencjalny parkietaż zawierający wierzchołek  $x$  typu 5.5.10 (rys. 4).



Rys. 4

Wierzchołek  $y$  też musi być typu 5.5.10, ponieważ jedyna konfiguracja wierzchołkowa, która zawiera 5- i 10-kąt jest właśnie tego typu. Wtedy wierzchołki  $u$  i  $v$  też są typu 5.5.10, bo każdy z nich ma już po dwa 5-kąty. Wtedy w wierzchołku  $z$  powinien być typu 5.10.10, ale z Twierdzenia 1.10 wiemy, że taki układ liczb nie tworzy konfiguracji wierzchołkowej.

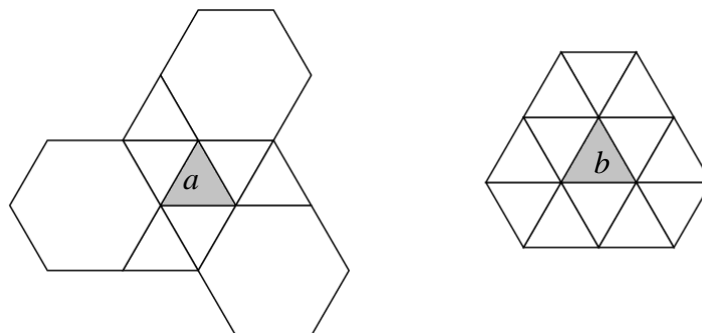
Podobnie można pokazać, że pozostałych „zakazanych” konfiguracji wierzchołkowych nie uda się rozszerzyć do parkietażu całej płaszczyzny wielokątami foremnymi.

**Definicja 1.13.** *Płytką parkietażu jest typu wierzchołkowego  $(n_1.n_2. \dots .n_r, m_1.m_2. \dots .m_p, \dots, q_1.q_2. \dots .q_u)$ , jeśli wierzchołki danej płytki w porządku cyklicznym są następujących typów:  $n_1.n_2. \dots .n_r, m_1.m_2. \dots .m_p, \dots, q_1.q_2. \dots .q_u$*

**Definicja 1.14.** *Płytką parkietażu jest typu płytkowego (kafelkowego)  $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ , jeśli w porządku cyklicznym ma krawędź wspólną kolejno z  $p_1$ -kątem,  $p_2$ -kątem,  $\dots$ ,  $p_n$ -kątem.*

**Definicja 1.15.** *Dwie płytki są tego samego typu, jeśli mają ten sam typ wierzchołkowy i ten sam typ płytkowy.*

Rozważmy poniższy przykład:



Oba szare trójkąty mają ten sam typ płytkowy  $(3, 3, 3)$ , ale każdy z nich ma inny typ wierzchołkowy: trójkąt  $a$  ma typ wierzchołkowy  $(3^4.6, 3^4.6, 3^4.6)$ , natomiast trójkąt  $b - (3^6, 3^6, 3^6)$ . Trójkąty  $a$  i  $b$  są więc różnych typów.

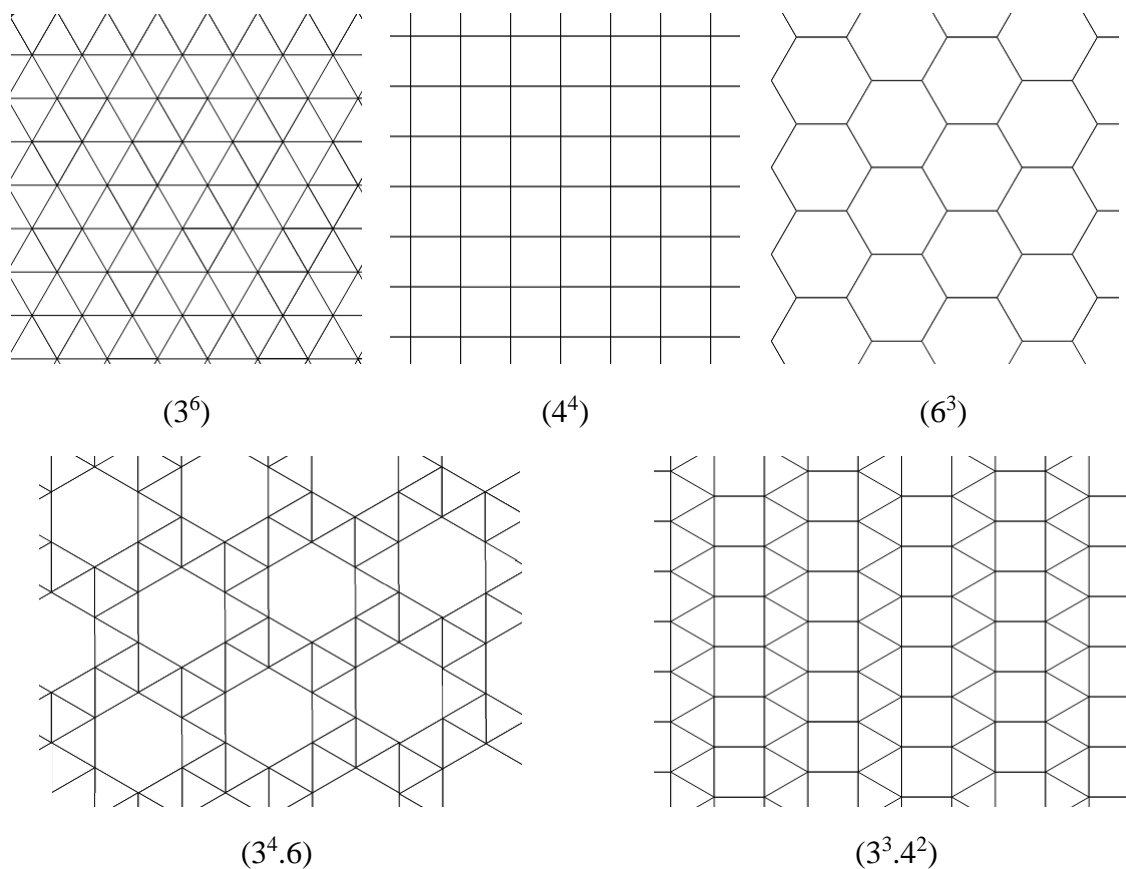
Omówimy teraz, w zakresie potrzebnym w dalszej części pracy, parkietaże archimedesowe.

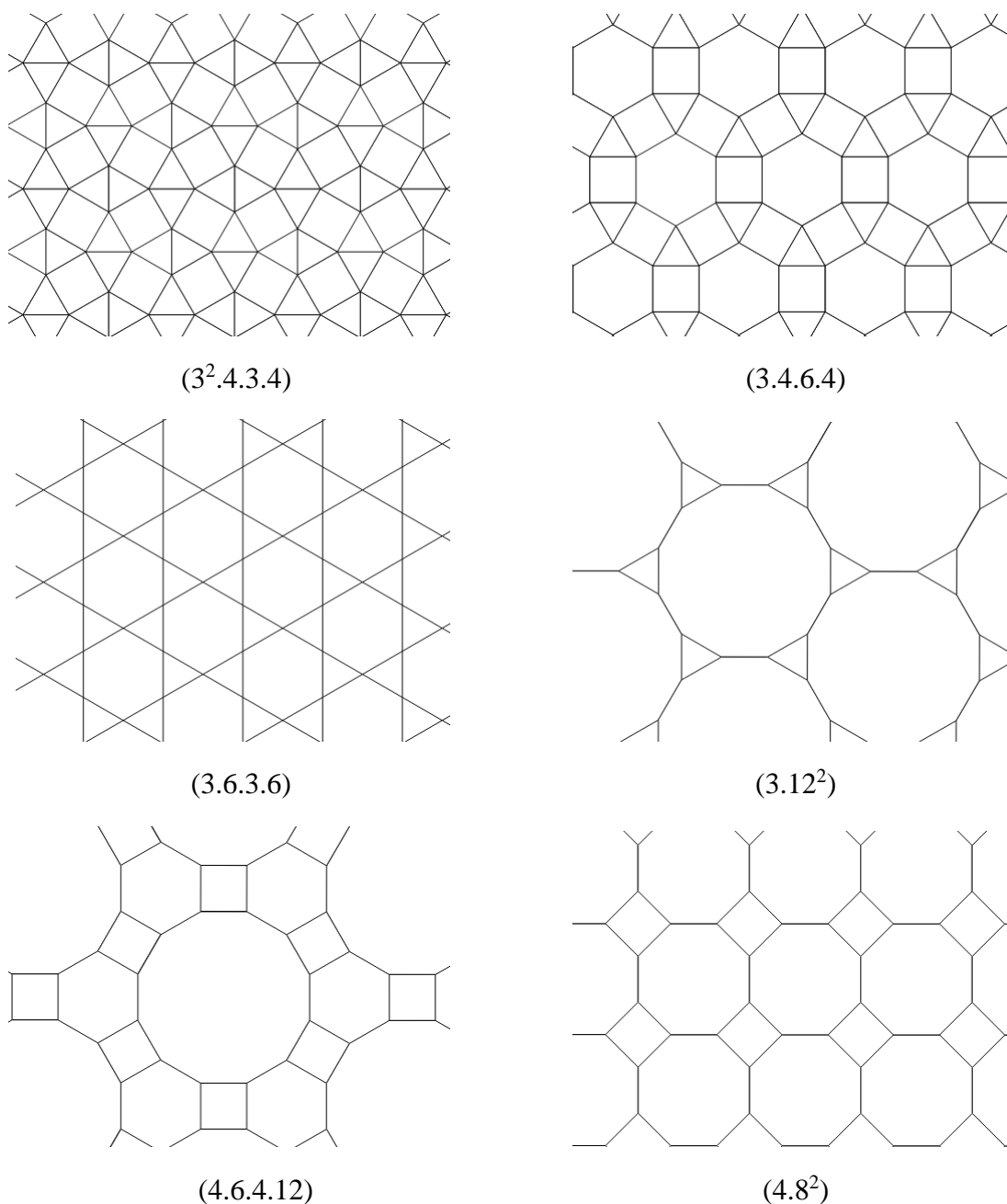
**Definicja 1.16.** *Parkietaż archimedesowy to taki parkietaż wielokątowy foremny, w którym wszystkie wierzchołki są tego samego typu.*

Spośród 15 konfiguracji wierzchołkowych, które mogą być typami wierzchołkowymi parkietaży wielokątowych, wymienionych w Fakcie 1.11 tylko dla 11 typów wierzchołkowych, wymienionych w poniższym twierdzeniu, istnieje parkietaż archimedesowy o wierzchołkach tego typu i parkietaż taki jest dla każdego z tych typów wierzchołków jedyny. Dla pozostałych typów wierzchołkowych parkietaże archimedesowe nie istnieją. Symbolem  $(n_1.n_2. \dots .n_r)$  oznaczamy parkietaż archimedesowy, którego wierzchołki są typu:  $n_1.n_2. \dots .n_r$ . W związku z powyższym, możemy sformułować następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 1.17.** *Istnieje dokładnie 11 parkietaży archimedesowych:  $(3^6)$ ,  $(3^4.6)$ ,  $(3^3.4^2)$ ,  $(3^2.4.3.4)$ ,  $(3.6.3.6)$ ,  $(3.4.6.4)$ ,  $(3.12^2)$ ,  $(4^4)$ ,  $(4.6.12)$ ,  $(4.8^2)$ ,  $(6^3)$ .*

Twierdzenia 1.17 nie będziemy dowodzić. Jego dowód można znaleźć w [3]. Wszystkie parkietaże archimedesowe przedstawione zostały na rysunku 5.





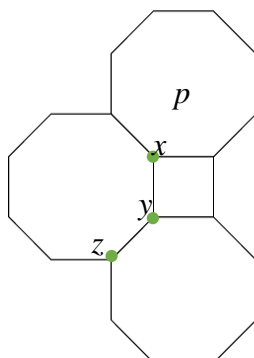
Rys. 5. Parkietaże archimedesowe.

W dalszej części pracy wykorzystamy też następującą obserwację:

**Fakt 1.18.** *Jedynym parkietażem wielokątowym foremny, który zawiera 8-kąty foremne jest parkietaż archimedesowy  $(4.8^2)$ .*

Aby udowodnić Fakt 1.18 rozważmy dowolny parkietaż wielokątowy foremny, który zawiera płytki 8-kątne. Niech  $p$  będzie płytką 8-kątną i niech  $x$  będzie wierzchołkiem tej płytki. Ponieważ jedyna konfiguracja wierzchołkowa zawierająca 8-kąt i możliwa do zrealizowania w parkietażu wielokątowym to konfiguracja 4.8.8 (druga konfiguracja zawierająca 8-kąt, czyli konfiguracja  $(3.8.2.4)$ , nie może wystąpić w żadnym parkietażu wielokątowym), wierzchołek  $x$  musi mieć typy 4.8.8 (Rys. 6). Wtedy wierzchołek  $y$  parkietażu jest jednocześnie wierzchołkiem przynajmniej jednego kwadratu i jednego 8-kąta foremnego. Jedynym z 15 możliwych typów wierzchołków zawierającym kwadraty i 8-kąty foremne jest wierzchołek

typu 4.8.8, więc  $y$  jest typu 4.8.8. Wierzchołek  $z$  parkietażu jest wierzchołkiem dwóch 8-kątów foremnych, musi być więc typu 4.8.8, itd. W ten sposób, wychodząc od wierzchołka typu 4.8.8, otrzymujemy, że wszystkie wierzchołki tego parkietażu są typu 4.8.8, a więc jest to parkietaż archimedesowy typu (4.8.8).



Rys. 6

**Definicja 1.19.** Symetrią parkietażu  $T$  nazywamy każde takie przekształcenie izometryczne całej płaszczyzny, które przeprowadza płytki parkietażu  $T$  na płytki tego samego typu parkietażu  $T$ . Zbiór wszystkich symetrii parkietażu nazywamy grupą symetrii parkietażu.

Zgodnie z definicją 1.19. symetria parkietażu  $T$  przekształca każdą płytkę na płytkę. W związku z tym krawędzie przekształca na krawędzie, zaś wierzchołki na wierzchołki. Ponadto płytki  $n$ -kątne przekształca na płytki  $n$ -kątne, a zatem płytki danego typu na płytki tego samego typu. Podobnie wierzchołki danego typu na wierzchołki tego samego typu.

**Definicja 1.20.** Maksymalny zbiór pewnego typu elementów parkietażu (np. wierzchołków, płytek) taki, że symetrie parkietażu przenoszą dowolny element tego zbioru na inny taki element nazywamy orbitą.

Zauważamy, że z powyższej definicji wynikają uwagi:

**Uwaga 1.21.** *Każdy element orbity jest w ten sam sposób położony względem reszty parkietażu.*

**Uwaga 1.22.** *Płytki parkietażu leżące w jednej orbicie są tego samego typu płytkowego.*

Poniżej przytaczamy definicje opisujące własności parkietażu, które są głównym tematem pracy:

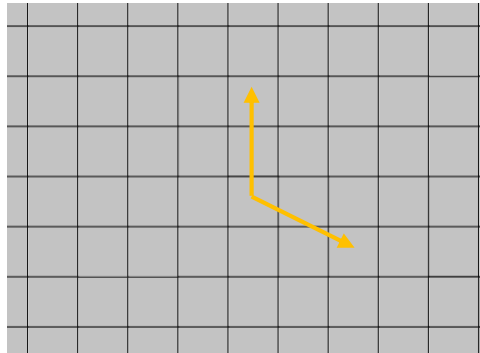
**Definicja 1.23.** Parkietaż wielokątowy foremny jest  $k$ -ekwitrancytywny, jeśli jego grupa symetrii ma  $k$  orbit ze względu na płytki.

**Definicja 1.24.** Parkietaż wielokątowy foremny jest ekwitrancytywny, jeśli wszystkie przystające płytki są w tej samej orbicie.

Zauważmy, że z definicji 1.23 wynika, że w parkietażu  $k$ -ekwitrancytywnym występuje  $k$  rodzajów płytek, natomiast z definicji 1.24, że każde dwie przystające płytki parkietażu są w ten sam sposób położone względem reszty parkietażu. Zatem nie każdy parkietaż  $k$ -ekwitrancytywny jest ekwitrancytywny, ponieważ może zawierać przystające płytki, które nie leżą w jednej orbicie. Dla lepszego zrozumienia powyższych definicji rozważmy kilka przykładów.

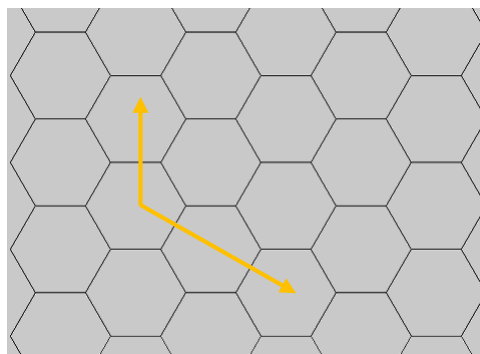
### Przykład 1.25.

Rozważmy poznane już wcześniej parkietaże archimedesowe jednopłytkowe  $3^6$ ,  $4^4$  oraz  $6^3$ . Przyjrzyjmy się parkietażowi ( $4^4$ ). Aby przekonać się, że wszystkie płytki tego parkietażu leżą w jednej orbicie, należy wskazać symetrie, które przenoszą dowolny element tego parkietażu na dowolny inny jego element. Przyjrzyjmy się rysunkowi 7.



Rys. 7. Parkietaż ( $4^4$ ).

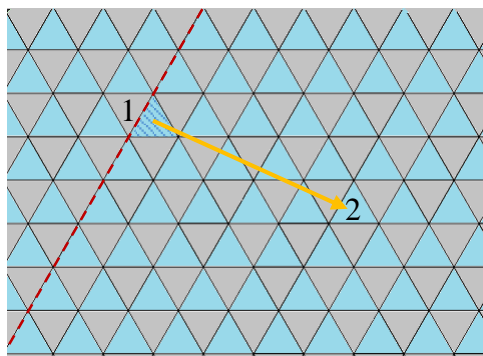
W przypadku parkietażu archimedesowego ( $4^4$ ) każdą płytkę możemy przekształcić na inną za pomocą translacji będącej symetrią całego parkietażu. Oznacza to, że wszystkie płytki tego parkietażu leżą w jednej orbicie. Jest więc to parkietaż 1-ekwitrancytowy. Ponadto jest on ekwitrancytowy, ponieważ wszystkie jego płytki są przystające i leżą w jednej orbicie. Podobnie będzie z parkietażem archimedesowym ( $6^3$ ) (Rys. 8).



Rys. 8. Parkietaż ( $6^3$ ).

Widzimy, że każdą płytkę parkietażu ( $6^3$ ) można przekształcić na dowolną inną płytkę tego parkietażu za pomocą translacji będącej symetrią całego parkietażu. Oznacza to, że płytki parkietażu ( $6^3$ ) leżą w jednej orbicie. Również jest to parkietaż 1-ekwitrancytowy, który jest ekwitrancytowy.

Przyjrzyjmy się teraz parkietażowi ( $3^6$ ). Składa się on z trójkątnych płytek zaznaczonych na rysunku 9 dwoma kolorami.

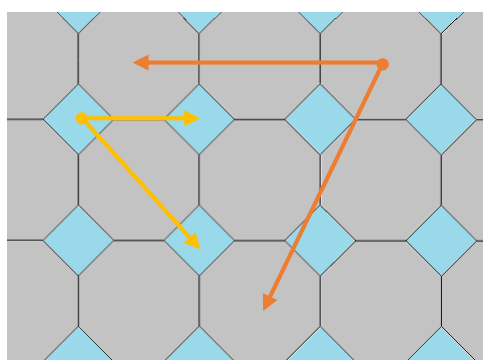


Rys. 9. Parkietaż ( $3^6$ ).

Zauważmy, że każdą szarą płytkę na inną szarą można przekształcić za pomocą translacji będącej symetrią całego parkietażu, podobnie z niebieskimi płytkami. Aby jednak przekształcić płytkę szarą na niebieską potrzebujemy innych symetrii parkietażu. Załóżmy, że chcemy przekształcić szarą płytkę z numerem 1 na płytkę niebieską z numerem 2. W tym celu najpierw przekształcamy parkietaż symetrią osiową wzdłuż osi zawierającej jeden z boków pierwszego trójkąta. Obrazem trójkąta numer 1 względem tej symetrii jest trójkąt w drugim kolorze, który teraz wystarczy przesunąć o wektor odpowiedniej długości, by otrzymać trójkąt z numerem 2. Złożenie wyżej wymienionej symetrii osiowej oraz translacji jest przy tym symetrią całego parkietażu. W ten sposób pokazaliśmy, że każdą płytkę parkietażu ( $3^6$ ) można przekształcić na dowolną inną płytkę tego parkietażu za pomocą pewnej symetrii całego parkietażu, co oznacza, że wszystkie płytki leżą w jednej orbicie. W związku z tym parkietaż ( $3^6$ ) jest parkietażem 1-ekwitrannytynym, który jest ekwitrannytynym.

### Przykład 1.26.

Kolejny przykład przedstawia Rys. 10. Parkietaż ten składa się z płytek kwadratowych i 8-kątnych. Zauważmy, że wszystkie kwadraty tego parkietażu leżą w jednej orbicie, ponieważ dowolny kwadrat możemy przekształcić na inny za pomocą translacji będącej symetrią całego parkietażu. Podobnie każdy 8-kąt przez translację może zostać przekształcony na dowolny inny.



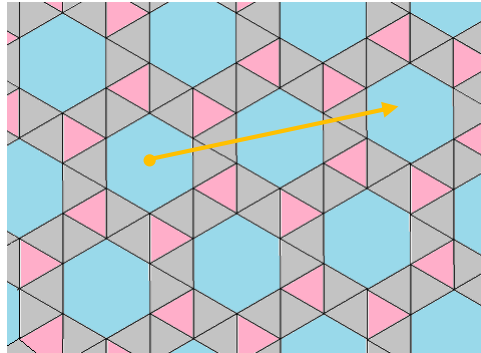
Rys. 10. Parkietaż ( $4.8^2$ ).

W parkietażu ( $4.8^2$ ) występują więc dwie orbity (orbita kwadratów i orbita 8-kątów), dlatego parkietaż ten jest 2-ekwitrannytynym. Jest on także ekwitrannytynym, ponieważ każde przystające płytki leżą w jednej orbicie.



### Przykład 1.27.

Ostatni przykład przedstawiony został na Rys. 11. Jest to parkietaż dwupłytkowy archimedesowy typu  $(3^4.6)$ .



Rys. 11. Parkietaż  $(3^4.6)$ .

Wszystkie płytki 6-kątne tego parkietażu należą do jednej orbity, ponieważ dowolną 6-kątną płytkę tego parkietażu można przekształcić na inną 6-kątną płytkę za pomocą translacji będącej symetrią całego parkietażu. Przyjrzyjmy się płytkom trójkątnym zaznaczonym dwoma kolorami. Zarówno różowe jak i szare płytki są tego samego typu wierzchołkowego  $(3^4.6)^3$ , mają natomiast różne typy płytkowe. Płytki różowe sąsiadują tylko z trójkątami, są więc typu płytkowego  $(3, 3, 3)$ , natomiast szare płytki z trójkątami i sześciokątami, ich typ to zatem  $(3, 3, 6)$ . Nie da się więc za pomocą symetrii przekształcić różowych płytek na szare (i odwrotnie). Parkietaż  $(3^4.6)$  ma zatem więcej niż jedną orbitę trójkątów. W związku z tym nie jest ekwitranzytwny.

## 2. Ekwitranzytywne parkietaże foremne wielokątowe

W tym rozdziale wskażemy wszystkie ekwitranzytywne parkietaże foremne wielokątowe. Zaczniemy od kilku pomocniczych twierdzeń, które następnie będziemy wykorzystywać w pozostałej części tego rozdziału.

**Fakt 2.1.** *Jeśli parkietaż foremny wielokątowy jest ekwitranzytywny, to jest  $k$ -ekwitranzytywny dla pewnego  $k \leq 4$ . Co więcej każda płytki takiego parkietażu jest 3-, 4-, 6- lub 12-kątem foremnym, albo parkietaż ten jest archimedesowym parkietażem ( $4.8^2$ ).*

**Dowód:** Każda z płytek parkietażu foremnego wielokątowego jest 3-, 4-, 6-, 8- lub 12-kątem foremnym (wniosek 1.12). W związku z tym każdy ekwitranzytywny parkietaż jest  $k$ -ekwitranzytywny z  $k \leq 5$ . Niech  $T$  będzie parkietażem ekwitranzytywnym, w którym występują 8-kąty. Wtedy, na podstawie faktu 1.18,  $T$  jest archimedesowym parkietażem typu ( $4.8^2$ ), oraz na podstawie przykładu 1.26 z rozdziału 1  $T$  jest 2-ekwitranzytywny. W związku z tym płytki pozostałych parkietaży są 3-, 4-, 6- lub 12-kątami foremnymi, więc każdy parkietaż ekwitranzytywny jest  $k$ -ekwitranzytywny z  $k \leq 4$ .

**Uwaga 2.1.** *Jeśli parkietaż jest 1- lub 2-ekwitranzytywny, to jest ekwitranzytywny.*

Parkietaże 1-ekwitranzytywne foremne wielokątowe mają tylko jeden rodzaj płytek i w związku z tym wszystkie są jednakowo położone względem całego parkietażu. W parkietażu 2-ekwitranzytywnym wszystkie płytki nie mogą być jednakowe, bo wtedy parkietaż byłby jednym z parkietaży ( $3^6$ ), ( $4^4$ ) lub ( $6^3$ ), a te parkietaże są 1-ekwitranzytywne. Zatem parkietaż składa się z płytek o dwóch kształtach (więcej nie może być z powodu 2-ekwitranzytywności). W takim razie płytki każdego z dwóch kształtów tworzą orbity, co oznacza ekwitranzytywność parkietaża 2-ekwitranzytywnego.

W poniższych podrozdziałach sklasyfikujemy kolejno parkietaże ekwitranzytywne, które są  $k$ -ekwitranzytywne dla  $k = 1, 2, 3, 4$ .

### 2.1. Parkietaże foremne wielokątowe 1-ekwitranzytywne

**Fakt 2.1.1.** *Jedynymi 1-ekwitranzytywnymi foremnymi wielokątowymi parkietażami są parkietaże archimedesowe typu ( $3^6$ ), ( $4^4$ ) i ( $6^3$ ). Wszystkie one są ekwitranzytywne.*

**Dowód:** Jeśli parkietaż foremny wielokątowy jest 1-ekwitranzytywny, wszystkie jego płytki są przystające. Jedynymi takimi parkietażami są parkietaże archimedesowe typu ( $3^6$ ), ( $4^4$ ) i ( $6^3$ ). Pokazaliśmy, że są one 1-ekwitranzytywne w Przykładzie 1.25 w rozdziale 1.

### 2.2. Parkietaże foremne wielokątowe 2-ekwitranzytywne

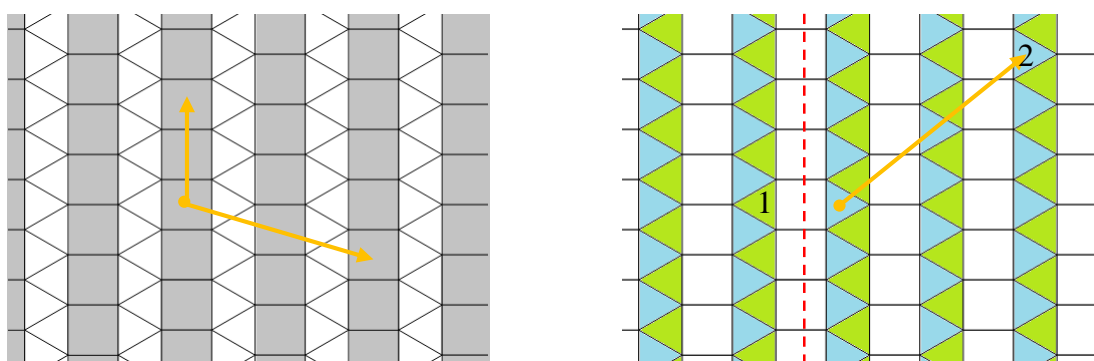
**Twierdzenie 2.2.1.** *Istnieje dokładnie 13 parkietaży wielokątowych foremnych 2-ekwitranzytywnych, mianowicie parkietaże archimedesowe: ( $3^3.4^2$ ), ( $3^2.4.3.4$ ), ( $3.6.3.6$ ), ( $3.12^2$ ), ( $4.8^2$ ) oraz parkietaże oznaczone na stronach 18-32 symbolami: ( $3^6; 3^2.6^2$ ), ( $3^4.6; 3^2.6^2$ ), ( $3^3.4^2; 4^4$ ),*

$(3^2.6^2; 3.6.3.6)$ ,  $(3^6; 3^2.6^2; 6^3)$ ,  $(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)$ ,  $(3^2.6^2; 3.6.3.6; 6^3)$ ,  $(3^6; 3^2.6^2; (6^3)^2)$ . Wszystkie te parkietaże są ekwitranżytywne.

**Dowód:** Niech  $T$  będzie 2-ekwitranżytywnym parkietażem. Stąd od razu mamy, że  $T$  ma dwa rodzaje płytek, jest ekwitranżytywny i dwa dowolne  $n$ -kąty o tym samym  $n$  są tego samego typu. Skoro  $T$  ma dwa rodzaje płytek to mogą wystąpić jedynie następujące typy wierzchołków:  $3^6$ ,  $3^4.6$ ,  $3^3.4^2$ ,  $3^2.4.3.4$ ,  $3^2.6^2$ ,  $3.6.3.6$ ,  $3.12^2$ ,  $4^4$ ,  $4.8^2$ ,  $6^3$ . W pozostałych typach wierzchołkowych występują więcej niż 3 rodzaje wielokątów (Fakt 1.11).

Załóżmy, że  $T$  jest archimedesowy, wtedy  $T$  może być jednym z dwupłytkowych archimedesowych parkietaży:  $(3^4.6)$ ,  $(3^3.4^2)$ ,  $(3^2.4.3.4)$ ,  $(3.6.3.6)$ ,  $(3.12^2)$ ,  $(4.8^2)$ . W rozdziale pierwszym, w przykładzie 1.27, pokazaliśmy, że parkietaż  $(3^4.6)$  nie jest 2-ekwitranżytywny, więc nie jest również ekwitranżytywny.

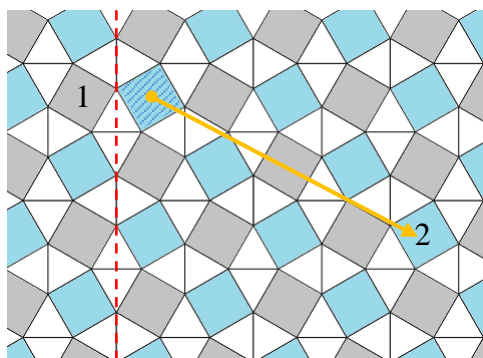
Przyjrzyjmy się teraz parkietażowi  $(3^3.4^2)$ .



Rys. 12. Parkietaż  $(3^3.4^2)$ .

W parkietażu  $(3^3.4^2)$  dowolną płytkę kwadratową można przekształcić na każdą inną za pomocą translacji, która jest symetrią całego parkietażu. Zatem wszystkie kwadratowe płytki tego parkietażu należą do jednej orbity. Płytki trójkątne są natomiast, podobnie jak w parkietażu archimedesowym  $(3^6)$  (Przykład 1.25), dwójakiego rodzaju. Na rysunku 12 zostały zaznaczone dwoma kolorami. Każdą zieloną płytkę na każdą inną zieloną płytkę można przekształcić przez translację będącą symetrią całego parkietażu. Podobnie dla niebieskich płytek. Trzeba jeszcze pokazać w jaki sposób przekształcać płytki zielone na niebieskie. Ilustruje to rysunek 12, gdzie zieloną płytkę z numerem 1 przekształcamy na niebieską płytkę z numerem 2. Zaczynamy od przekształcenia płytki pierwszej na dowolną płytkę drugiego koloru przez symetrię zachowującą cały parkietaż, np. symetrię osiową wzdłuż osi zawierającej oś symetrii kwadratu (zaznaczonej na rysunku czerwoną, przerywaną linią). Następnie wystarczy przesunąć obraz pierwszej płytki o odpowiedni wektor na płytkę z numerem 2. W ten sposób pokazaliśmy, że wszystkie trójkątne płytki parkietażu  $(3^3.4^2)$  leżą w jednej orbicie. Zatem dwupłytkowy parkietaż  $(3^3.4^2)$  ma dwie orbity (orbitę kwadratów i orbitę trójkątów) i jest 2-ekwitranżytywny. Jest ponadto ekwitranżytywny, ponieważ wszystkie przystające płytki należą do jednej orbity.

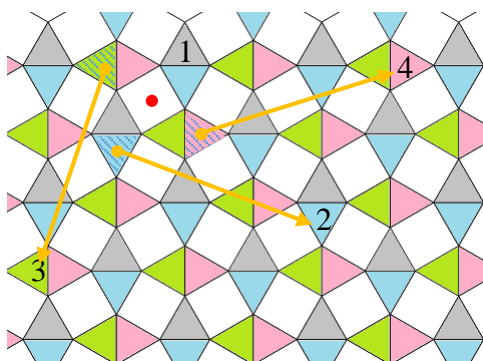
Rozważmy kolejny dwupłytkowy parkietaż archimedesowy:  $(3^2.4.3.4)$ . W tym parkietażu mamy 2 rodzaje położenia kwadratów i aż 4 trójkątów. Przyjrzyjmy im się dokładniej. Na poniższym rysunku dwoma kolorami zaznaczono grupy kwadratów, które dla płytek w tym samym kolorze można przekształcać na siebie translacją zachowującą cały parkietaż.



Rys. 13. Parkietaż ( $3^2.4.3.4$ ).

Pokażemy teraz, że można przekształcić dowolny szary kwadrat na dowolny niebieski kwadrat. Wybieramy szary kwadrat, który przekształcamy względem symetrii osiowej wzdłuż osi symetrii całego parkietażu (został oznaczony na Rys. 13 numerem 1). Otrzymujemy zakreskowany niebieski kwadrat, który można przesunąć na inny dowolny niebieski kwadrat (niebieski kwadrat oznaczony numerem 2). Zatem wszystkie kwadratowe płytki tego parkietażu leżą w jednej orbicie.

Na Rys.14 czterema różnymi kolorami zaznaczono różne możliwości położenie trójkątów w parkietażu ( $3^2.4.3.4$ ). Trójkąty tego samego koloru, możemy przekształcać na siebie za pomocą translacji, będących symetriami całego parkietażu. Pokażemy teraz, że za pomocą symetrii całego parkietażu można również przekształcać na siebie trójkątne płytki różnych kolorów. W tym celu wybieramy po reprezentancie trójkątnej płytki z każdego koloru i oznaczamy je numerami: 1, 2, 3, 4 (Rys. 14).

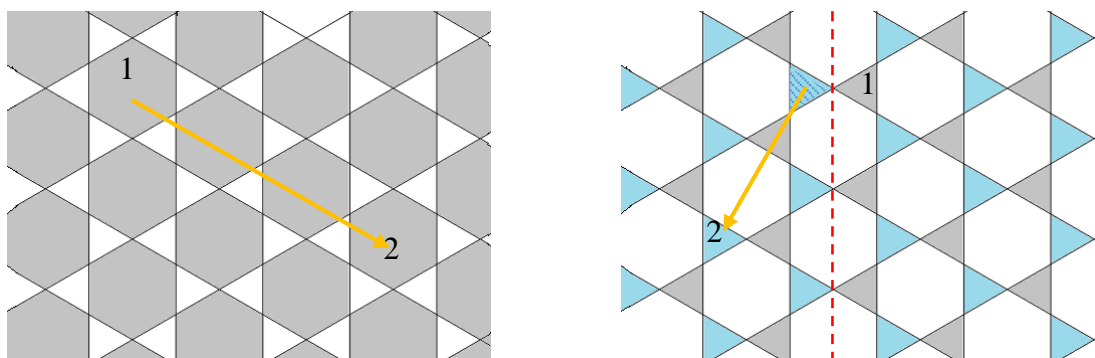


Rys. 14. Parkietaż ( $3^2.4.3.4$ ).

Przekształcając szary trójkąt z numerem 1 przez obrót, będący symetrią całego parkietażu, wokół środka kwadratu oznaczonego czerwoną kropką, o kąt  $\frac{\pi}{2}$  przeciwnie do ruchu wskazówek zegara otrzymujemy zakreskowany zielony trójkąt. Obrazem szarego trójkąta w obrocie o kąt  $\pi$  i tym samym środkiem będzie natomiast zakreskowany niebieski trójkąt. Jeśliby obrócić go kąt  $\frac{3\pi}{2}$  wokół punktu oznaczonego czerwoną kropką, otrzymamy zakreskowany różowy trójkąt. Teraz zakreskowane trójkąty wystarczy za pomocą translacji, które są symetriami całego parkietażu, przekształcić na pożądane położenia trójkąta w wybranym kolorze. Pokazaliśmy, że wszystkie trójkątne płytki parkietażu ( $3^2.4.3.4$ ) leżą w jednej orbicie.

Parkietaż ( $3^2.4.3.4$ ) jest więc 2-ekwitranny, ponieważ ma dwie orbity (orbitę trójkątów i orbitę kwadratów). Jest również ekwitranny, bo wszystkie przystające płytki tego parkietażu leżą w jednej orbicie.

W przypadku parkietaża (3.6.3.6) dla przekształcania sześciokątów również wystarczą translacje, które są symetrią całego parkietażu (Rys. 15).

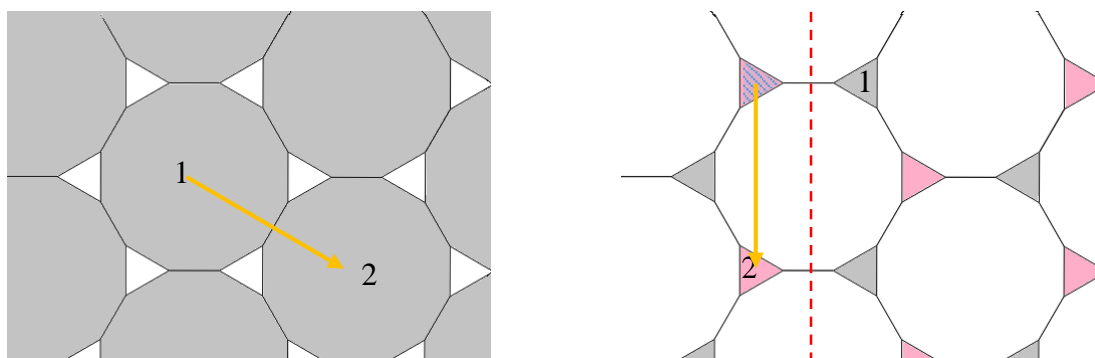


Rys. 15. Parkietaż (3.6.3.6).

Trójkąty tego parkietażu mogą być położone na dwa sposoby, zaznaczone na powyższym rysunku dwoma kolorami. Trójkąty w obrębie jednego koloru można przekształcać na siebie za pomocą translacji, będących symetrią całego parkietażu. Jeśli natomiast chcemy przekształcić trójkąt jednego koloru (np. trójkąt z numerem 1) na trójkąt drugiego koloru (np. trójkąt z numerem 2) przekształcamy parkietaż najpierw przez symetrię osiową wzdłuż osi zaznaczonej na rysunku przerywaną linią. Obrazem pierwszego szarego trójkąta jest wtedy zakreskowany niebieski trójkąt, który wystarczy przekształcić teraz na niebieski trójkąt z numerem dwa przez translację, będącą symetrią całego parkietażu. W ten sposób pokazaliśmy, że płytki trójkątne parkietażu (3.6.3.6) leżą w jednej orbicie.

Parkietaż archimedesowy dwupłytkowy (3.6.3.6) ma dwie orbity – orbitę trójkątów i orbitę sześciokątów, jest zatem 2-ekwitrantywny. Ponadto jest ekwitrantywny, ponieważ wszystkie przystające płytki tego parkietażu leżą w jednej orbicie.

W parkietażu (3.12<sup>2</sup>) wszystkie 12-kątne płytki można przekształcać na siebie za pomocą translacji, które są symetrią całego parkietażu (Rys. 16). Płytki 12-kątne tworzą zatem orbitę parkietażu (3.12<sup>2</sup>).



Rys. 16. Parkietaż (3.12<sup>2</sup>).

Płytki trójkątne parkietażu (3.12<sup>2</sup>) mogą występować w dwóch położeniach, zaznaczonych na Rys. 16 dwoma kolorami. Płytki jednego koloru można przekształcać na siebie za pomocą translacji będących symetriami całego parkietażu. Natomiast płytki różnych kolorów możemy przekształcić w następujący sposób, pokazany na rys. 16. Płytkę jednego koloru (oznaczoną numerem 1) przekształcamy przez symetrię osiową, będącą symetrią całego parkietażu na płytkę drugiego koloru, otrzymując jako jej obraz zakreskowaną płytkę w drugim kolorze. Teraz wystarczy zakreskowaną płytkę przesunąć za pomocą

translacji, będącej symetrią całego parkietażu na dowolną inną płytkę w drugim kolorze (np. płytkę oznaczoną numerem 2). Wszystkie trójkątne płytki parkietażu ( $3.12^2$ ) należą zatem do jednej orbity.

Parkietaż ( $3.12^2$ ) jest 2-ekwitransywny, ponieważ posiada dwie orbity – orbitę trójkątów i orbitę 12-kątów. Ponadto jest ekwitransywny, ponieważ wszystkie przystające płytki leżą w jednej orbicie.

Ostatni z dwupłytkowych archimedesowych parkietaży ( $4.8^2$ ) jest 2-ekwitransywny i ekwitransywny, co zostało pokazane w rozdziale 1, w przykładzie 1.26.

Dla dalszej części dowodu Twierdzenia 2.2.1 możemy założyć, że  $T$  nie jest archimedesowy i w związku z tym, dzięki Faktowi 1.18, nie występują w nim 8-kąty.

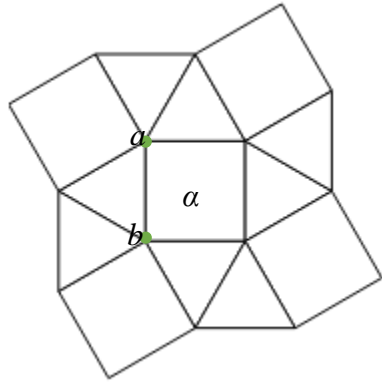
Załóżmy, że  $T$  ma 12-kąty. Wtedy każdy wierzchołek jest typu  $3.12^2$  lub  $3^6$  i oba występują (w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy parkietaż archimedesowy). Zauważmy, że wierzchołek  $3^6$  prowadzi do trójkąta o typie płytkowym  $(3, 3, n)$ , zaś wierzchołek  $3.12^2$  do trójkąta o typie płytkowym  $(m, 12, 12)$ . Daje to sprzeczność, bo każdy trójkąt powinien być tego samego typu. Oznacza to, że parkietaż archimedesowy ( $3.12^2$ ) jest jedynym 2-ekwitransywnym parkietażem zawierającym płytki 12-kątne.

Dla dalszej części dowodu możemy przyjąć, że  $T$  nie ma 12-kątów.

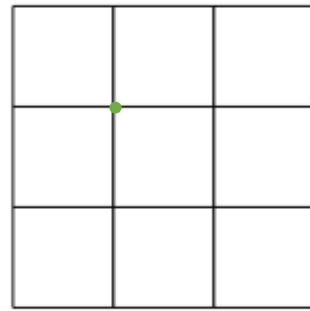
Załóżmy teraz, że  $T$  ma kwadraty. Wówczas każdy wierzchołek parkietażu  $T$  jest typu  $3^3.4^2$ ,  $3^2.4.3.4$ ,  $4^4$  lub  $3^6$ .

Przyjrzyjmy się sytuacji, gdy występuje wierzchołek typu  $3^2.4.3.4$ . Jeden z trójkątów tego wierzchołka sąsiaduje z dwoma kwadratami, dwa pozostałe z trójkątem i kwadratem. Ponieważ chcemy, żeby wszystkie trójkąty miały ten sam typ płytkowy, muszą spełniać jednocześnie właśnie te dwa warunki - mieć za sąsiadów dwa kwadraty i mieć za sąsiadów kwadrat i trójkąt. Daje to typ płytkowy  $(3, 4, 4)$  trójkątnych płytek. Wierzchołek typu  $3^6$ , prowadzi do płytek trójkątnych typu  $(n, 3, 3)$  (bo każdy trójkąt tego wierzchołka ma za sąsiadów dwa trójkąty). Nie może zatem wystąpić z wierzchołkiem typu  $3^2.4.3.4$ , bo trójkątne kafle miałyby różne typy płytkowe. Typ wierzchołkowy  $3^3.4^2$  prowadzi natomiast do typu płytkowego trójkątów  $(3, 3, 4)$  (jeden z trójkątów sąsiaduje z dwoma innymi, dwa pozostałe z trójkątem i kwadratem), więc również nie może wystąpić w parkietażu  $T$  z wierzchołkiem  $3^2.4.3.4$ . Zatem każdy wierzchołek parkietażu  $T$  jest typu  $3^2.4.3.4$  lub  $4^4$  i oba typy występują (w przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy parkietaż archimedesowy).

Rozważmy teraz wierzchołek typu  $3^2.4.3.4$  (wierzchołek  $a$  na Rys. 17). Wtedy wierzchołek  $b$  kwadratu  $a$  również jest typu  $3^2.4.3.4$ . Podobnie pozostałe wierzchołki tego kwadratu. Zatem wychodząc od wierzchołka  $3^2.4.3.4$ , otrzymujemy kwadrat o typie wierzchołkowym  $(3^2.4.3.4)^4$ . Analizując w podobny sposób wierzchołek typu  $4^4$  (Rys. 18), nietrudno się przekonać, że wówczas kwadrat zawierający wierzchołek o takim typie będzie miał typ wierzchołkowy  $(4^4)^4$ . Sprzeczność, bo wszystkie kwadraty powinny być tego samego typu.

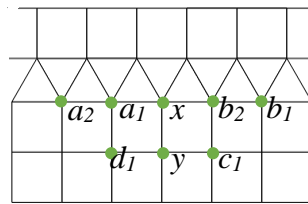


Rys. 17



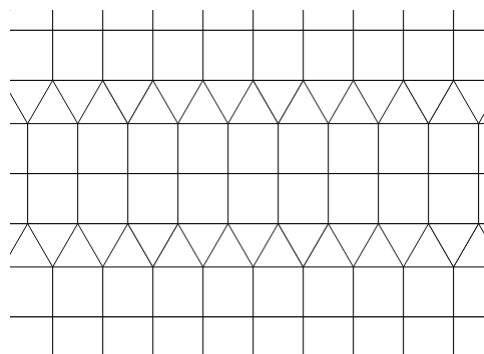
Rys. 18

Zatem  $T$  nie ma wierzchołków typu  $3^2.4.3.4$ . Tak więc każdy wierzchołek  $T$  jest typu  $3^3$ ,  $3^3.4^2$  lub  $4^4$ . Od razu widać, że występuje co najmniej jeden wierzchołek typu  $3^3.4^2$  (ponieważ parkietaż ma być dwupłytkowy). Rozważmy teraz wierzchołek  $x$  tego typu (Rys. 19). Wtedy  $a_1$  i  $b_1$  są tego samego typu  $3^3.4^2$ . Więc  $a_2$  i  $b_2$  też są tego typu, itd. Stąd każda płytką trójkątną jest typu płytkowego  $(3, 3, 4)$  i typu wierzchołkowego  $((3^3.4^2)^3)$ .  $T$  nie jest archimedesowy, dlatego typem wierzchołkowym kwadratu nie może być  $((3^3.4^2)^4)$ . Więc musimy założyć, że  $y$  jest typu  $4^4$ . Ale wtedy  $c_1$  i  $d_1$  są typu  $4^4$ , itd. Więc każdy kwadrat jest typu wierzchołkowego  $((3^3.4^2)^2, (4^4)^2)$ .



Rys. 19

Nietrudno się przekonać, że wtedy dalsza część parkietażu  $T$  zdeterminowana jest jednoznacznie, i że parkietaż ten wygląda jak na rysunku poniżej (Rys. 20). Taki parkietaż będziemy oznaczać  $(3^3.4^2; 4^4)$ , ponieważ jego wierzchołki są typu  $3^3.4^2$  lub  $4^4$ .

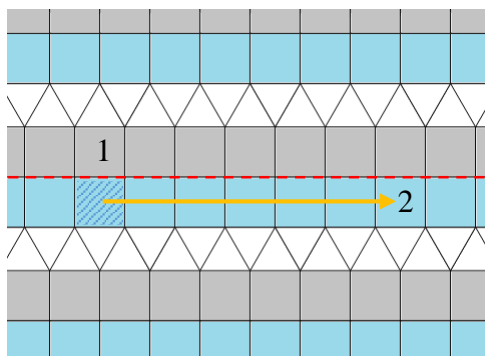


Rys. 20. Parkietaż  $(3^3.4^2; 4^4)$ .

Zastanówmy się jednak, czy parkietaż  $(3^3.4^2; 4^4)$  jest ekwitranzytywny.

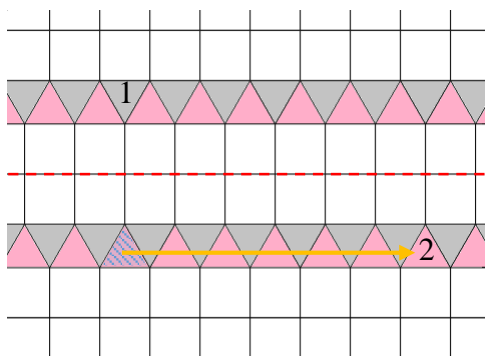
Na poniższym rysunku zostały przedstawione dwa rodzaje położenie kwadratów, które w każdej z grup można przekształcać na siebie za pomocą translacji, będącej symetrią całego parkietażu. Jeden ze sposobów

przekształcenia płytki szarej (płytki nr 1) na płytkę niebieską (płytki nr 2) przedstawiono na poniższym rysunku (Rys. 21) (podobnie jak dla trójkątnych płytek w parkiecie (3.12<sup>2</sup>)).



Rys. 21. Parkietaż  $(3^3.4^2; 4^4)$ .

W podobny sposób można pokazać, że również płytki trójkątne parkietażu  $(3^3.4^2; 4^4)$  leżą w jednej orbicie. Szare trójkątne płytki można przekształcać na inne szare trójkątne płytki za pomocą translacji, podobnie płytki różowe na płytki różowe. Natomiast szare trójkątne płytki na trójkątne różowe płytki można przekształcać na siebie jak pokazano na poniższym rysunku (analogicznie jak we wcześniejszych przykładach).



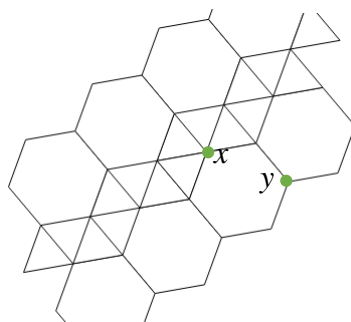
Rys. 22. Parkietaż  $(3^3.4^2; 4^4)$ .

Parkietaż dwupłytkowy  $(3^3.4^2; 4^4)$  ma zatem dwie orbity – orbitę trójkątów i orbitę kwadratów, jest więc 2-ekwitrantywnym parkietażem foremny wielokątowym. Ponadto, ponieważ dowolne dwie przystające płytki tego parkietażu należą do jednej orbity, jest on ekwitrantywny.

Dla pozostałej części dowodu możemy przyjąć, że  $T$  ma tylko płytki trójkątne i sześciokątne. Wobec tego każdy wierzchołek  $T$  jest typu  $3^6, 3^4.6, 3^2.6^2, 3.6.3.6$  lub  $6^3$ .

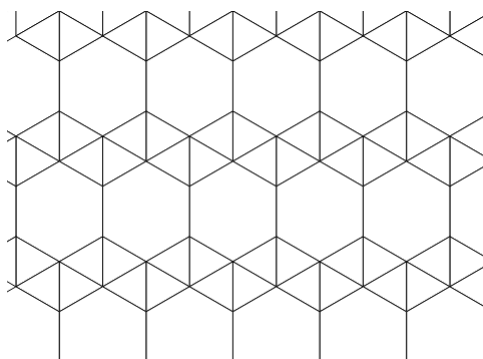
Przypuśćmy, że występuje wierzchołek  $3^4.6$ . Ponieważ dwa z trójkątów w wierzchołku  $3^4.6$  sąsiadują z sześciokątem i trójkątem, a kolejne dwa z dwoma trójkątami, wszystkie trójkątne płytki mają jednoznacznie wyznaczony typ kafelkowy -  $(3, 3, 6)$ , a każdy a każdy wierzchołek parkietażu  $T$  jest typu  $3^6, 3^4.6, 3^2.6^2$  lub  $6^3$  (pozostałe odrzucamy, ponieważ prowadziłyby do innych typów kafelkowych trójkąta). Jeśli wierzchołek  $x$  jest typu  $3^4.6$ , mamy konfigurację jak na rysunku (Rys. 23).





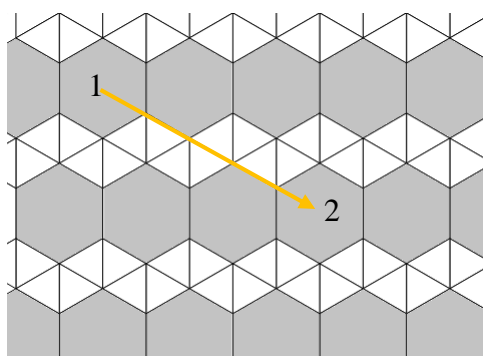
Rys. 23

Wobec powyższego każdy trójkąt parkietażu  $T$  jest typu wierzchołkowego  $((3^4 \cdot 6)^2, 3^2 \cdot 6^2)$ . Jeżeli  $y$  jest typu  $3^2 \cdot 6^2$ , to każdy 6-kąt jest typu wierzchołkowego  $(3^4 \cdot 6, (3^2 \cdot 6^2)^2, 3^4 \cdot 6, (3^2 \cdot 6^2)^2)$ . Nietrudno się przekonać, że wtedy dalsza część parkietażu  $T$  jest zdeterminowana jednoznacznie i wygląda jak na rysunku 24. Jest to parkietaż o dwóch rodzajach wierzchołków  $3^4 \cdot 6$  i  $3^2 \cdot 6^2$ . Będziemy go oznaczać  $(3^4 \cdot 6; 3^2 \cdot 6^2)$ .



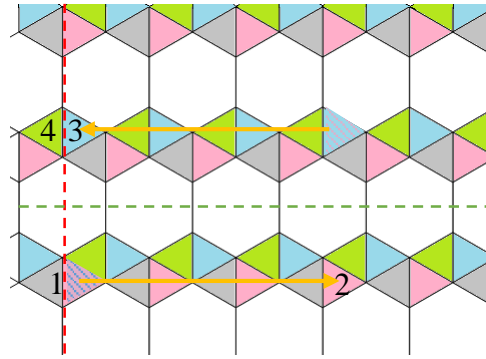
Rys. 24. Parkietaż  $(3^4 \cdot 6; 3^2 \cdot 6^2)$ .

Od razu widać, że wszystkie 6-kątne płytki parkietażu  $(3^4 \cdot 6; 3^2 \cdot 6^2)$  leżą w jednej orbicie, i że dowolną sześciokątną płytkę można przekształcić na dowolną inną sześciokątną płytkę za pomocą translacji, będącej symetrią całego parkietażu (Rys. 25).



Rys. 25. Parkietaż  $(3^4 \cdot 6; 3^2 \cdot 6^2)$ .

Nieco trudniej jest pokazać, że trójkątne płytki parkietażu  $(3^4 \cdot 6; 3^2 \cdot 6^2)$  należą do jednej orbity. Możemy to zrobić na przykład w następujący sposób, przyjrzyjmy się poniższemu rysunkowi (Rys. 26).

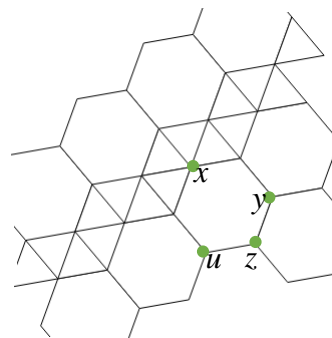


Rys. 26. Parkietaż  $(3^4.6; 3^2.6^2)$ .

Szary trójkąt z numerem 1 przekształcamy przez symetrię osiową całego parkietażu względem czerwonej prostej na zakreskowany różowy trójkąt, który teraz przez translację możemy przesunąć na dowolny inny różowy trójkąt tego parkietażu. Przekształcając teraz parkietaż przez symetrię osiową względem zielonej prostej, jako obraz różowej płytki z numerem 2, otrzymujemy zakreskowany niebieski trójkąt, który możemy przekształcić na dowolny inny niebieski trójkąt tego parkietażu przez translację będącą symetrią całego parkietażu. Dowolny niebieski trójkąt możemy teraz przekształcić na zieloną płytkę przez symetrię osiową całego parkietażu względem czerwonej prostej, którą przez translację możemy przesunąć na dowolny inny zielony trójkąt tego parkietażu. Ponadto zielony trójkąt możemy przez symetrię osiową względem poziomej prostej przekształcić na szary trójkąt. Z powyższych rozważań wynika, że dowolną trójkątną płytkę parkietażu  $(3^4.6; 3^2.6^2)$ , możemy przekształcić na dowolną inną. Zatem wszystkie płytki trójkątne leżą w jednej orbicie.

Parkietaż dwupłytkowy  $(3^4.6; 3^2.6^2)$  ma więc dwie orbity – orbitę trójkątów i orbitę sześciokątów, jest zatem 2-ekwitrantywnym parkietażem foremnym wielokątowym. Ponadto, ponieważ dowolne dwie przystające płytki tego parkietażu należą do jednej orbity, jest on ekwitrantywny.

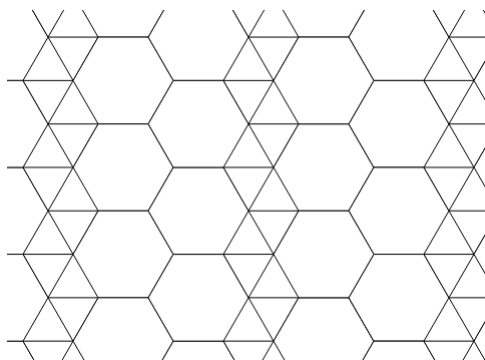
Wróćmy teraz do sytuacji z rys. 23, kiedy to każdy wierzchołek parkietażu  $T$  jest typu  $3^6$ ,  $3^4.6$ ,  $3^2.6^2$  lub  $6^3$ . Jeśli teraz  $y$  jest typu  $6^3$ , to  $z$  i  $u$  mogą być typu  $3^2.6^2$  lub  $6^3$  (bo każdy z nich ma co najmniej 2 sześciokąty). Ponadto jeśli  $z$  jest typu  $3^2.6^2$ , to także  $u$  jest typu  $3^2.6^2$ , bo  $uz$  jest krawędzią jednego wielokąta. Z tego samego powodu, jeśli  $z$  jest typu  $6^3$ , to  $u$  również jest tego typu (Rys. 27).



Rys. 27

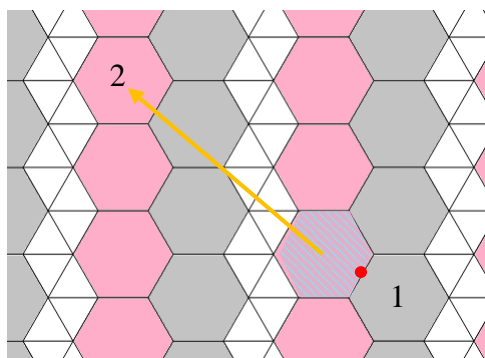
Jeśli  $z$  i  $u$  są typu  $3^2.6^2$ , to  $uz$  jest krawędzią trójkąta o wierzchołkach  $3^2.6^2$ . Sprzeczność z tym, że każdy trójkąt ma typ wierzchołkowy  $((3^4.6)^2, 3^2.6^2)$ .

Zatem  $z$  i  $u$  są typu  $6^3$ . Stąd każdy 6-kąt ma typ wierzchołkowy  $(3^4.6, 3^2.6^2, (6^3)^3, 3^2.6^2)$ , a  $T$  jest zdeterminowany jednoznacznie przez wierzchołki  $3^4.6, 3^2.6^2, 6^3$  i wygląda jak na poniższym rysunku. Taki parkietaż będziemy oznaczać jako  $(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)$ .



Rys. 28. Parkietaż  $(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)$ .

Parkietaż  $(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)$  ma, podobnie jak parkietaż  $(3^4.6; 3^2.6^2)$ , 4 możliwości położenia płytek trójkątnych, które należą jednak do jednej orbity. Można pokazać to analogicznie jak dla wcześniejszego przykładu, dlatego pozostawiamy to Czytelnikowi do samodzielnego wykonania. Przyjrzyjmy się natomiast płytkom 6-kątnym tego parkietażu (Rys. 29).



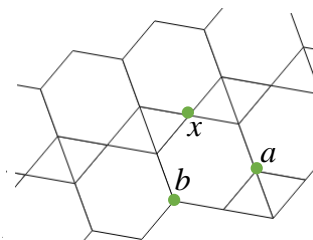
Rys. 29. Parkietaż  $(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)$ .

Tradycyjnie jednakowym kolorem zostały zaznaczone płytki, które można przekształcać na inne tego samego koloru tylko za pomocą translacji będących symetriami całego parkietażu. Żeby przekształcić szarą płytkę (np. tę z numerem 1) na dowolną płytkę drugiego koloru (np. tę z numerem 2) najpierw obracamy parkietaż wokół czerwonego punktu o  $180^\circ$ . Obrazem płytki nr 1 względem tego przekształcenia jest zakreskowana płytkę drugiego koloru, którą przez translację całego parkietażu można przekształcić na dowolną inną w tym samym kolorze. Wszystkie 6-kątne płytki parkietażu  $(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)$  należą więc do jednej orbity.

Podsumowując, parkietaż dwupłytkowy  $(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)$  ma dwie orbity – orbitę trójkątów i orbitę sześciokątów, jest zatem 2-ekwitrantywnym parkietażem foremny wielokątowym. Ponadto, ponieważ dowolne dwie przystające płytki tego parkietażu należą do jednej orbity, jest on ekwitrantywny.

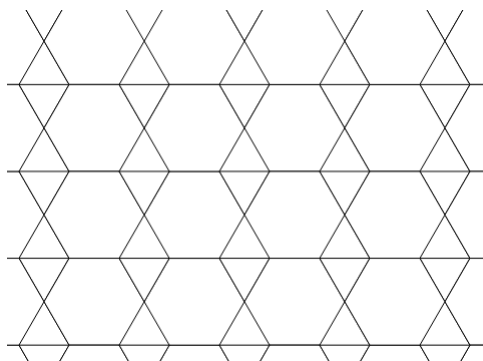
Dla pozostałej części dowodu możemy przyjąć, że każdy wierzchołek  $T$  jest typu  $3^6, 3^2.6^2, 3.6.3.6$  lub  $6^3$ . Od razu mamy, że istnieje co najmniej jeden wierzchołek  $3^2.6^2$  lub  $3.6.3.6$  (ponieważ zakładaliśmy, że parkietaż  $T$  jest dwupłytkowy).

Jeśli istnieje wierzchołek typu  $3^2.6^2$  i wierzchołek  $3.6.3.6$ , każdy trójkąt jest typu płytkowego  $(3, 6, 6)$ . Rozważmy wierzchołek  $x$  typu  $3.6.3.6$ . Otrzymujemy konfigurację jak na rysunku 30.



Rys. 30

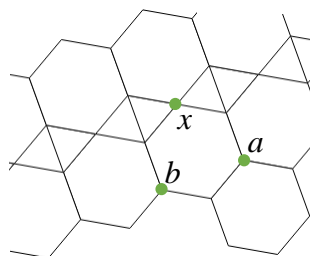
Wobec powyższego każdy trójkąt ma typ wierzchołkowy  $((3^2.6^2)^2, 3.6.3.6)$ . Jeśli wierzchołek  $a$  jest typu  $3^2.6^2$ , to od razu mamy, że każdy 6-kąt jest typu wierzchołkowego  $((3^2.6^2)^2, 3.6.3.6, (3^2.6^2)^2, 3.6.3.6)$ , co determinuje jednoznacznie, że parkietaż  $T$  wygląda jak na rysunku poniżej. Jest parkietażem foremnym wielokątowym o dwóch typach wierzchołkowych  $3^2.6^2, 3.6.3.6$ , więc będziemy go oznaczać jako  $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$ .



Rys. 31. Parkietaż  $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$ .

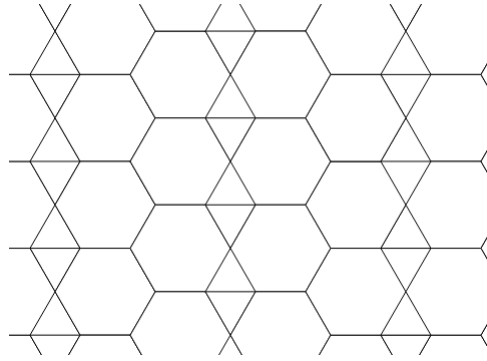
Parkietaż  $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$  ma dwie orbity – orbitę sześciokątów (do uzasadnienia wystarczą translacje) oraz orbitę trójkątów (translacje i symetrie osiowe wzdłuż prostych zawierających wspólną krawędź dwóch trójkątów). Parkietaż ten jest zatem 2-ekwitrannytywny oraz ekwitrannytywny.

Dla reszty dowodu możemy założyć, że  $a$  i  $b$  są typu  $6^3$  (Rys. 32 Rys. 32).



Rys. 32

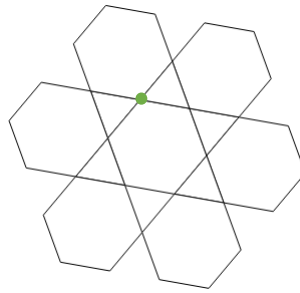
Wtedy każdy 6-kąt jest typu wierzchołkowego  $((3^2.6^2, 3.6.3.6, 3^2.6^2, (6^3)^3)$ , i łatwo zauważyć, że dalsza część parkietażu  $T$  wygląda jak na rysunku 33. Oznaczać go będziemy jako  $(3^2.6^2; 3.6.3.6; 6^3)$ .



Rys. 33. Parkietaż  $(3^2.6^2; 3.6.3.6; 6^3)$ .

Nietrudno zauważyć, że parkietaż  $(3^2.6^2; 3.6.3.6; 6^3)$  ma dwie orbity – orbitę sześciokątów (argument jak dla parkietażu  $(3^4.6; 3^2.6^2; 6^3)$ ) i orbitę trójkątów (argument jak dla parkietażu  $(3^2.6^2; 3.6.3.6)$ ). Parkietaż ten jest zatem 2-ekwitrancytywny i ekwitrancytywny.

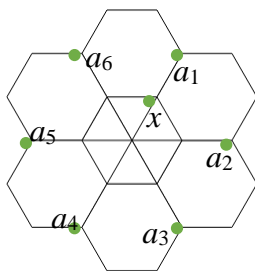
Jeśli w parkietażu  $T$  nie występuje wierzchołek  $3^2.6^2$ , jest co najmniej jeden wierzchołek typu  $3.6.3.6$ . Więc każdy trójkąt jest typu kafelkowego  $(n, 6, 6)$ . W konsekwencji każdy wierzchołek  $T$  jest typu  $3.6.3.6$  lub  $6^3$ . Rozważmy wierzchołek  $x$  typu  $3.6.3.6$  (Rys. 34).



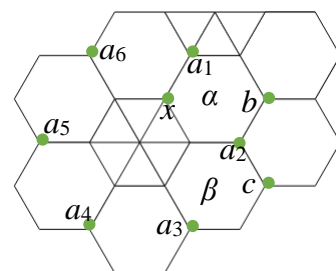
Rys. 34

Od razu mamy, że 6-kąty są typu wierzchołkowego  $((3.6.3.6)^6)$ . Stąd każdy wierzchołek przylega zarówno do trójkąta jak i do sześciokąta, a wobec tego każdy wierzchołek ma typ  $(3.6.3.6)$ . Ale wtedy  $T$  jest archimedesowy, wbrew założeniom, że rozpatrujemy już tylko parkietaże  $T$ , które nie są archimedesowe.

Jeśli nie występuje wierzchołek  $3.6.3.6$ , co najmniej jeden wierzchołek jest typu  $3^2.6^2$ . Rozważmy wierzchołek  $x$  typu  $3^2.6^2$ . Natychmiast otrzymujemy konfigurację jak na rysunku 35. Każdy trójkąt jest typu kafelkowego  $(3, 3, 6)$  i typu wierzchołkowego  $(3^6, (3^2.6^2)^2)$ . Jeśli  $a_1$  jest typu  $3^2.6^2$ , mamy konfigurację jak na rysunku 36.

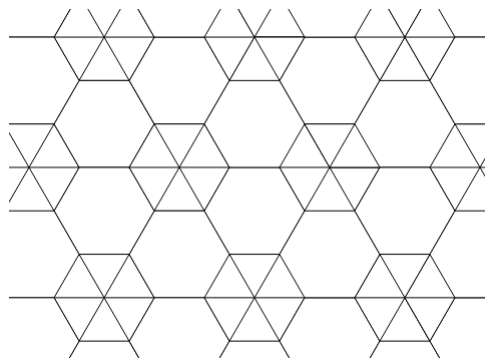


Rys. 35



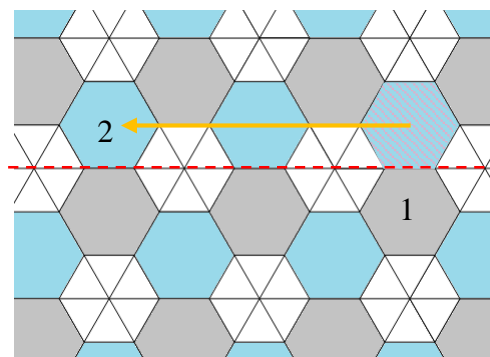
Rys. 36

Teraz jeśli  $a_2$  jest typu  $6^3$ ,  $b$  jest typu  $6^3$ , to  $\alpha$  jest typu wierzchołkowego  $((3^2 \cdot 6^2)^4, (6^3)^2)$ .  $\beta$  jest tego samego typu, co  $\alpha$ , więc  $c$  jest typu  $6^3$ . Ale wtedy  $b$ ,  $a_2$  i  $c$  są trzema wierzchołkami typu  $6^3$  należącymi do tego samego 6-kąta. Sprzeczność. Zatem  $a_1, a_2, \dots, a_6$  są wierzchołkami typu  $3^2 \cdot 6^2$ . Stąd każdy 6-kąt jest typu wierzchołkowego  $((3^2 \cdot 6^2)^6)$ , co implikuje, że parkietaż  $T$  tworzy się już dalej jednoznacznie w sposób pokazany na rysunku 37.  $T$  jest parkietażem foremnym wielokątowym o wierzchołkach  $3^6$  i  $3^2 \cdot 6^2$ , zatem będziemy go oznaczać jako  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2)$ .



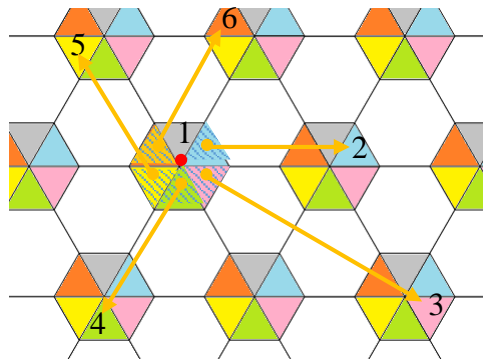
Rys. 37. Parkietaż  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2)$ .

Parkietaż  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2)$  ma dwa rodzaje położenia sześciokątów (Rys. 38). Sześciokąty jednakowych kolorów można przekształcać na siebie za pomocą translacji, będących symetriami całego parkietażu. Natomiast aby przekształcić szary sześciokąt z numerem 1, na niebieski z numerem 2, najpierw wykonujemy symetrię osiową całego parkietażu wzdłuż zaznaczonej prostej, a dopiero w kolejnym kroku przesuwamy zakreskowany obraz pierwszego 6-kąta na pożądane położenie 6-kąta w drugim kolorze.



Rys. 38. Parkietaż  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2)$ .

Sześciokątne płytki parkietażu  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2)$  leżą więc w jednej orbicie. Przyjrzyjmy się teraz płytkom trójkątnym tego parkietażu. Jest aż 6 możliwości położenia płytek trójkątnych w parkietaży  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2)$ . Pokażemy, że wszystkie należą do jednej orbity. W tym celu wybieramy po reprezentancie trójkątnej płytki z każdego koloru i oznaczamy je numerami: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (Rys. 39).



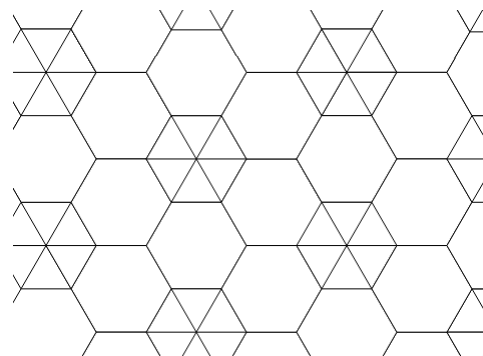
Rys. 39. Parkietaż  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2)$ .

Przekształcając szary trójkąt z numerem 1 przez obrót, będący symetrią całego parkietażu, wokół wierzchołka oznaczonego czerwoną kropką, o kąt  $\frac{\pi}{3}$  przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, otrzymujemy zakreskowany pomarańczowy trójkąt. Obrazem szarego trójkąta w obrocie o kąt  $\frac{2\pi}{3}$  i tym samym środku będzie natomiast zakreskowany żółty trójkąt. Jeśliby obrócić go kąt  $\pi$  wokół punktu oznaczonego czerwoną kropką, otrzymamy zakreskowany zielony trójkąt, jeśli o kąt  $\frac{4\pi}{3}$  – zakreskowany różowy trójkąt, a jeśli o kąt  $\frac{5\pi}{3}$  – zakreskowany niebieski trójkąt. Teraz zakreskowane trójkąty wystarczy za pomocą translacji, które są symetriami całego parkietażu, przekształcić na pożądane położenia trójkąta w wybranym kolorze. Pokazaliśmy w ten sposób, że wszystkie trójkątne płytki parkietażu  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2)$  leżą w jednej orbicie.

Parkietaż  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2)$  jest więc 2-ekwitrantywny, ponieważ ma dwie orbity (orbitę trójkątów i orbitę sześciokątów). Jest również ekwitrantywny, bo wszystkie przystające płytki tego parkietażu leżą w jednej orbicie.

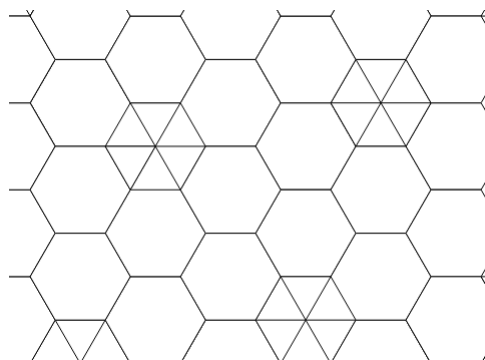
Dla pozostałej części dowodu możemy przyjąć, że wszystkie wierzchołki  $a_1, a_2, \dots, a_6$  z rysunku 35 są typu  $6^3$  (gdyby choć jeden był innego typu, czyli typu  $3^2 \cdot 6^2$ , to zgodnie z poprzednim rozumowaniem wszystkie musiałyby być typu  $3^2 \cdot 6^2$ ). Wtedy są dwie opcje:

- każdy 6-kąt jest typu wierzchołkowego  $((3^2 \cdot 6^2)^3, 6^3, (3^2 \cdot 6^2)^3, 6^3)$ , wtedy  $T$  jest już dalej jednoznacznie zdefiniowanym parkietażem o trzech rodzajach wierzchołków  $3^6, 3^2 \cdot 6^2, 6^3$ , więc będziemy go oznaczać  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2; 6^3)$ . Parkietaż ten wygląda ja na rysunku poniżej (Rys. 40).



Rys. 40. Parkietaż  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2; 6^3)$ .

- każdy 6-kąt jest typu wierzchołkowego  $((3^2 \cdot 6^2)^2, 6^4)$ , wtedy  $T$  jest parkietażem o tych samych trzech rodzajach wierzchołków  $3^6, 3^2 \cdot 6^2, 6^3$ , więc będziemy go oznaczać  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2; (6^3)^2)$ . Parkietaż ten jest już dalej jednoznacznie zdeterminowany i wygląda jak na poniższym rysunku (Rys. 41).



Rys. 41. Parkietaż  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2; (6^3)^2)$ .

Parkietaże  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2; 6^3)$  oraz  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2; (6^3)^2)$  są 2-ekwitranszytywne, co łatwo sprawdzić (podobnie jak dla parkietażu  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2)$ ). Pozostawiamy to Czytelnikowi do samodzielnego przećwiczenia.

W ten sposób zakończyliśmy dowód Twierdzenia 2.2.1, znajdując wszystkie parkietaże ekwitranszytywne, które są 2-ekwitranszytywne.

### 2.3. Parkietaże foremne wielokątowe 3-ekwitranszytywne

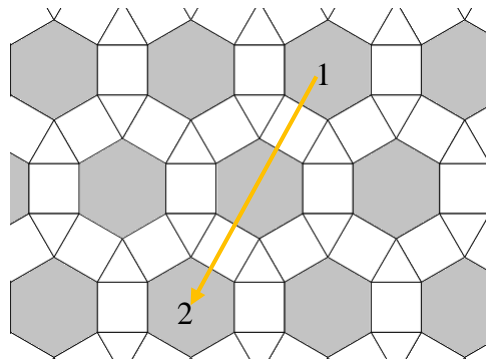
**Twierdzenie 1.2.1.** *Istnieje dokładnie 5 3-ekwitranszytywnych parkietaży wielokątowych foremnych, które są ekwitranszytywne, mianowicie parkietaże archimedesowe: (3.4.6.4), (4.6.12) oraz parkietaże oznaczone na stronach 38-45 symbolami: (3.4.3.12; 3.12<sup>2</sup>), (3.4<sup>2</sup>.6; 3.6.3.6), (3.4<sup>2</sup>.6; 3.4.6.4; 4<sup>4</sup>).*

**Dowód:** Niech  $T$  będzie 3-ekwitranszytywnym parkietażem wielokątowym foremnym. Ponieważ  $T$  ma być też ekwitranszytywny, to w związku z tym każde przystające  $n$ -kąty są tego samego typu.  $T$  ma zatem 3 rodzaje płytek.

Niech  $T$  będzie archimedesowy, wtedy  $T$  jest jednym z parkietaży (3.4.6.4) lub (4.6.12) (są to jedyne archimedesowe parkietaże 3-płytkowe). Pokażemy, że każdy z tych dwóch parkietaży jest ekwitranszytywny.

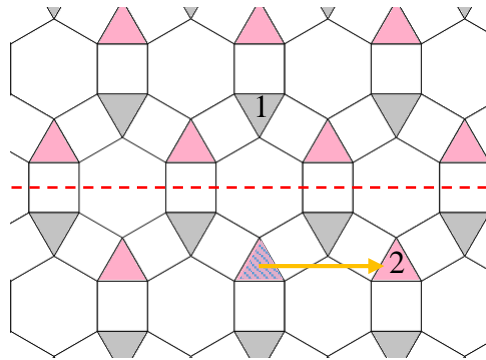
Przyjrzyjmy się najpierw parkietażowi (3.4.6.4). Zauważmy, że wszystkie jego 6-kątne płytki leżą w jednej orbicie, można je przekształcać na siebie za pomocą translacji, będących symetriami całego parkietażu (Rys. 42).





Rys. 42. Parkietaż (3.4.6.4).

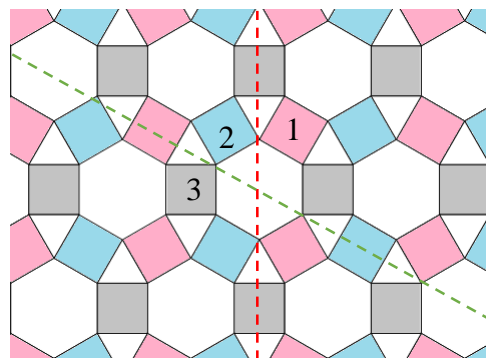
Płytki trójkątne parkietażu (3.4.6.4) są dwojakiego rodzaju. Zaznaczone na Rys. 43 jednakowym kolorem można przekształcać na siebie za pomocą samych translacji, będących symetrami całego parkietażu. Pokażemy teraz, że również płytki w różnych kolorach leżą w jednej orbicie.



Rys. 43. Parkietaż (3.4.6.4).

Parkietaż (3.4.6.4) przekształcamy przez symetrię osiową wzdłuż prostej zaznaczonej na powyższym rysunku czerwonym kolorem. Obrazem szarej płytki z numerem 1 przez to przekształcenie jest zakreskowana płytka w drugim kolorze. Za pomocą translacji, będącej symetrią całego parkietażu, możemy przekształcić zakreskowaną płytkę, na dowolną w drugim kolorze. Zatem wszystkie trójkątne płytki parkietażu (3.4.6.4) należą do jednej orbity.

Na rysunku 44 trzema kolorami zaznaczone zostały trzy możliwości położenie kwadratowych płytek parkietażu (3.4.6.4). Płytki jednakowego koloru można przekształcać na siebie za pomocą translacji, będących symetrami całego parkietażu. Płytki różnych kolorów można przekształcać na siebie na przykład jak na poniższym rysunku.

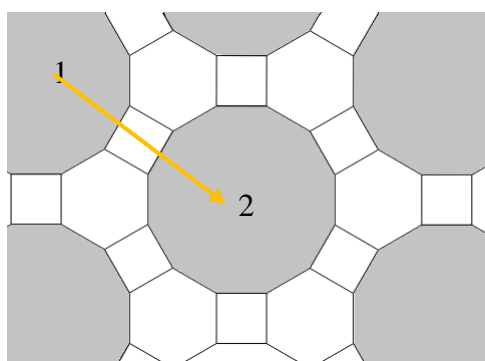


Rys. 44. Parkietaż (3.4.6.4).

Różową płytkę z numerem 1 przekształcamy na niebieską płytkę z numerem 2 za pomocą symetrii osiowej, będącej symetrią całego parkietażu, wzdłuż czerwonej prostej. Następnie przekształcając parkietaż przez symetrię osiową wzdłuż zielonej prostej jako obraz płytki z numerem 2, otrzymujemy szarą płytkę z numerem 3. W ten sposób każdą kwadratową płytkę parkietażu (3.4.6.4) możemy przekształcić na inną kwadratową płytkę w dowolnym kolorze. Oznacza to, że wszystkie kwadratowe płytki parkietażu (3.4.6.4) leżą w jednej orbicie.

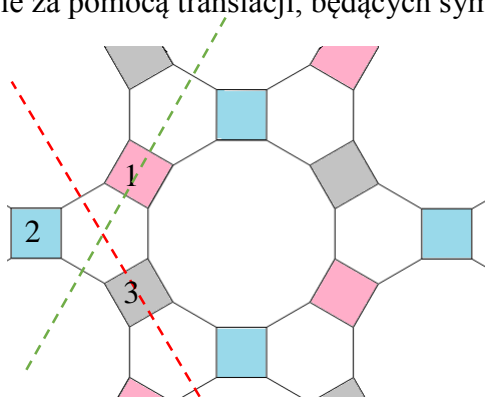
Parkietaż (3.4.6.4) jest 3-płytkowy i ma 3 orbity, jest więc 3-ekwitrantywny. Jest ponadto ekwitrantywny, ponieważ wszystkie przystające płytki tego parkietażu leżą w jednej orbicie.

Przyjrzyjmy się teraz kolejnemu 3-płytkowemu parkietażowi archimedesowemu - (4.6.12). Łatwo zauważyć, że wszystkie 12-kątne płytki leżą w jednej orbicie, można je przekształcać na siebie za pomocą translacji, będących symetrami całego parkietażu (Rys. 45).



Rys. 45. Parkietaż (4.6.12).

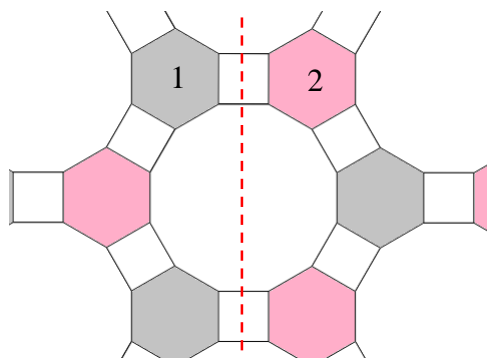
Z płytkami kwadratowymi parkietażu (4.6.12) jest nieco trudniej, płytki te mogą wystąpić w trzech różnych położeniach zaznaczonych na poniższym rysunku trzema różnymi kolorami. Płytki tego samego koloru można przekształcać na siebie za pomocą translacji, będących symetrami całego parkietażu.



Rys. 46. Parkietaż (4.6.12).

Przez symetrię osiową parkietażu wzdłuż czerwonej prostej, obrazem płytki z numerem 1, jest płytkę z numerem 2. Wykonując teraz symetrię osiową parkietażu wzdłuż zielonej prostej, jako obraz płytki z numerem 2, otrzymujemy płytkę z numerem 3. W ten sposób pokazaliśmy, że stosując dodatkowo translacje będące symetrami całego parkietażu, dowolną płytkę kwadratową parkietażu (4.6.12) można przekształcić na dowolną inną kwadratową płytkę tego parkietażu w dowolnym kolorze. Wszystkie płytki kwadratowe archimedesowego parkietażu (4.6.12) leżą w jednej orbicie.

Płytki 6-kątne występują w parkietażu (4.6.12) w dwóch położeniach. Płytki jednakowego koloru można przekształcać za pomocą translacji, będących symetriami całego parkietażu. Natomiast, aby przekształcić płytkę w jednym kolorze na płytkę w drugim kolorze, należy użyć na przykład symetrii osiowej, będącej symetrią całego parkietażu (Rys. 47).



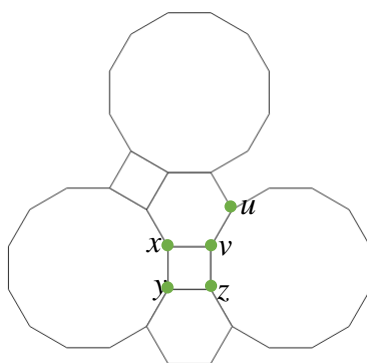
Rys. 47. Parkietaż (4.6.12).

Obrazem szarej płytki z numerem 1 przez symetrię osiową całego parkietażu wzdłuż czerwonej prostej jest różowa płytkę z numerem 2, którą przez translację – symetrię całego parkietażu – można przekształcić na dowolną inną różową płytkę. W ten sposób pokazaliśmy, że wszystkie 6-kątne płytki parkietażu (4.6.12) leżą w jednej orbicie.

Parkietaż (4.6.12) jest 3-płytkowy i posiada trzy orbity, jest zatem parkietażem 3-ekwitrantywnym. Jest również ekwitrantywny, ponieważ wszystkie przystające płytki tego parkietażu leżą w jednej orbicie.

Dla dalszej części dowodu możemy przyjąć, że  $T$  nie jest archimedesowy.

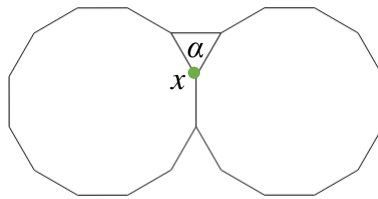
Jeśli  $T$  zawiera 4-, 6- i 12-kąty, każdy wierzchołek jest typu  $4^4$ ,  $4.6.12$  lub  $6^3$  i występuje co najmniej jeden wierzchołek typu  $4.6.12$  (w przeciwnym przypadku parkietaż nie miałby płytek 12-kątnych). Rozważmy wierzchołek  $x$  typu  $4.6.12$  (Rys. 48). Wtedy wierzchołek  $y$  jest typu  $4.6.12$ , wierzchołek  $z$  jest typu  $4.6.12$ , wierzchołki  $v$ ,  $u$  również są typu  $4.6.12$ , itd. To implikuje, że wszystkie 4-, 6- i 12-kąty, które powstają są typów wierzchołkowych  $((4.6.12)^4)$ ,  $((4.6.12)^6)$ ,  $((4.6.12)^{12})$  odpowiednio. W związku z tym każdy 4-, 6- i 12-kąt parkietażu  $T$  jest typu wierzchołkowego  $((4.6.12)^4)$ ,  $((4.6.12)^6)$ ,  $((4.6.12)^{12})$  odpowiednio. Ale wtedy wszystkie wierzchołki parkietażu  $T$  są typu  $4.6.12$  i  $T$  jest archimedesowy, co daje sprzeczność z tym, że w tej części dowodu rozważamy już tylko parkietaże niearchimedesowe.



Rys. 48

Dla dalszej części dowodu możemy zatem ograniczyć się już tylko do parkietaży, które nie zawierają wierzchołków typu 4.6.12.

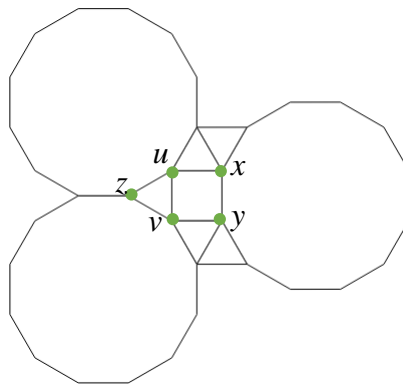
Jeśli  $T$  ma 3-, 6- i 12-kątne płytki, każdy wierzchołek jest typu  $3^6$ ,  $3^4.6$ ,  $3^2.6^2$ ,  $3.6.3.6$ ,  $3.12^2$ ,  $6^3$  i co najmniej jeden wierzchołek jest typu  $3.12^2$  (w przeciwnym przypadku parkietaż nie miałby płytek 12-kątnych). Rozważając wierzchołek  $x$  tego typu, możemy łatwo zaobserwować, że trójkąt  $\alpha$  musi mieć wtedy typ wierzchołkowy  $((3.12^2)^3)$  (Rys. 49). A zatem wszystkie trójkąty są typu wierzchołkowego  $((3.12^2)^3)$ . Podobnie każdy 12-kąt jest typu wierzchołkowego  $((3.12^2)^{12})$ . To implikuje, że  $T$  jest archimedesowy, wbrew temu, że w tej części dowodu rozważamy już tylko parkietaże, które nie są archimedesowe.



Rys. 49

Jeśli  $T$  ma 3-, 4- i 12-kąty, to każdy wierzchołek  $T$  jest typu  $3^6$ ,  $3^3.4^2$ ,  $3^2.4.3.4$ ,  $3^2.4.12$ ,  $3.4.3.12$ ,  $3.12^2$  lub  $4^4$ .

Założmy, że występuje wierzchołek typu  $3^2.4.12$ . Wtedy każda trójkątna płytka jest typu kafelkowego  $(3, 4, 12)$  (bo trójkątne płytki mają wtedy za sąsiadów zarówno 3-kąty, 4-kąty jak i 12-kąty). To implikuje, że każdy wierzchołek  $T$  jest typu  $3^2.4.12$ ,  $3.4.3.12$  lub  $4^4$  (pozostałe odrzucamy, ponieważ prowadzą do innego typu płytkowego trójkąta). Rozważmy wierzchołek  $x$  typu  $3^2.4.12$  (Rys. 50).



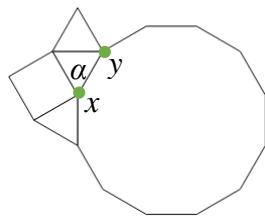
Rys. 50

Od razu mamy, że wierzchołek  $y$  też jest typu  $3^2.4.12$ . Ale każdy trójkąt jest typu płytkowego  $(3, 4, 12)$ , więc  $u$  i  $v$  są typu  $3.4.3.12$ . To implikuje, że  $z$  jest typu  $3.12^2$ , sprzeczność (trójkąt o wierzchołkach  $z, u, v$  jest typu płytkowego  $(4, 12, 12)$ ).

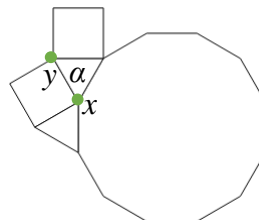
Dla dalszej części dowodu możemy zatem ograniczyć się już tylko do parkietaży, które nie zawierają wierzchołków typu  $3^2.4.12$ .

Jeśli występuje wierzchołek  $3.4.3.12$ , to każdy trójkąt jest typu płytkowego  $(4, 12, n)$ .

Jeśli  $n = 3$ , to każdy wierzchołek  $T$  jest typu 3.4.3.12 lub  $4^4$  (pozostałe odrzucamy, ponieważ prowadzą do innego typu kafelkowego trójkąta). Rozważmy wierzchołek  $x$  typu 3.4.3.12 (Rys. 51). Ponieważ każdy trójkąt ma typ płytkowy  $(3, 4, 12)$ , więc trójkąt  $\alpha$  również. Wtedy wierzchołek  $y$  jest typu  $3^2.4.12$ . Sprzeczność (pokazaliśmy, że ten typ wierzchołka nie występuje).



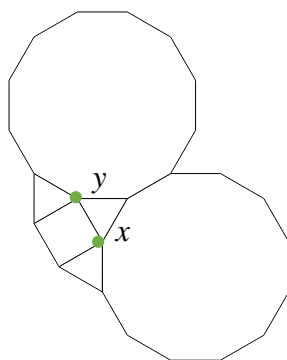
Rys. 51



Rys. 52

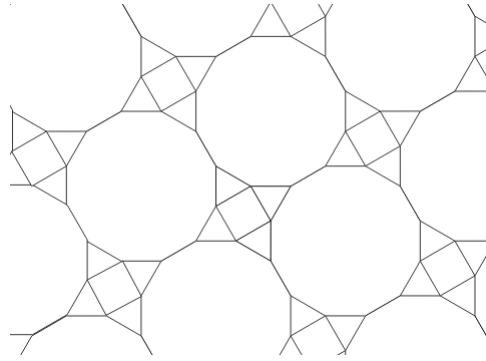
Jeśli  $n = 4$ , to każdy wierzchołek  $T$  jest typu 3.4.3.12 lub  $4^4$  (pozostałe odrzucamy, ponieważ prowadzą do innego typu kafelkowego trójkąta). Rozważmy wierzchołek  $x$  typu 3.4.3.12 (Rys. 52). Ponieważ każdy trójkąt ma typ płytkowy  $(4, 4, 12)$ , więc trójkąt  $\alpha$  również. Wtedy do wierzchołka  $y$  przylegają dwa kwadraty, co jest sprzeczne z dopuszczonymi w tej fazie dowodu typami wierzchołków (3.4.3.12 i  $4^4$ ).

Jeśli  $n = 12$ , to każdy trójkąt jest typu kafelkowego  $(4, 12, 12)$  a każdy wierzchołek  $T$  jest typu 3.4.3.12,  $3.12^2$  lub  $4^4$ . Rozważmy wierzchołek  $x$  typu 3.4.3.12 (Rys. 53).



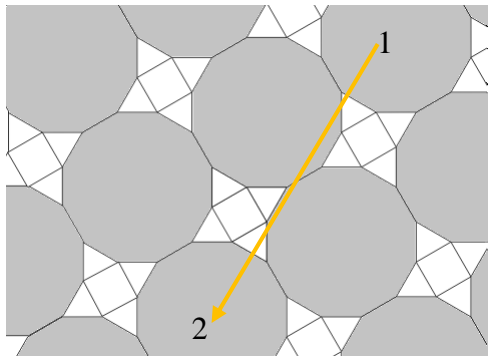
Rys. 53

Ponieważ każdy trójkąt jest typu kafelkowego  $(4, 12, 12)$  (bo typ wierzchołkowy  $3.12^2$  wymusza przyleganie do co najmniej dwóch 12-kątów, zaś typ wierzchołkowy 3.4.3.12 przyleganie do co najmniej jednego kwadratu), wierzchołek  $y$  jest typu 3.4.3.12. Implikuje to, że każdy trójkąt parkietażu  $T$  jest typu wierzchołkowego  $(3.4.3.12, 3.12^2, 3.4.3.12)$ , każdy kwadrat jest typu wierzchołkowego  $((3.4.3.12)^4)$ , a każdy 12-kąt jest typu wierzchołkowego  $(3.4.3.12, 3.12^2, 3.4.3.12, 3.12^2, 3.4.3.12, 3.12^2, 3.4.3.12, 3.12^2, 3.4.3.12, 3.12^2, 3.4.3.12, 3.12^2)$ . Nietrudno się przekonać, że dalsza część parkietażu  $T$  zdeterminowana jest jednoznacznie i wygląda jak na rysunku 54. Zatem z 3-, 4- i 12-kątów można zbudować parkietaż foremny wielokątowy, którego każdy wierzchołek jest typu  $(3.4.3.12)$  lub  $(3.12^2)$ . Będziemy go więc oznaczać jako  $(3.4.3.12; 3.12^2)$ .

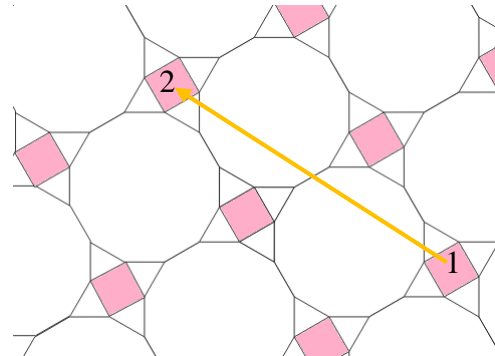


Rys. 54. Parkietaż (3.4.3.12;  $3.12^2$ ).

Zauważmy, że wszystkie 12-kątne płytki parkietażu (3.4.3.12;  $3.12^2$ ) są położone jednakowo, tzn. każdą 12-kątną płytkę tego parkietażu można przekształcić na dowolną inną płytkę tego parkietażu za pomocą samych translacji, będących symetriami całego parkietażu (Rys. 55). Oznacza to, że wszystkie płytki 12-kątne parkietażu (3.4.3.12;  $3.12^2$ ) leżą w jednej orbicie.



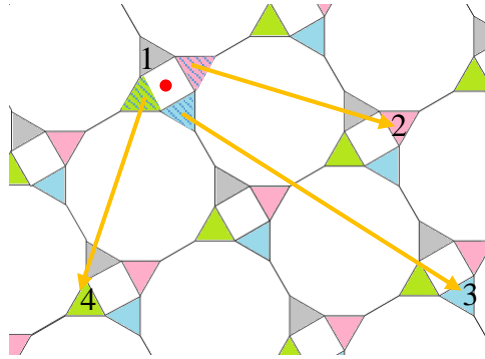
Rys. 55. Parkietaż (3.4.3.12;  $3.12^2$ ).



Rys. 56. Parkietaż (3.4.3.12;  $3.12^2$ ).

Podobnie jest z kwadratowymi płytkami tego parkietażu. Dowolną kwadratową płytkę parkietażu (3.4.3.12;  $3.12^2$ ) można przekształcić na dowolną inną za pomocą samych translacji, będących symetriami całego parkietażu (Rys. 56). Zatem kwadratowe płytki tworzą jedną orbitę.

Płytki trójkątne parkietażu (3.4.3.12;  $3.12^2$ ) występują aż w 4 położeniach, zaznaczonych na poniższym rysunku czterema kolorami. Płytki jednakowego koloru można przekształcać na siebie za pomocą translacji, będących symetriami całego parkietażu. Aby przekształcić na siebie trójkątne płytki różnych kolorów, można użyć obrotów o wielokrotności kąta  $\frac{\pi}{2}$  wokół punktu zaznaczonego na czerwono na Rysunku 57, będących symetriami całego parkietażu. Wszystkie trójkątne płytki tego parkietażu należą zatem do jednej orbity. (Podobnie jak dla 2-ekwitrantywnego parkietażu ( $3^2.4.3.4$ ) (Rys. 14)).



Rys. 57. Parkietaż  $(3.4.3.12; 3.12^2)$ .

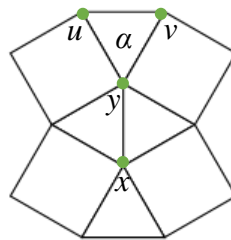
Podsumowując, parkietaż 3-płytkowy  $(3.4.3.12; 3.12^2)$  ma 3 orbity – orbitę trójkątów, orbitę kwadratów i orbitę 12-kątów. Jest więc parkietażem 3-ekwitransytywnym. Ponadto jest również ekwitransytywny, ponieważ wszystkie przystające płytki tego parkietażu leżą w jednej orbicie.

Teraz możemy przyjąć, że  $T$  nie ma wierzchołków typu  $3.4.3.12$ . Wtedy każdy wierzchołek  $T$  jest typu  $3^6, 3^3.4^2, 3^2.4.3.4, 3.12^2$  lub  $4^4$ . Ponieważ  $T$  ma mieć 12-kąty, co najmniej jeden wierzchołek jest typu  $3.12^2$ . To implikuje, że istnieje trójkąt o typie wierzchołkowym  $((3.12^2)^3)$ , a więc każdy trójkąt parkietażu  $T$  jest tego typu wierzchołkowego. Oznacza to, że każdy wierzchołek parkietażu  $T$  zawierający trójkąt jest typu  $3.12^2$ . Stąd każdy wierzchołek parkietażu  $T$  jest typu  $3.12^2$  lub  $4^4$ . Sprzecznosc, używając tylko tych wierzchołków nie uda się zbudować parkietażu 3-płytkowego (wierzchołek typu  $3.12^2$  prowadzi do parkietażu archimedesowego  $(3.12^2)$ , a wierzchołek  $4^4$  do parkietażu archimedesowego  $(4^4)$ ).

W ten sposób zakończyliśmy analizowanie 3-płytkowych parkietaży o płytkach 3-, 4- i 12-kątnych.

Jeśli  $T$  ma 3-, 4- i 6-kąty foremne, każdy wierzchołek  $T$  jest typu  $3^6, 3^4.6, 3^3.4^2, 3^2.4.3.4, 3^2.6^2, 3.6.3.6, 3.4^2.6, 3.4.6.4, 4^4, 6^3$ .

Jeśli występuje wierzchołek typu  $3^2.4.3.4$ , każdy trójkąt jest typu płytkowego  $(3, 4, 4)$ . Więc każdy wierzchołek  $T$  jest typu  $3^2.4.3.4, 3.4.6.4, 4^4$  lub  $6^3$  (pozostałe odrzucamy, bo prowadziłyby do innego typu płytkowego trójkąta). Rozważmy wierzchołek  $x$  typu  $3^2.4.3.4$  (Rys. 58).



Rys. 58

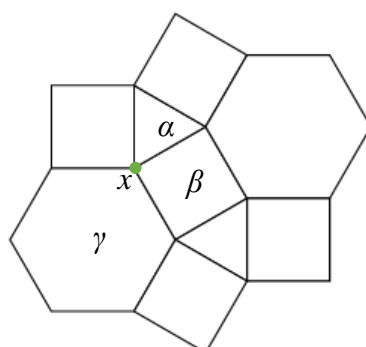
Od razy mamy, że  $y$  jest typu  $3^2.4.3.4$ . Ponieważ  $\alpha$ , jak każdy trójkąt, jest typu płytkowego  $(3, 4, 4)$ , więc  $uv$  jest wspólną krawędzią dwóch trójkątów, co implikuje, że  $u$  i  $v$  są typu  $3^2.4.3.4$ . Zatem  $\alpha$ , więc i każdy trójkąt, są typu wierzchołkowego  $((3^2.4.3.4)^3)$ . Stąd każdy wierzchołek parkietażu  $T$  jest typu  $3^2.4.3.4$  lub  $6^3$ , ale używając tylko tych wierzchołków nie uda się zbudować parkietażu. Sprzecznosc.

W dalszej części dowodu możemy przyjąć, że  $T$  nie ma wierzchołków typu  $3^2.4.3.4$ .

Jeśli  $T$  ma wierzchołek typu  $3^3.4^2$  każdy trójkąt jest typu płytkowego  $(3, 3, 4)$ . Zatem każdy trójkąt parkietazu  $T$  jest tego typu płytkowego, a każdy jego wierzchołek  $3^3.4^2$ ,  $6^3$ ,  $4^4$  lub  $3^6$ . Ponieważ parkietaż  $T$  ma mieć 3-, 4- i 6-kąty, musi wystąpić wierzchołek  $6^3$ . Sprzeczność, używając tylko tych wierzchołków nie uda się zbudować parkietazu.

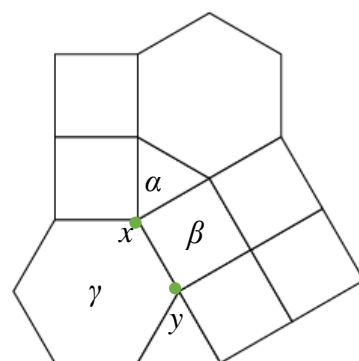
W dalszej części dowodu możemy przyjąć, że  $T$  nie ma wierzchołków typu  $3^3.4^2$ .

Jeśli  $T$  ma wierzchołek typu  $3.4.6.4$ , to każdy trójkąt jest typu płytkowego  $(4, 4, n)$ . Każdy wierzchołek  $T$  jest więc typu  $3.4^2.6$ ,  $3.4.6.4$ ,  $4^4$  lub  $6^3$ . Rozważmy wierzchołek  $x$  typu  $3.4.6.4$ . Jeśli nie występuje wierzchołek typu  $3.4^2.6$ , to wszystkie wierzchołki  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  są typu  $3.4^2.6$  (Rys. 59). Ale wtedy  $T$  byłby archimedesowy.



Rys. 59

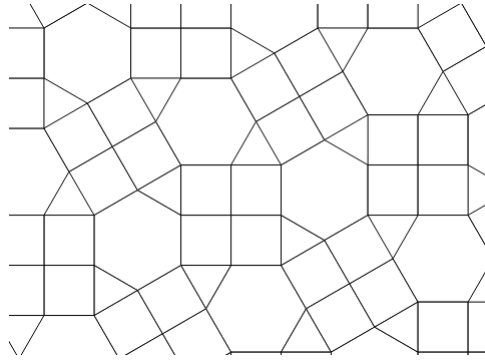
Zatem występuje wierzchołek  $3.4^2.6$ . Co implikuje, że  $\alpha$ , więc i każdy trójkąt, jest typu płytkowego  $(4, 4, 6)$  i wierzchołkowego  $((3.4^2.6)^2, 3.4.6.4)$  (Rys. 60).



Rys. 60

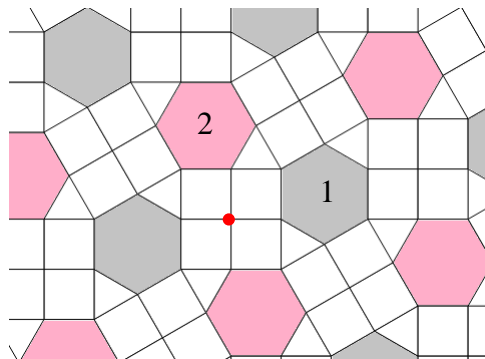
Jeśli  $y$  jest typu  $3.4^2.6$ , to  $\beta$  jest typu płytkowego  $(3, 4, 4, 6)$  i wierzchołkowego  $(3.4^2.6, 3.4.6.4, 3.4^2.6, 4^4)$ . Zatem każdy kwadrat jest tego typu. Podobnie  $\gamma$  jest typu płytkowego  $(3, 4, 4, 3, 4, 4)$  oraz wierzchołkowego  $(3.4.6.4, (3.4^2.6)^2, 3.4.6.4, (3.4^2.6)^2)$ . Wobec tego z 3-, 4- i 6-kątów foremnych można zbudować foremny wielokątowy parkietaż, który będzie wyglądał jak na rysunku poniżej (Rys. 61). Ponieważ parkietaż ten ma wierzchołki typów  $3.4^2.6$ ,  $3.4.6.4$  i  $4^4$ , oznaczmy go zatem będziemy jako  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$ .





Rys. 61. Parkietaż  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$ .

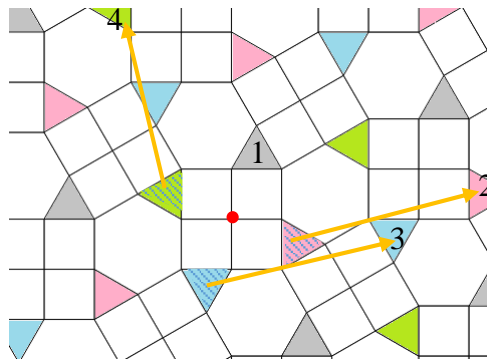
6-kątne płytki parkietażu  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$  występują w dwóch położeniach, zaznaczonych na poniższym rysunku dwoma kolorami. Płytki jednakowego koloru można przekształcać na siebie za pomocą translacji, będącej symetrią całego parkietażu. Aby przekształcać na siebie płytki różnych kolorów, potrzeba innych symetrii. Jeden ze sposobów przedstawia Rys. 62.



Rys. 62. Parkietaż  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$ .

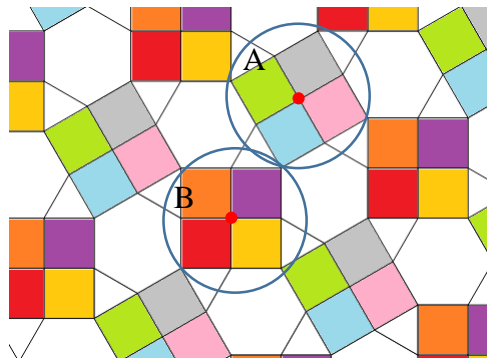
Przekształcając parkietaż  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$  przez obrót wokół punktu zaznaczonego na Rysunku 62 czerwoną kropką o kąt  $\frac{\pi}{2}$  w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, jako obraz szarego 6-kąta z numerem 1, otrzymujemy różowy 6-kąt z numerem 2. Następnie można za pomocą translacji, będącej symetrią całego parkietażu, przekształcić na obraz wyjściowego 6-kąta na dowolny inny 6-kąt drugiego koloru. Oznacza to, że wszystkie 6-kątne płytki tego parkietażu leżą w jednej orbicie.

Obroty o wielokrotność kąta  $\frac{\pi}{2}$  wokół punktu zaznaczonego na Rysunku 63 na czerwonego można wykorzystać, aby pokazać, że płytki trójkątne tego parkietażu leżą w jednej orbicie (argument jak dla trójkątnych płytek parkietażu  $(3^2.4.3.4)$  (Rys. 14) i parkietażu  $(3.4.3.12; 3.12^2)$  (Rys. 57)).



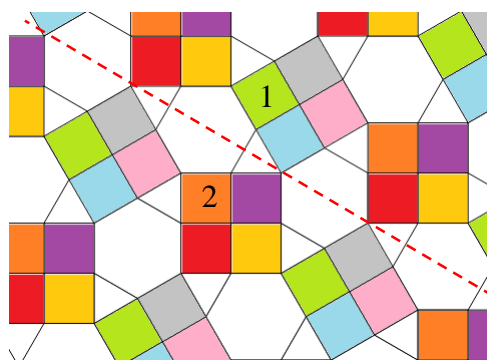
Rys. 63. Parkietaż  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$ .

Płytki kwadratowe parkietażu  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$  występują aż w 8 różnych położeniach zaznaczonych na poniższym rysunku różnymi kolorami. Zauważmy, że można je podzielić na dwie grupy (Rys. 64). W obrębie każdej z nich można przekształcać kwadratowe płytki na siebie za pomocą obrotów wokół zaznaczonych punktów dla każdej z grup (argument podobny jak dla trójkątnych płytek parkietażu  $(3^2.4.3.4)$  (Rys. 14), parkietażu  $(3.4.3.12; 3.12^2)$  (Rys. 57) i parkietażu  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$  (Rys. 63)).



Rys. 64. Parkietaż  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$ .

Ponieważ umiemy dowolną płytkę z grupy A przekształcić na dowolną inną płytkę z tej grupy oraz dowolną płytkę z grupy B przekształcić na dowolną inną występującą w tej samej grupie, wystarczy pokazać, że dowolną płytkę z grupy A, można przekształcić na wybraną płytkę z grupy B. Przykład takiego przekształcenia prezentuje poniższy rysunek (Rys. 65).



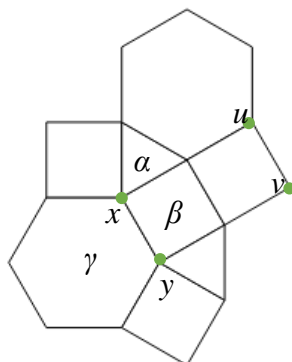
Rys. 65. Parkietaż  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$ .

Parkietaż  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$  przekształcamy przez symetrię osiową względem zaznaczonej na rysunku prostej. Obrazem kwadratowej płytki z grupy A oznaczonej numerem 1 jest płytkę z grupy B oznaczona numerem 2. W ten sposób pokazaliśmy, że dowolną kwadratową płytkę parkietażu  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$

można przekształcić na dowolną inną kwadratową płytkę tego parkietzu. Zatem wszystkie kwadratowe płytki tworzą jedną orbitę.

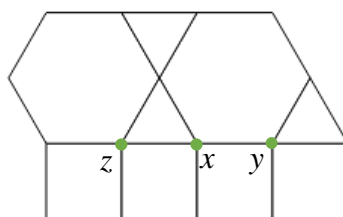
3-płytkowy parkietaż  $(3.4^2.6; 3.4.6.4; 4^4)$  ma trzy orbity – orbitę trójkątów, orbitę kwadratów i orbitę 6-kątów. Jest więc parkietażem 3-ekwitrantytnym, który jest również ekwitrantytny, ponieważ wszystkie jego przystające płytki leżą jednej orbicie.

Jeśli  $y$  (z Rys. 60) jest typu  $3.4.6.4$ ,  $\beta$  jest typu płytkowego  $(3, 4, 3, 6)$  i wierzchołkowego  $((3.4^2.6)^2, (3.4.6.4)^2)$  (Rys. 66). Każdy kwadrat jest więc tego typu, co  $\beta$ . Zatem  $u$  i  $v$  są typu  $3.4.6.4$  i  $uv$  jest krawędzią trójkąta. Sprzeczność, bo każdy kwadrat miał być typu  $(3, 4, 3, 6)$ .



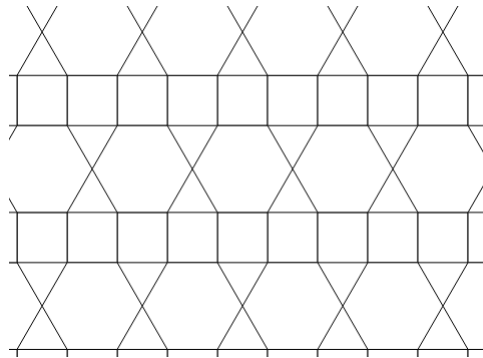
Rys. 66

Teraz możemy założyć, że  $T$  nie ma wierzchołków  $3.4.6.4$ . Ale wtedy, kiedy  $T$  ma kwadraty i nie jest archimedesowy, to musi wystąpić wierzchołek  $3.4^2.6$ . Każdy trójkąt jest więc typu płytkowego  $(4, 6, n)$ , a możliwe wierzchołki parkietażu  $T$  to  $3.4^2.6, 3^2.6^2, 3.6.3.6, 4^4, 6^3$ . Rozważmy wierzchołek  $x$  typu  $3.4^2.6$  (Rys. 67).



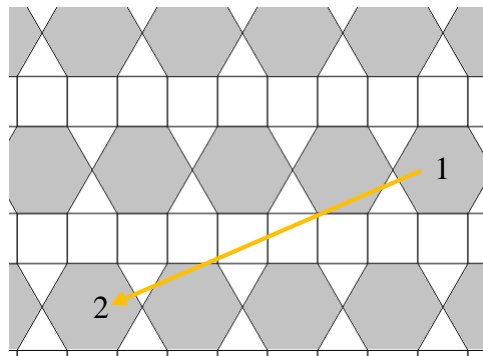
Rys. 67

Wtedy  $y$  i  $z$  są typu  $3.4^2.6$ , co implikuje, że każdy trójkąt jest typu płytkowego  $(4, 4, 6)$  i typu wierzchołkowego  $((3.4^2.6)^2, 3.6.3.6)$ , a każdy kwadrat jest typu płytkowego  $(3, 4, 6, 4)$  i typu wierzchołkowego  $((3.4^2.6)^4)$ . Nietrudno zauważyć, że te warunki jednoznacznie determinują parkietaż  $T$ , który wygląda jak na poniższym rysunku (Rys. 68). Oznaczać go będziemy od występujących w nim typów wierzchołków:  $(3.4^2.6; 3.6.3.6)$ .



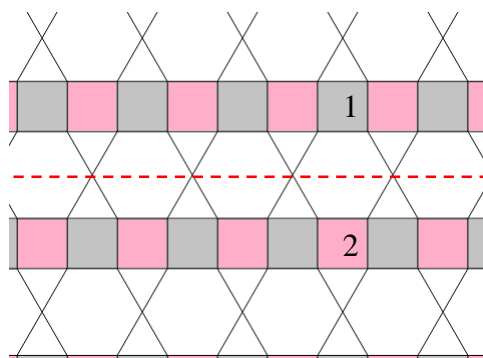
Rys. 68. Parkietaż  $(3.4^2.6; 3.6.3.6)$ .

Od razu widać, że wszystkie 6-kątne płytki parkietażu  $(3.4^2.6; 3.6.3.6)$  należą do jednej orbity. Dowlone 6-kątne płytki tego parkietażu można przekształcać na siebie za pomocą translacji, będącej symetrią całego parkietażu (Rys. 69).



Rys. 69. Parkietaż  $(3.4^2.6; 3.6.3.6)$ .

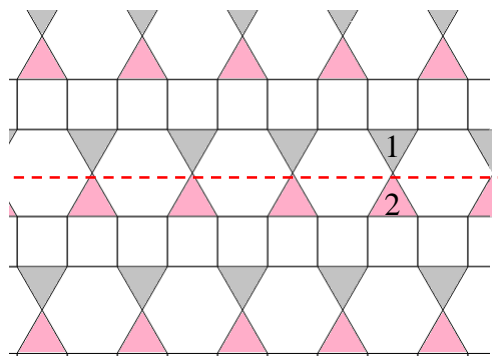
Płytki kwadratowe parkietażu występują w dwóch różnych położeniach. Płytki zaznaczone na poniższym rysunku jednakowym kolorem można przekształcać na siebie za pomocą translacji, będących symetrami całego parkietażu. Natomiast, aby przekształcić płytki różnych kolorów należy użyć dodatkowych przekształceń (Rys. 70).



Rys. 70. Parkietaż  $(3.4^2.6; 3.6.3.6)$ .

Obrazem szarej płytki z numerem 1 przez symetrię osiową parkietażu względem zaznaczonej czerwonej prostej jest różowa płytka z numerem 2, którą za pomocą translacji, będącej symetrią całego parkietażu, można przekształcić na dowolną inną tego koloru. Oznacza to, że wszystkie kwadratowe płytki parkietażu  $(3.4^2.6; 3.6.3.6)$  należą do jednej orbity.

Płytki trójkątne parkietazu  $(3.4^2.6; 3.6.3.6)$  również występują w dwóch położeniach. Aby przekształcić na siebie płytki trójkątne jednakowego koloru wystarczą translacje, które są symetrią całego parkietazu. Dla przekształcenia na siebie płytek różnego koloru, można użyć argumentu jak dla kwadratowych płytek tego parkietazu (symetria osiowa względem zaznaczonej prostej) (Rys. 71).



Rys. 71. Parkietaż  $(3.4^2.6; 3.6.3.6)$ .

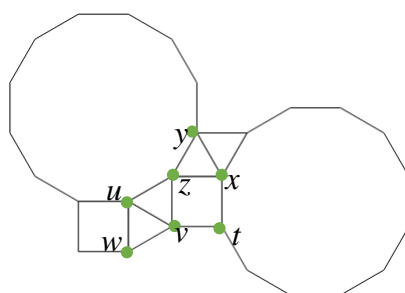
Teraz dowód Twierdzenia 2.3.1 jest kompletny.

## 2.4. Parkietaże foremne wielokątowe 4-ekwitrancytywne

**Twierdzenie 2.4.1.** *Istnieje dokładnie jeden 4-ekwitrancytywny parkietaż wielokątowy foremny, który jest ekwitrancytywny, mianowicie  $(3.4.6.4; 4.6.12)$ .*

**Dowód:** Niech  $T$  będzie 4-ekwitrancytywnym, który jest ekwitrancytywny. Wówczas  $T$  ma 4 rodzaje płytek, mianowicie 3-, 4-, 6- i 12-kąty foremne.  $T$  nie jest archimedesowy, ponieważ nie istnieją parkietaże archimedesowe z 4 rodzajami kafli.  $T$  ma co najmniej jeden 12-kąt foremny, więc przynajmniej jeden z wierzchołków jest typu  $3^2.4.12$ ,  $3.4.3.12$ ,  $3.12^2$  lub  $4.6.12$ .

Jeśli występuje wierzchołek typu  $3^2.4.12$  każdy trójkąt parkietazu  $T$  jest typu kafelkowego  $(3, 4, 12)$ . Załóżmy, że  $x$  jest typu  $3^2.4.12$  (Rys. 72).



Rys. 72

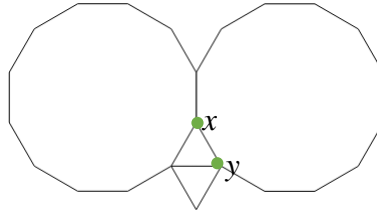
Wtedy  $yz$  jest krawędzią wspólną trójkąta i 12-kąta, zatem  $z$  jest typu  $3.4.3.12$ . Stąd wynika, że  $uv$  jest krawędzią dwóch trójkątów, więc  $v$  jest typu  $3^2.4.12$ . To implikuje, że  $vw$  jest krawędzią wspólną trójkąta i 12-kąta foremnego, co jest jednak niemożliwe (wierzchołek  $t$  musiałby być typu  $4.12.12$ , ale taki typ wierzchołka jest niemożliwy do zrealizowania – zobacz Fakt 1.11). Więc  $T$  nie ma wierzchołków typu  $3^2.4.12$ .

Jeśli  $T$  ma wierzchołek typu  $3.12^2$ , każdy trójkąt  $T$  jest typu  $(n, 12, 12)$ .

Jeśli  $n = 12$ , to natychmiast mamy, że każdy trójkąt jest typu wierzchołkowego  $((3.12^2)^3)$  i każdy 12-kąt jest typu wierzchołkowego  $((3.12^2)^{12})$ . Więc każdy wierzchołek  $T$  jest typu  $3.12^2$ ,  $4^4$  lub  $6^3$ . Sprzeczność (z tych wierzchołków nie da się zbudować parkietażu).

Jeśli  $n = 4$ , i wobec tego, że parkietaż  $T$  ma wierzchołek typu  $3.12^2$ , natychmiast mamy, że  $T$  jest 3-ekwitrantywnym parkietażem  $(3.4.3.12; 3.12^2)$ .

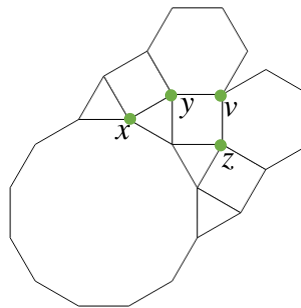
Zatem  $n = 3$ . Rozważmy wierzchołek  $x$  typu  $3.12^2$ , otrzymujemy konfigurację (Rys. 73).



Rys. 73

Ale wtedy  $y$  musi być typu  $3^2.4.12$ . Sprzeczność, pokazaliśmy, że nie ma takich wierzchołków. Zatem  $T$  nie ma również wierzchołków typu  $3.12^2$ .

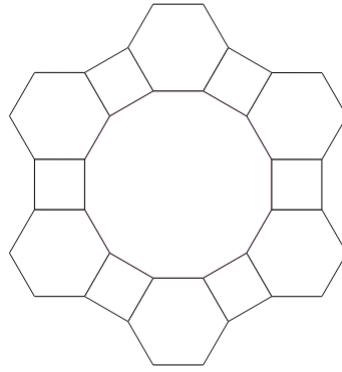
Jeśli  $T$  ma wierzchołek typu  $3.4.3.12$ , to od razu mamy, że każdy 12-kąt jest typu wierzchołkowego  $((3.4.3.12)^{12})$  i każdy trójkąt jest typu płytkowego  $(4, 4, 12)$ . Wobec tego każdy wierzchołek  $T$  jest typu  $3.4.3.12$ ,  $3.4.6.4$  lub  $6^3$  (pozostałe odrzucamy, bo dawałyby inne typy płytkowe trójkątów). Załóżmy teraz, że wierzchołek  $x$  jest typu  $3.4.3.12$  (Rys. 74).



Rys. 74

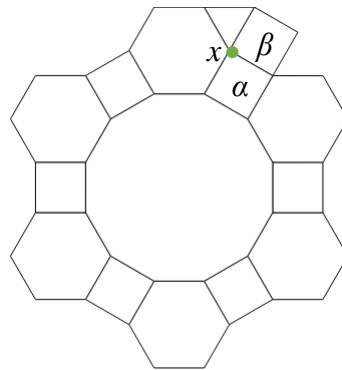
Wynika stąd, że  $y$  i  $z$  są typu  $3.4.6.4$ , co jest jednak niemożliwe. Nie istnieje bowiem wierzchołek typu  $6.4.6.m$  dla naturalnego  $m$  (zobacz Fakt 1.11). Więc  $T$  nie ma wierzchołków typu  $3.4.3.12$ .

Wynika stąd, że występuje wierzchołek  $4.6.12$  i każdy 12-kąt jest typu wierzchołkowego  $((4.6.12)^{12})$ . Rozważmy teraz 12-kąt, otrzymujemy poniższą konfigurację (Rys. 75).



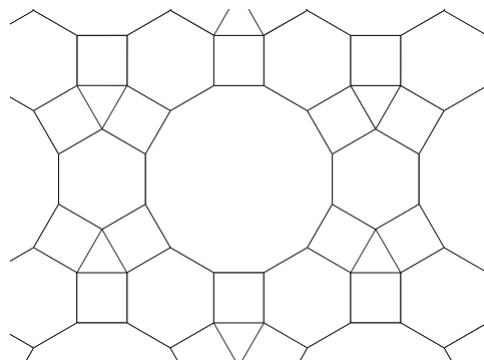
Rys. 75

$T$  nie jest archimedesowy, więc co najmniej jeden wierzchołek nie jest typu 4.6.12. Wobec tego  $x$  jest typu 3.4<sup>2</sup>.6 lub 3.4.6.4. Jeśli  $x$  jest typu 3.4<sup>2</sup>.6, to każdy  $\alpha$ , więc i każdy kwadrat jest typu płytkowego (4, 6, 12, 6) (Rys. 76). Ale  $\beta$  jest kwadratem i sąsiaduje z trójkątami. Sprzeczność.



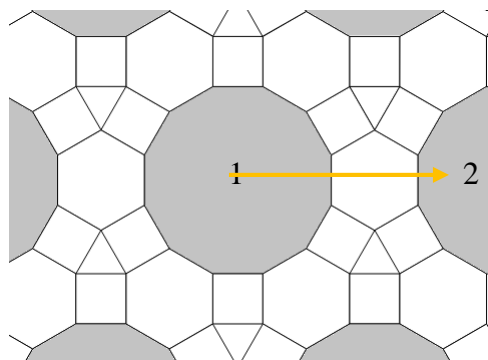
Rys. 76

Wobec powyższego  $x$  jest typu 3.4.6.4, co implikuje, że  $T$  wygląda jak na poniższym rysunku.  $T$  jest więc parkietazem wielokątowym foremnym o wierzchołkach 4.6.12 i 3.4.6.12, którego będziemy oznaczać (4.6.12; 3.4.6.4) (Rys. 77).



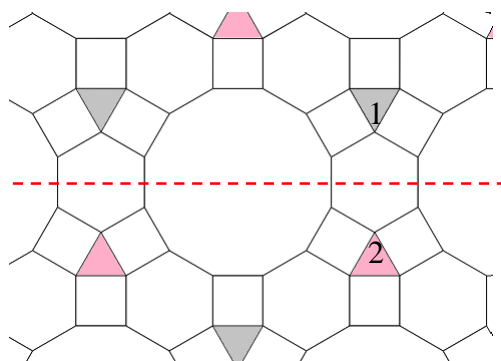
Rys. 77. Parkietaż (4.6.12; 3.4.6.4).

Łatwo zauważyć, że płytki 12-kątne parkietażu (4.6.12; 3.4.6.4) leżą w jednej orbicie. Aby przekształcać 12-kątne płytki tego parkietażu na inne wystarczą translacje, które są symetrią całego parkietażu (Rys. 78).



Rys. 78. Parkietaż (4.6.12; 3.4.6.4).

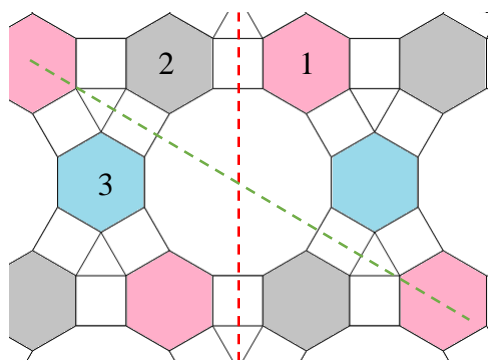
Płytki trójkątne parkietaż (4.6.12; 3.4.6.4) są dwojakiemu rodzaju. Zaznaczono je na poniższym rysunku dwoma kolorami. Aby przekształcić płytki jednakowego koloru, używamy translacji, które są symetrią całego parkietażu. Płytki różnego koloru można przekształcić na siebie na przykład tak jak na Rys. 79.



Rys. 79. Parkietaż (4.6.12; 3.4.6.4).

Obrazem szarej płytki z numerem 1 przez symetrię osiową parkietażu względem czerwonej prostej jest różowa płytki z numerem 2, którą następnie można przekształcić na dowolną inną tego koloru za pomocą translacji, będącej symetrią całego parkietażu. W ten sposób pokazaliśmy, że wszystkie trójkątne płytki parkietażu (4.6.12; 3.4.6.4) leżą w jednej orbicie.

Płytki 6-kątne parkietażu (4.6.12; 3.4.6.4) występują w trzech różnych położeniach. Płytki zaznaczone jednym kolorem można przekształcać na siebie za pomocą translacji, która jest symetrią całego parkietażu. Aby przekształcać płytki różnych kolorów można wykorzystać sposób zaproponowany poniżej (Rys. 80).

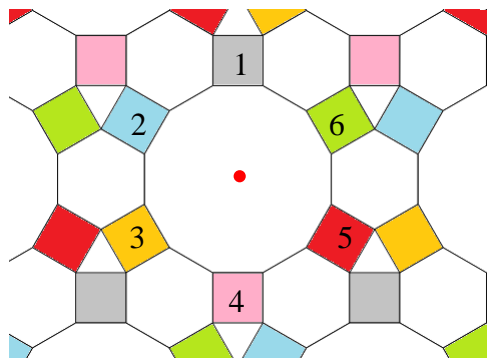


Rys. 80. Parkietaż (4.6.12; 3.4.6.4).



Obrazem różowej płytki z numerem 1 przez symetrię osiową parkietażu względem czerwonej prostej jest szara płytka z numerem 2. Obrazem szarej płytki z numerem 2 przez symetrię osiową parkietażu względem zielonej prostej jest natomiast niebieska płytka z numerem 3. W ten sposób pokazaliśmy, że 6-kątną płytkę dowolnego koloru, można przekształcić na inną 6-kątną płytkę dowolnego koloru. Oznacza to, że wszystkie 6-kątne płytki parkietażu (4.6.12; 3.4.6.4) należą do jednej orbity.

Płytki kwadratowe występują w parkietażu (4.6.12; 3.4.6.4) aż w sześciu różnych położeniach. Jednym ze sposobów przekształcenia na siebie płytek kwadratowych o różnych kolorach jest użycie obrotów względem punktu zaznaczonego na Rys. 81 na czerwono (środek 12-kąta).



Rys. 81. Parkietaż (4.6.12; 3.4.6.4).

Przez obroty wokół zaznaczonego punktu, będące symetrami całego parkietażu, można przekształcić szary kwadrat z numerem 1 na kwadraty oznaczone numerami 2, 3, 4, 5, 6 wykonując obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara o kąt odpowiednio:  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{4\pi}{3}$ ,  $\frac{5\pi}{3}$ . Każdy z tych kwadratów można z kolei za pomocą translacji, będących symetrami całego parkietażu, przekształcić na dowolny inny kwadrat w tym samym kolorze. Oznacza to, że wszystkie kwadratowe płytki parkietażu (4.6.12; 3.4.6.4) leżą w jednej orbicie.

Parkietaż 4-płytkowy (4.6.12; 3.4.6.4) ma cztery orbity – orbitę trójkątów, orbitę kwadratów, orbitę 6-kątów i orbitę 12-kątów. Jest więc parkietażem 4-ekwitrantywnym, który jest ponadto ekwitrantywny, ponieważ wszystkie jego przystające płytki należą do jednej orbity.

W ten sposób zakończyliśmy dowód Twierdzenia 2.4.1, znajdując parkietaż ekwitrantywny, który jest 4-ekwitrantywny.

## 2.5. Wnioski

Z Faktu 2.1.1 oraz Twierdzeń 2.2.1, 2.3.1, 2.4.1 wynika natychmiast następujący wniosek:

**Wniosek 2.5.1.** *Istnieją dokładnie 22 ekwitrantywnne parkietáže wielokątowe foremne, mianowicie:  $(3^6)$ ,  $(4^4)$ ,  $(6^3)$ ,  $(3^3 \cdot 4^2)$ ,  $(3^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4)$ ,  $(3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6)$ ,  $(3 \cdot 12^2)$ ,  $(4 \cdot 8^2)$ ,  $(3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4)$ ,  $(4 \cdot 6 \cdot 12)$ ,  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2)$ ,  $(3^4 \cdot 6; 3^2 \cdot 6^2)$ ,  $(3^3 \cdot 4^2; 4^4)$ ,  $(3^2 \cdot 6^2; 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6)$ ,  $(3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 12; 3 \cdot 12^2)$ ,  $(3 \cdot 4^2 \cdot 6; 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6)$ ,  $(3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4; 4 \cdot 6 \cdot 12)$ ,  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2; 6^3)$ ,  $(3^4 \cdot 6; 3^2 \cdot 6^2; 6^3)$ ,  $(3^2 \cdot 6^2; 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6; 6^3)$ ,  $(3 \cdot 4^2 \cdot 6; 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4; 4^4)$ ,  $(3^6; 3^2 \cdot 6^2; (4^4)^2)$ .*

## Bibliografia

- [1] I. Debroey and F. Landuyt, *Equitransitive edge-to-edge tilings by regular convex polygons*, Geometriae Dedicata 11 (1981), 47-60.
- [2] B. Grünbaum, G.C. Shephard, *Tilings & Patterns*, Dover Publications, New York (2016), 59-60.
- [3] P. Kumaszka, *O kilku rodzajach regularnych parkietazy płaszczyzny*, Wrocław (2015).
- [4] Sz. Jeleński, *Śladami Pitagorasa*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa (1956), 196-204.