Uniwersytet Wrocławski
Instytut Matematyczny

Parkietaże typu Eschera na płaszczyźnie

Emilia Chmielewska

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław, 2002 rok

Wstęp

W tej pracy będę zajmować się pewnymi parkietażami płaszczyzny zainspirowanymi grafikami holenderskiego artysty M.C.Eschera. Punktem wyjścia będą parkietaże, w których wzory umieszczone są na płytkach kwadratowych. Przystępując do poszukiwań parkietaży tego typu musimy przede wszystkim określić ich charakterystykę. Można więc stwierdzić, że jest to pewien sposób umieszczania wzorów na poszczególnych kwadratach, który ma własność regularnej powtarzalności. Oznacza to, że tak dobieramy rozmieszczenia wzorów na sąsiednich klepkach, względem ustalonej płytki, aby nie zależało to od wyboru ustalonej kwadratowej klepki.

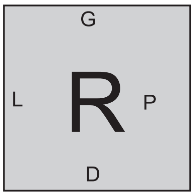
Głównym celem mojej pracy jest klasyfikacja wszystkich regularnych parkietaży, gdzie pojedyńczą klepką jest kwadrat.

Rozdział 1

Regularne sposoby rozmieszczania wzorów w parkietażu z kwadratami

Parkietażami będziemy nazywać sposoby rozmieszczenia jednakowych wzorów pokrywających kwadratowe płytki na płaszczyźnie. Trzeba zaznaczyć, że te wzory nie mogą mieć żadnych symetrii. Możemy sobie wyobrażać, że wzór przedstawia konkretny niesymetryczny obrazek: psa, rybkę, ptaka - jak w przypadku prac M.C.Eschera. W tej pracy symbolicznie wzór będziemy oznaczać R. Jest to jedynie reprezentant takich wzorów - zamiast tej litery może być jakikolwiek niesymetryczny wzór.

Niesymetryczność wzoru pozwala na rozróżnianie poszczególnych boków na płytce ze względu na położenie względem wzoru.W tej pracy przyjmuję taka konwencję oznaczeń:

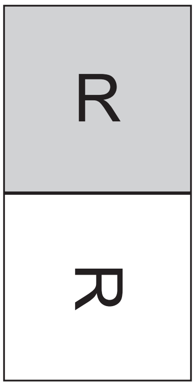


G - górna strona wzoru
P - prawa strona wzoru
D - dolna strona wzoru
L - lewa strona wzoru

Jeśli wzór na kolejnej klepce będzie ułożony inaczej - odpowiednie nazwy stron muszą być przypisane w odpowiedni sposób. Regularność dotyczy rozmieszczenia wzoru na sąsiednich płytkach. Są cztery rodzaje sąsiednich płytek:

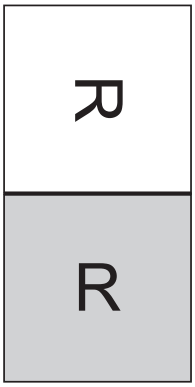
1. Przez bok P

2. Przez bok D



3. Przez bok L

4. Przez bok G

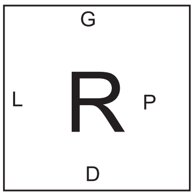


Para sąsiednich płytek sąsiaduje przez określony rodzaj boku. Sąsiedztwo nie zależy więc od płytki ale od typu boku. Regularność jest wtedy gdy dla każdego rodzaju par, pary są przystające. Pary tego samego typu są przystające. Typ to nazwa boku, przez który odbywa się sąsiedztwo.

Rozdział 2

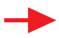
Reguły przenoszenia wzorów

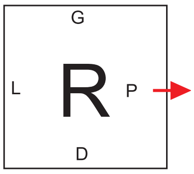
Oznaczmy boki kwadratowej klepki z niesymetrycznym wzorem w następujący sposób:



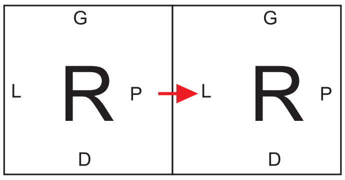
G - góra, P - prawo, D - dół, L - lewo
GP, PD, DL, LG oznaczają naroża (wierzchołki) pomiędzy odpowiednimi bokami.

2.1.
Przejście przez bok kwadratowej płytki na sąsiednią może odbyć się na osiem sposobów (bo jest osiem przekształceń, które przeprowadzają kwadrat na kwadrat). Oto one oraz ich graficzne oznaczenia (dobrane tak, aby łatwo skojarzyć symbol z konkretnym przekształceniem):

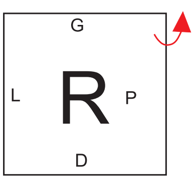
- Translacja, którą oznaczamy 



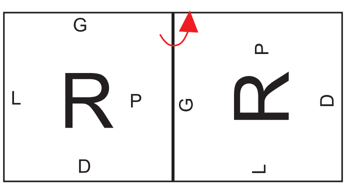
Po przejściu przez bok P na sąsiednią klepkę otrzymujemy:



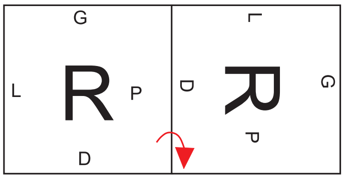
- Obrót wokół górnego naroża o 90°, oznaczenie 



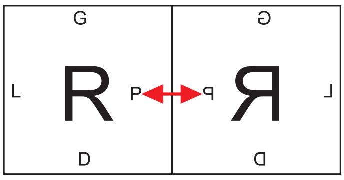
A po wykonaniu obrotu mamy:



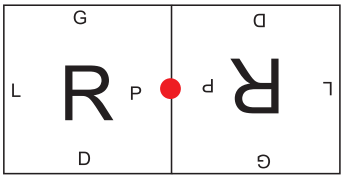
· Obrót wokół dolnego naroża o 90°, oznaczamy



· Symetria względem boku, oznaczenie

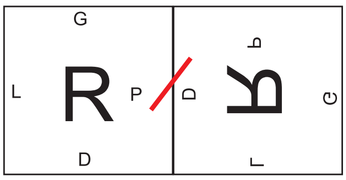


· Obrót o 180° względem środka boku, oznaczenie

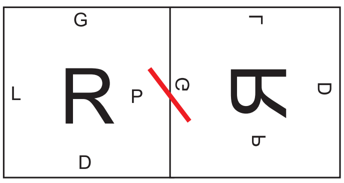


Oraz trzy symetrie z poślizgiem (te trzy symetrie przekształcają kwadrat dokładnie na ten sam kwadrat, a poślizg umożliwia przesunięcie na sąsiednią klepkę)

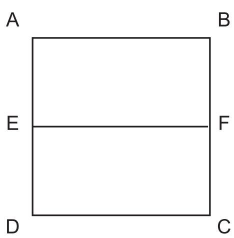
· Symetria względem przekątnej prawostronnej, oznaczamy



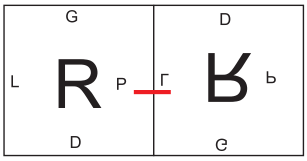
· Symetria względem przekątnej lewostronnej, oznaczamy



· Symetria względem odcinka EF, takiego że EF || AB, EF || DC i |AE| = |ED|, |BF| = |FC|



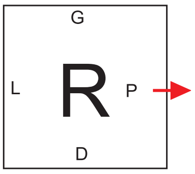
Oznaczenie



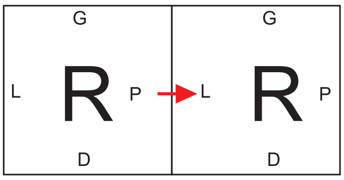
2.2.

Zobaczmy, czy istnieją zasady, których powinniśmy przestrzegać przenosząc wzór przez bok na sąsiednią klepkę

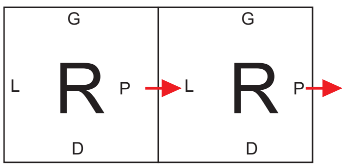
A. Niech na boku P określona będzie translacja



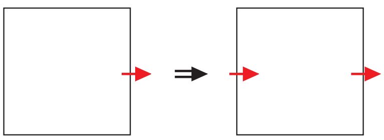
Przechodząc przez ten bok dostajemy



Widzimy, że na nowo otrzymanej klepce na boku P (zgodnie z zasadą regularności) musi znaleźć się translacja.

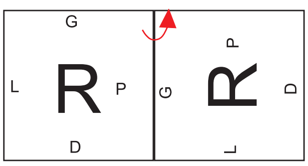


Oto pierwsza zasada - **zasada A.**

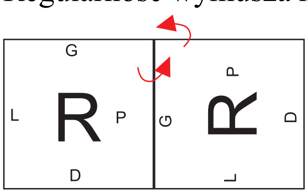


Jeśli na jednym boku wzór przenosimy przez translację, to na przeciwległym boku też musi być translacja.

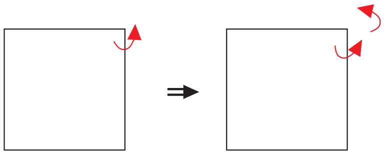
B. Jeżeli na GP narożu zadany będzie obrót o 90°, to przechodząc do kolejnej płytki mamy:



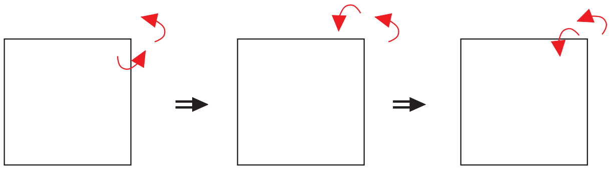
Regularność wymusza na nowej płytce obrót o 90° w GP narożu.



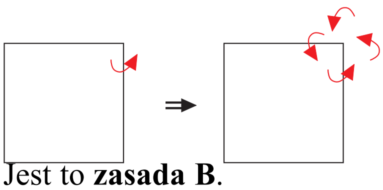
Otrzymujemy



Rozumując jak wcześniej dostajemy:



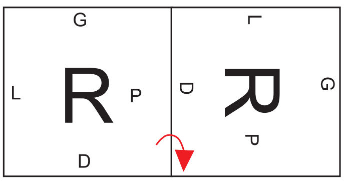
Czyli:



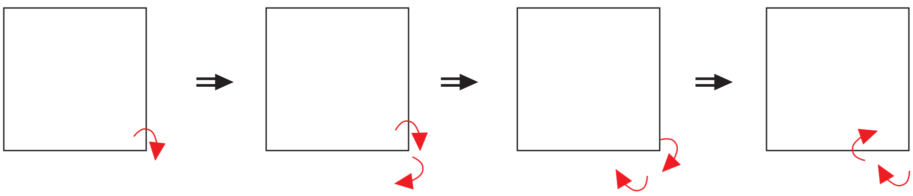
Jest to **zasada B**.

Jeśli na jednym boku mamy określony obrót o 90° to przez drugi, trzeci, czwarty bok zawierający ten wierzchołek przeniesienie wzoru też musi być obrotem o 90° wokół teg samego wierzchołka.

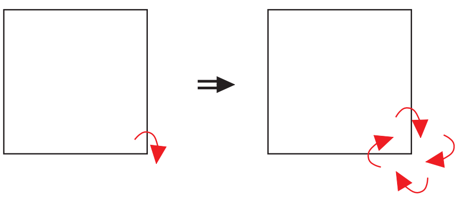
C. Kiedy na PD narożu będzie określony obrót o 90° to na kolejnej płytce mamy:



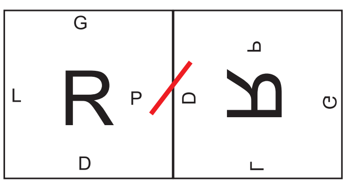
Wnioskując jak w 2.2. B. dostajemy:



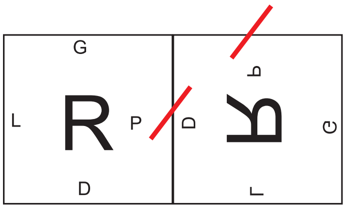
Zasada C mówi:



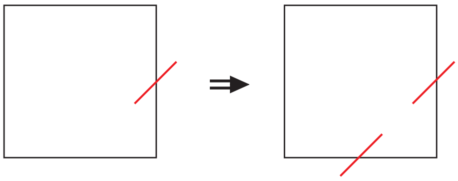
D. Niech na P będzie odbicie względem przekątnej prawostronnej z poślizgiem.



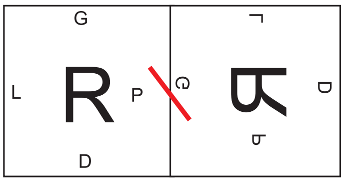
Regularność daje nam:



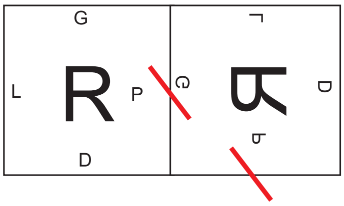
Na boku D nowej płytki mamy to samo przekształcenie co na boku P. Otrzymaliśmy **zasadę D**



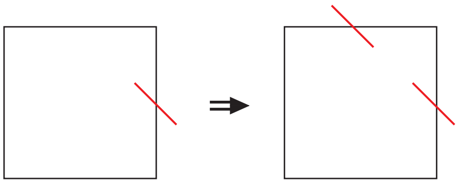
E. Jeżeli na boku P określone będzie odbicie względem przekątnej lewostronnej z poślizgiem, to mamy:



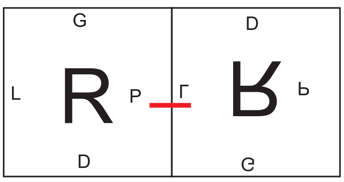
Regularność wymaga, żeby na boku P było odbicie. Uzupełniamy.



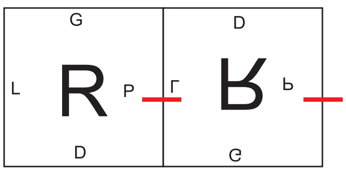
Zasada E:



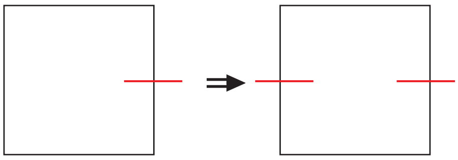
F. Na P mamy symetrię względem odpowiedniego odcinka z poślizgiem.



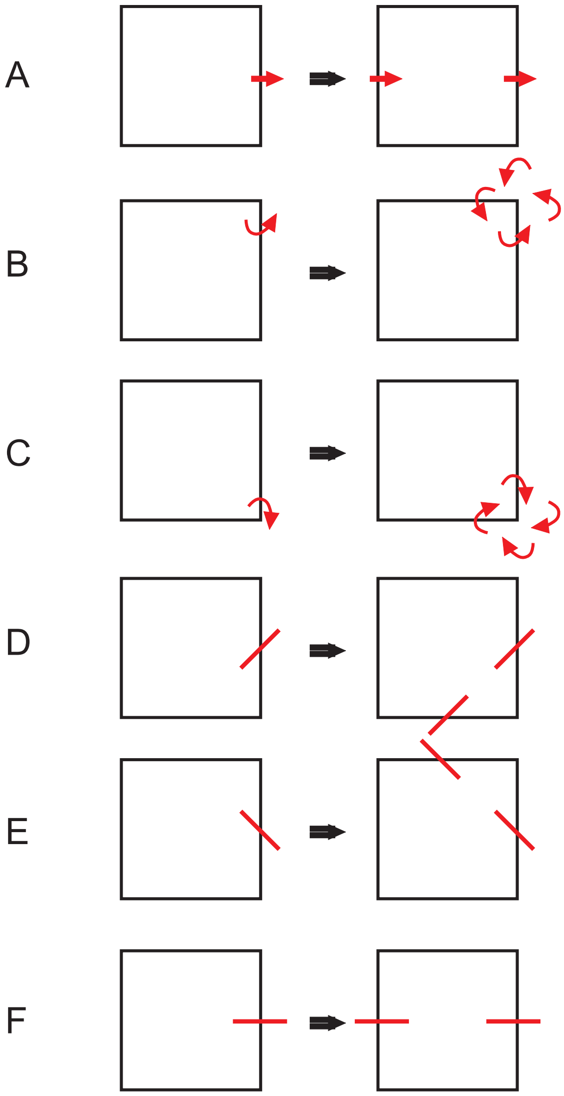
Aby wzór był regularny na boku P musi być określona już wcześniej symetria.



Otrzymaliśmy **zasadę F**



Pozostałe dwa przekształcenia nie doprowadzą nas do sformułowania podobnych zasad. Otrzymaliśmy sześć zasad, które obowiązują przy przechodzeniu do klepek sąsiednich.



Zasady B i C potraktujemy jako jedną. Zamiast rozpatrywać odbicia względem dwóch przekątnych: prawostronnej i lewostronnej ograniczymy się do odbicia względem przekątnej. Podobnie zasady D i E sprowadzimy do jednej. Pozwoli nam to zamiast dwoma obrotami zająć się jednym: obrotem o 90° wokół naroża. Ostatecznie zamiast ośmiu przekształceń dostajemy sześć:

1 - translacja

2 - obrót o 90° wokół naroża

3 - symetria względem boku

4 - obrót o 180° wokół środka boku

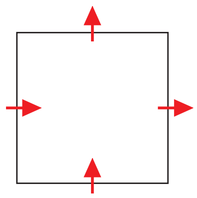
5 - symetria względem przekątnej z poślizgiem

6 - symetria względem odcinka z poślizgiem (jest to odcinek określony w rozdziale 2.1.)

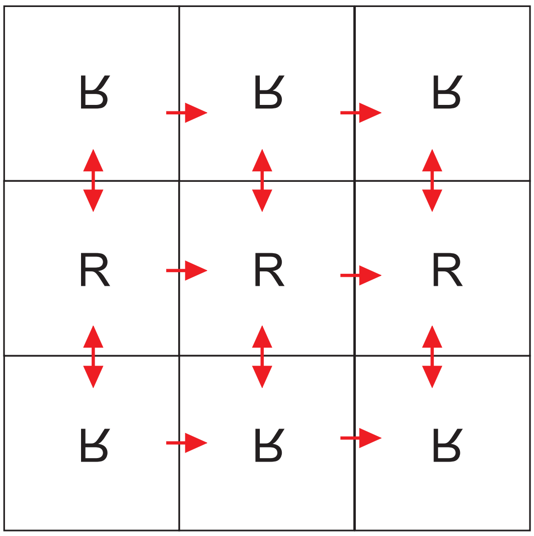
2.3.

Układ reguł sprzeczny i niesprzeczny

Reguła: na kwadracie, na każdym boku umieszczamy symbole przekształceń (od 1 do 6). Nie mogą być one umieszczone dowolnie, lecz zgodnie z wyprowadzonymi wcześniej zasadami (od A do F). Przykładowa reguła wygląda tak:

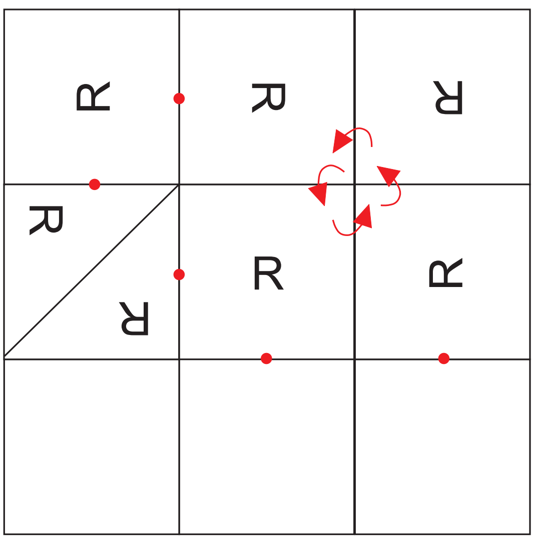


Jeżeli na układzie reguł złożonym z dziewięciu kwadratów sąsiadowanie wzorów na dowolnych dwóch płytkach jest zgodne z regułą, to wtedy jest to **układ reguł niesprzeczny.**



Widać, że przy przechodzeniu przez boki kolizja nie nastąpiła.

W przeciwnym wypadku, gdy przy przechodzeniu przez boki nie mamy zgodności z naszą regułą mówimy o **układzie reguł sprzecznym.** Oto przykład takiego układu:

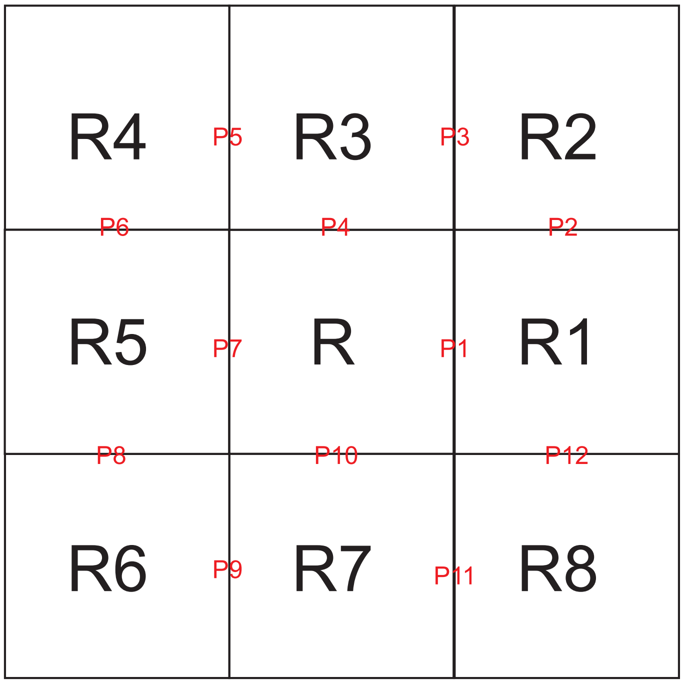


2.4.

Chcę pokazać, że:

Jeśli reguła przenoszenia wzorów jest niesprzeczna, to za jej pomocą możemy wypełnić wzorami wszystkie kwadratowe klepki na płaszczyźnie.

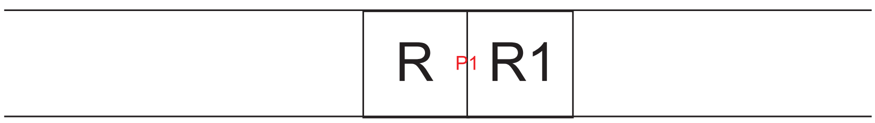
Mamy dowolny niesprzeczny układ dziewięciu kwadratowych klepek. Ponieważ będziemy się do niego odwoływać, nazwiemy go (*)



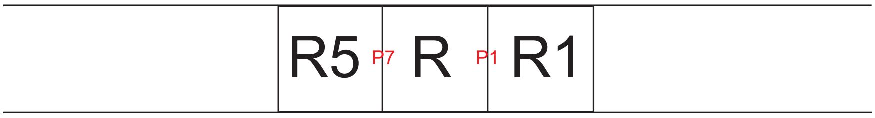
R1, R2, ... , R8 - sposoby rozmieszczenia wyjściowego wzoru na kwadratach.
P1, ..., P12 - określenia sposobu przejścia z jednej klepki na sąsiednią przez bok (są to przekształcenia od 1 do 6 z 2.2.)

Kolejno chcę przenosić wzór na całą płaszczyznę. Zacznę od poziomego pasa. Klepka ze wzorem R jest klepką wyjściową.

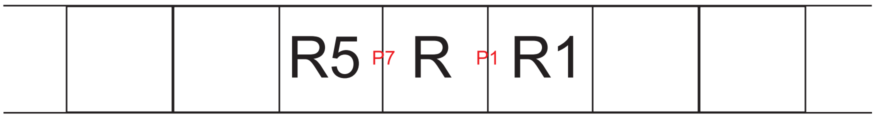
Zapełniamy cały ten pas wzorami, zgodnie z regułą. Przekształceniem P1 przechodzimy na płytkę sąsiednią przez bok i otrzymujemy wzór R1.



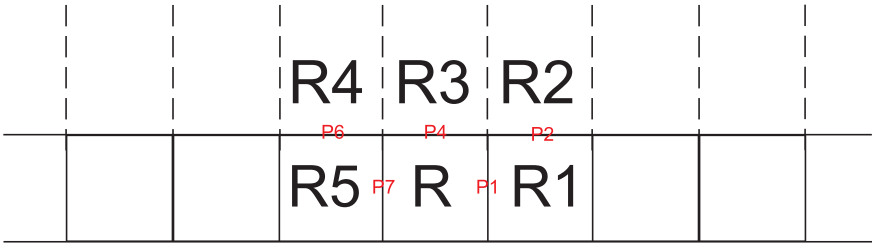
Natomiast przechodząc przez przekształcenie P7 (lewy bok R) otrzymujemy wzór R5.



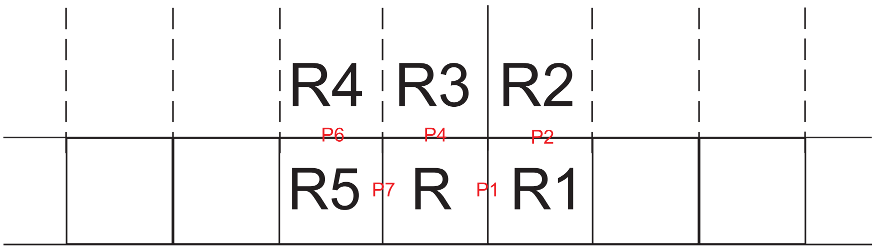
Dalej przechodzimy na prawo i lewo - wypełniamy cały pas zgodnie z regułą.



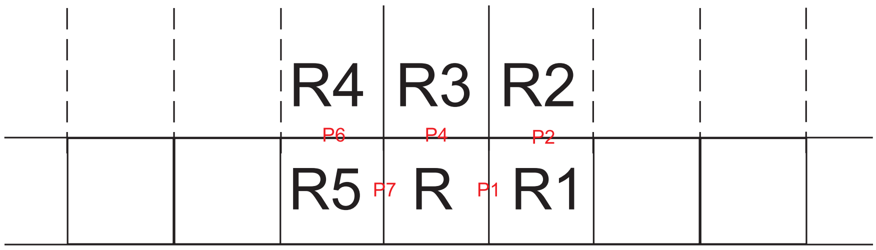
Pas został wypełniony. Wzory sąsiadują tak, jak powinny. Nie musimy obawiać się, że przy przechodzeniu przez boki będzie zachodziła sprzeczność.
Przenosimy wzór o jeden pas wyżej - znów zgodnie z ustaloną regułą. Dla R5, R i R1 w górę przechodzimy odpowiednio przekształceniami P6, P4 i P2



Powyżej R1 mamy R2, nad R jest R3 a nad R5 pojawił się wzór R4. Teraz groźba sprzeczności dotyczy każdego boku zaznaczonego przerywaną linią. Nie mamy pewności, czy sposób sąsiadowania wzorów na kwadratach graniczących ze sobą przez te boki jest zgodny z wyznaczoną regułą przenoszenia wzorów.
Rozważmy układ złożony z czterech kwadratów: ze wzorami R2 i R3 oraz dwóch poniżej. Zauważmy, że cztery kwadraty z analogicznie rozmieszczonymi wzorami powinny pojawić się w układzie z dziewięcioma kwadratami. Odszukajmy te cztery kwadraty w układzie (*). Widzimy, że tam przy przejściu z płytki ze wzorem R2 do R3 otrzymaliśmy zgodność, więc zgodność obowiązuje również w tym miejscu na pasie poziomym. Możemy przerywaną linię zamienić na linię ciągłą (oznaczającą zgodność z regułą przenoszenia wzorów przy przejściu przez bok)



Przenosząc zgodnie z regułą wzór R5 w górę przekształceniem P6 otrzymujemy wzór R4. Cztery kwadraty (R, R3, R4, R5) z tak samo rozmieszczonymi wzorami muszą pojawić się w układzie (*). Odszukując je zauważamy, że przy przejściu z R3 na R4 przekształceniem P5 otrzymujemy zgodność z przyjętą regułą. Stąd wniosek, że zgodność na poziomym pasie (przy przejściu przez ten sam bok) również musi zachodzić. Zamieniamy przerywaną linię na ciągłą, bo kolizja nie nastąpiła.



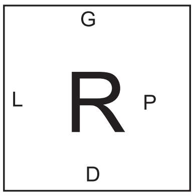
Podobne rozumowanie pozwala nam zastąpić wszystkie przerywane linie ciągłymi.
Następnie przenosimy wzory o pasy w górę i w dół, aż wypełnimy całą płaszczyznę. Będziemy wykorzystywać zgodność między pozostałymi bokami układu (*). W ten sposób widać, że jeżeli na dziewięciu kwadratach reguła prowadzi do zgodności, to również na całej płaszczyźnie zachodzi zgodność.

Rozdział 3.

Klasyfikacja parkietaży

Będziemy klasyfikować wszystkie możliwe regularne sposoby przechodzenia z jednej klepki do sąsiednich. Zajmiemy się rozważaniem układów złożonych z dziewięciu klepek (zgodnie z twierdzeniem zawartym we wcześniejszym rozdziale)

Oznaczmy wyjściową płytkę:



Ponumerujmy każdą klepkę układu:

V	IV	III
VI	I	II
VII	VII	IX

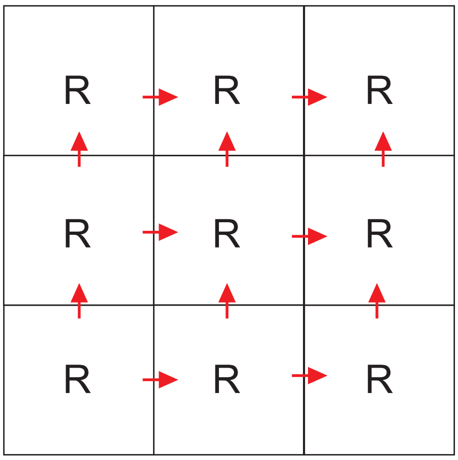
3.1.

Zacznijmy od zasady A: (rozdział 2 strona 8)

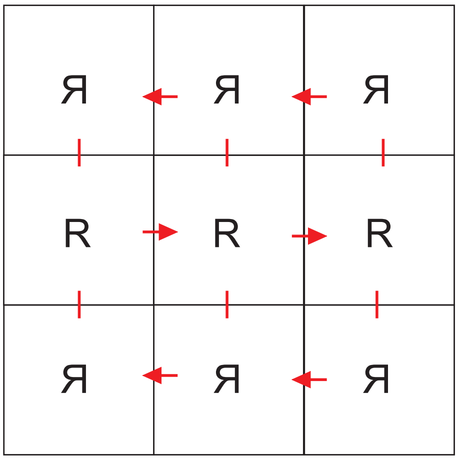
- Jeżeli L = 1 to P = 1 (zgodnie z numeracją rozdział 2 strona 8)

Będziemy dobierali przekształcenia, które mogą znaleźć się na boku D i G. Od razu możemy wykluczyć 2 i 5 (dotyczą one sąsiednich boków).

Niech G = 1, wtedy automatycznie D = 1 (z zasady A)



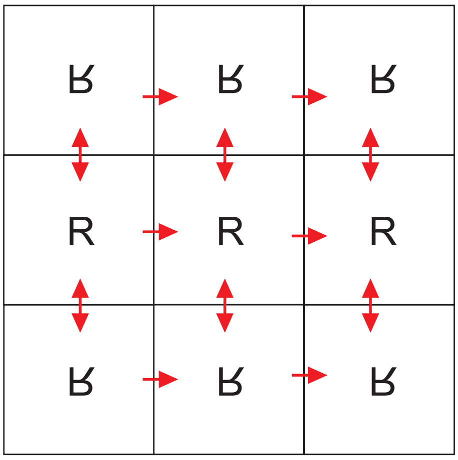
Przy przejściach na sąsiednie boki nie nastąpiły żadne kolizje. Mamy pierwszy parkietaż.
Podobnie można zauważyć, że jeżeli D = 6, to G = 6 (zasada F)



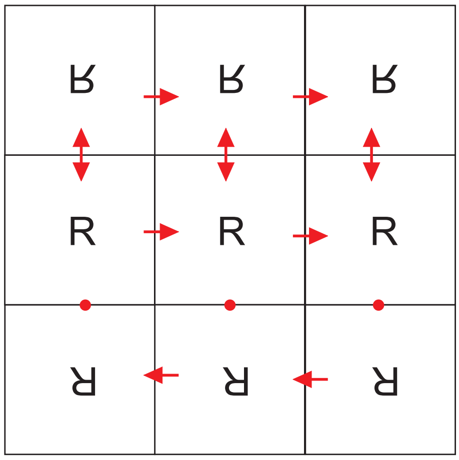
Otrzymaliśmy kolejny rodzaj parkietażu.

- Niech G = 3, wtedy D = 3 lub D = 4

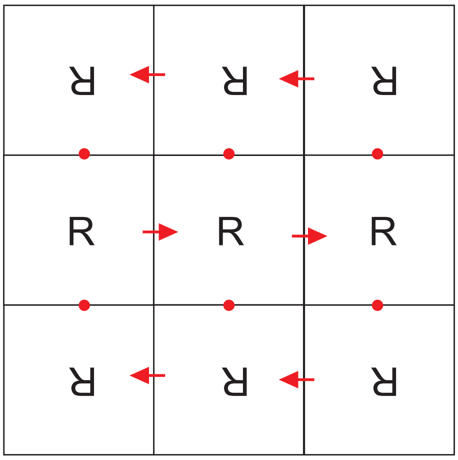
G = D = 3



G = 3, D = 4



Dostaliśmy kolejne typy parkietaży.
Pozostał jeszcze do sprawdzenia G = 4 i wtedy może być tylko D = 4 (pozostałe przypadki są rozstrzygnięte)



Widzimy, że korzystając z zasady A dostaliśmy pięć różnych regularnych parkietaży.

3.2.

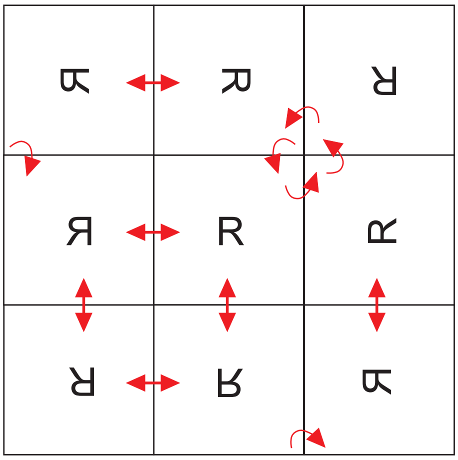
Reguły B i C dają nam:

- G = P = 2

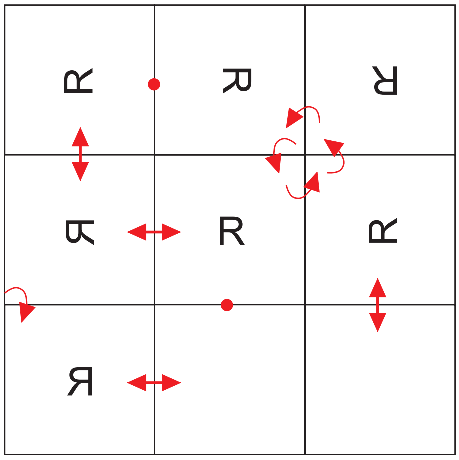
Wtedy szukamy wszystkich możliwych przekształceń, które mogą być na L i D. Od razu wykluczamy 1 i 6 (zgodnie z zasadami A i F)

- Jeżeli L = 3, to D = 3 lub D = 4

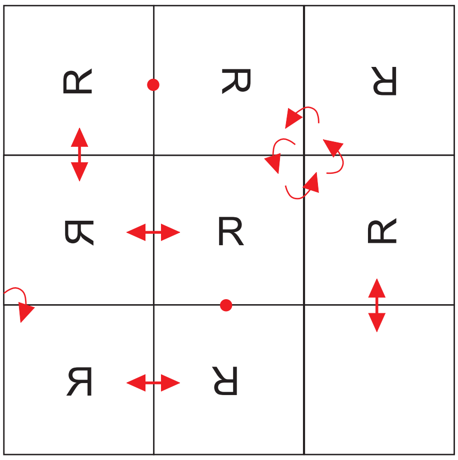
L = 3 = D



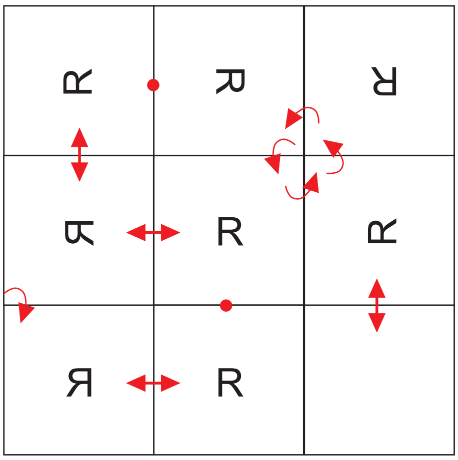
L =3, D = 4



Przechodząc z klepki I na VIII otrzymujemy:



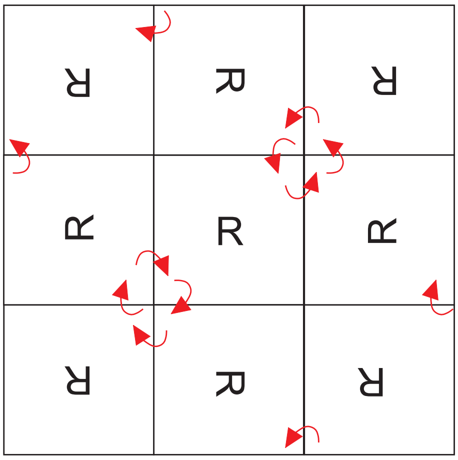
Natomiast przechodząc z płytki VII na VIII dostajemy:



Widzimy, że na płytce VIII otzymaliśmy dwa różne wzory.

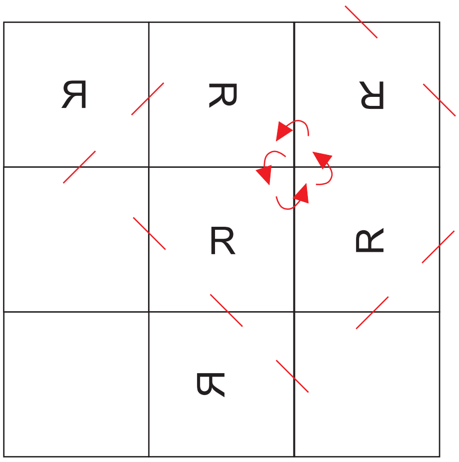
Z takiego położenia przekształceń, gdzie G = P = 2 i L = 3, D = 4 nie uzyskamy parkietażu.

- Jeżeli L = 2, to D = 2

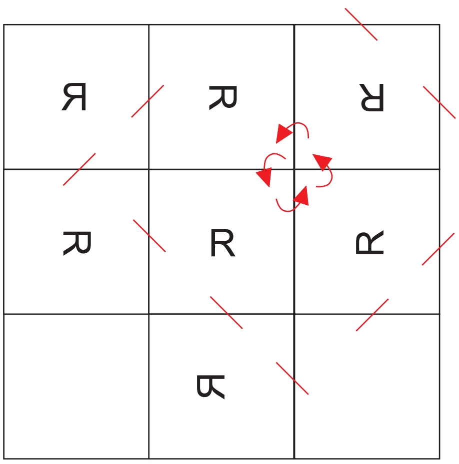


Mamy kolejny parkietaż.

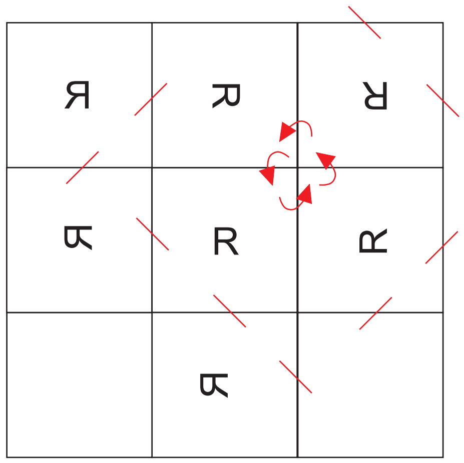
- Jeżeli L = 5, to D = 5 (zasada E)



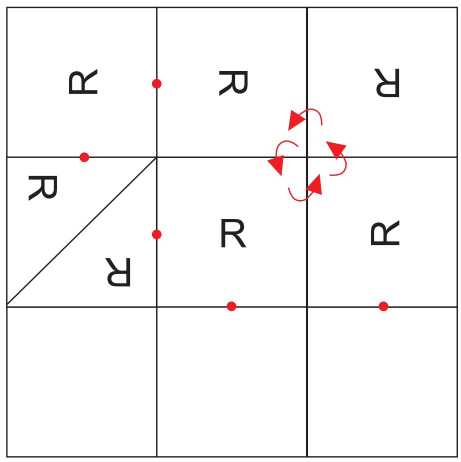
Przechodząc z płytki V na VI dostajemy:



A z płytki I na VI:



Widzimy więc sprzeczność na klepce nr VI.
Jeżeli L = 4, to do sprawdzenia mamy tylko D = 4, ale to daje nam sprzeczność na polu nr VI.



Korzystając z zasad B i C okazuje się, że z pięciu przypadków na parkietaż nadają się tylko dwa.

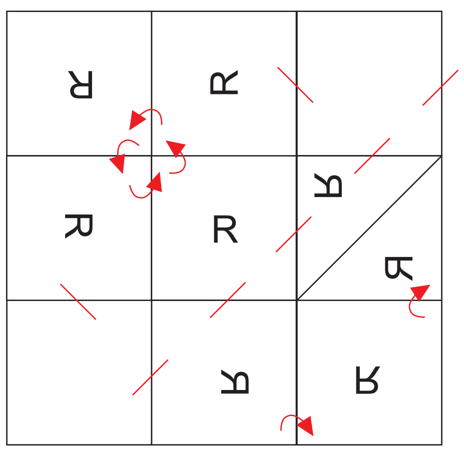
3.3.

Zasada D i E daje nam:

- P = D = 5

Jakie przekształcenia mogą znajdować się na L i G? Na pewno nie 1 i 6 (zasada D i E)

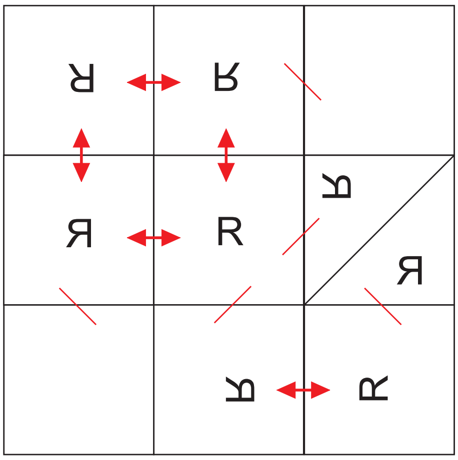
- Kiedy G = 2, to L = 2 (zasada B i C)



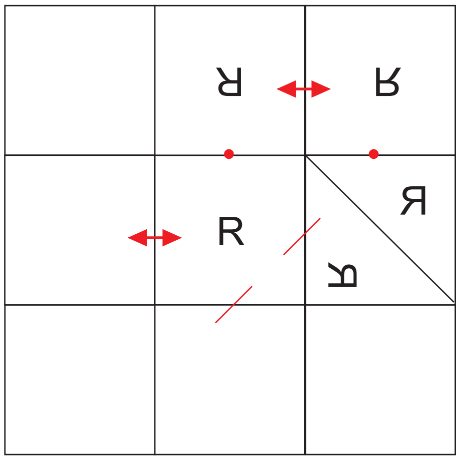
Ten przypadek daje sprzeczność na polu II.

- Jeżeli L = 3, to G = 3 lub G = 4

G = L = 3

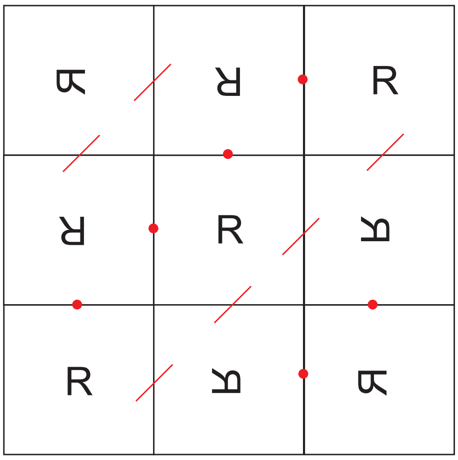


G = 4, L = 3

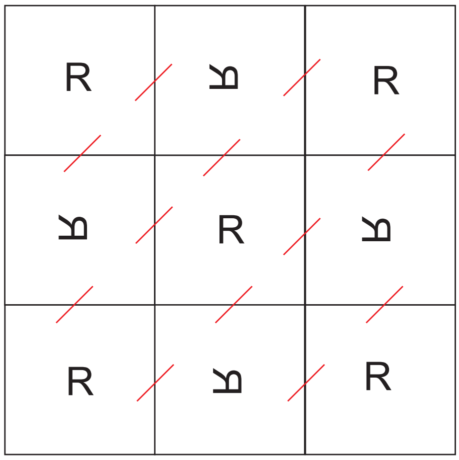


W obu przypadkach na polu nr II otrzymujemy sprzeczność.
Pozostaje sprawdzić przypadek, gdy G = L = 4 i G = L = 5

G = L = 4



G = L = 5



Widzimy, że z pięciu możliwych przypadków, parkietaż mogą realizować tylko dwa.

3.4.

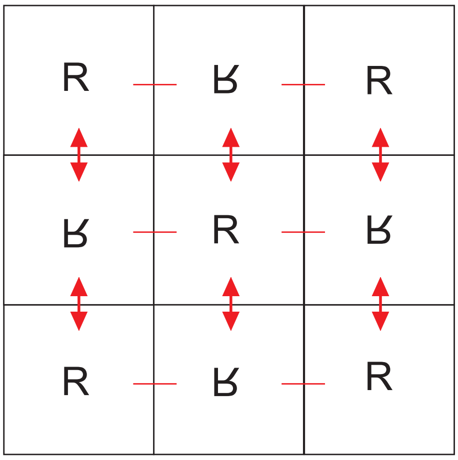
Z zasady F otrzymujemy:

- L = P = 6

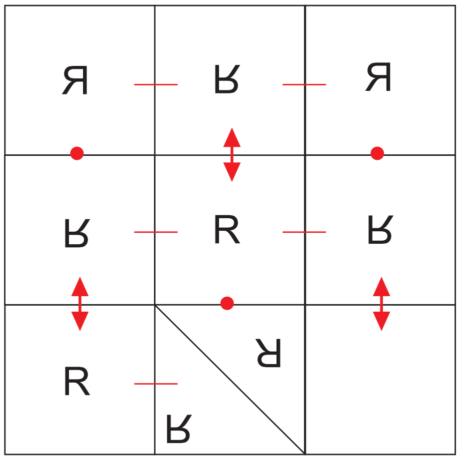
Jakie przekształcenia mogą być na G i D? Z zasad B, C, D, E możemy od razu wykluczyć 2 i 5.

- Jeżeli G = 1, to D = 1 (z zasady A) – przypadek sprawdzony
- Jeżeli G = 3, to D = 3 lub D = 4

G = 3, D = 3



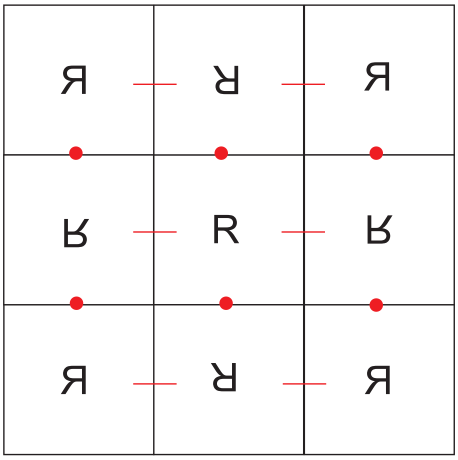
G = 3, D = 4



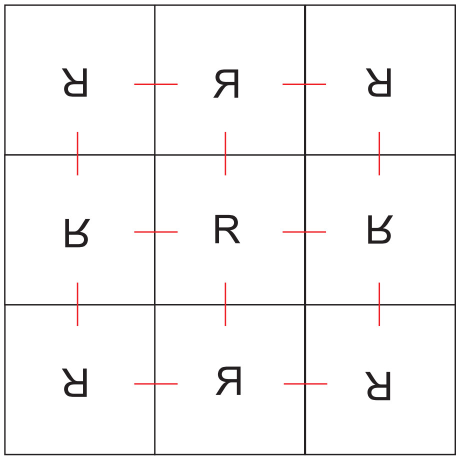
Ostatni przypadek nie nadaje się na parkietaż.

- Do rozstrzygnięcia pozostają przypadki: G = D = 4 i G = D = 6 (z zasady F)

G = D = 4



G = D = 6

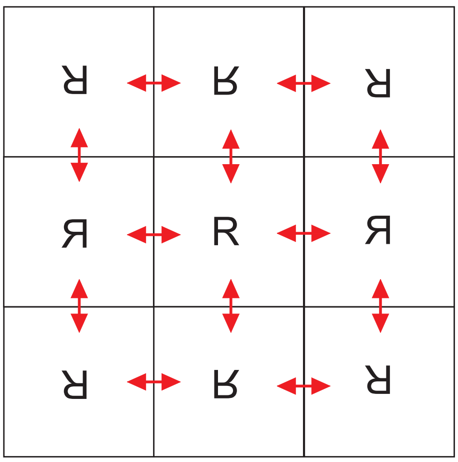


Z czterech rozpatrywanych przypadków, trzy mogą tworzyć parkietaż.

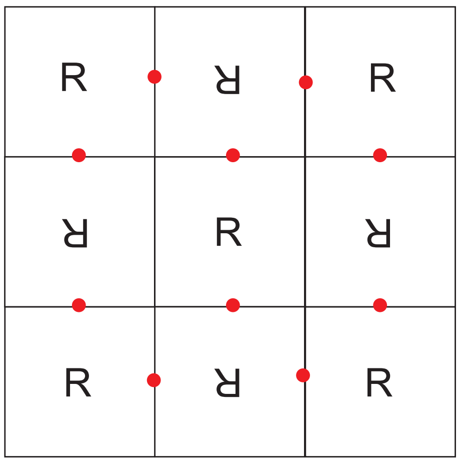
3.5.

Rozpatrzmy klepkę, która na każdym boku ma określone to samo przekształcenie. Do sprawdzenia pozostają tylko 3 i 4 (pozostałe przypadki zostały już sprawdzone)

G = P = L = D = 3



G = P = L = D = 4

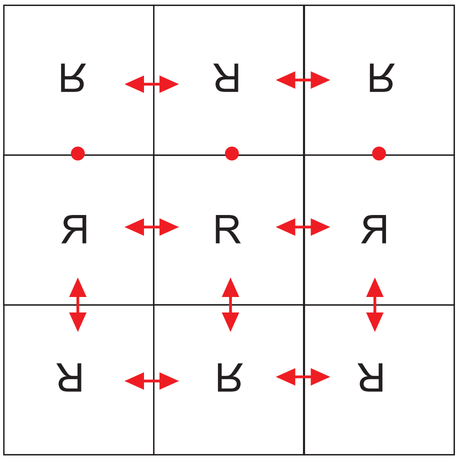


3.6.

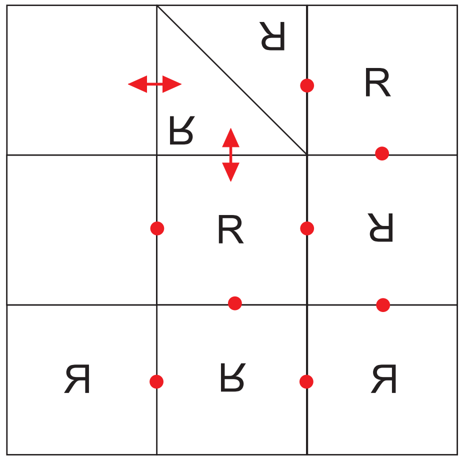
Niech na klepce będą zadane trzy takie same przekształcenia. Korzystając z wyprowadzonych zasad (od A do F) i z wcześniejszych przypadków możemy ograniczyć się do 3 i 4 (symetria i obrót o 180° - zgodnie z numeracją w rozdziale 2.2.)

- Jeżeli na trzech bokach mamy odbicie 3, to jedyny nowy (niesprawdzony) przypadek otrzymamy, gdy na czwartym boku jest obrót 4.
- Gdy trzema przekształceniami są obroty 4 to nowy przypadek może dać nam tylko określenie na ostatnim boku odbicia 3.

L = P = D = 3 i G = 4



L = D = P = 4 i G =3



Ostatni przypadek prowadzi do sprzeczności.

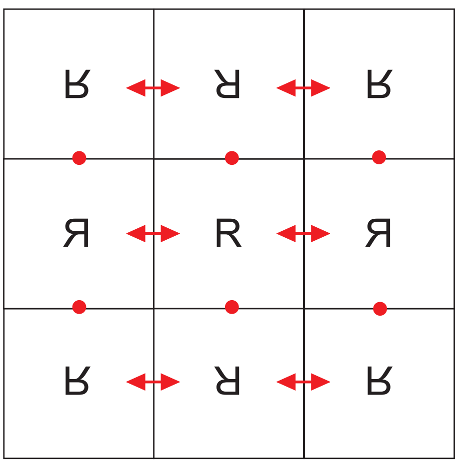
3.7.

Niech na dwóch bokach określone będą te same przekształcenia.

- Na przeciwległych bokach

Do sprawdzenia pozostają: obroty 4, odbicia 3

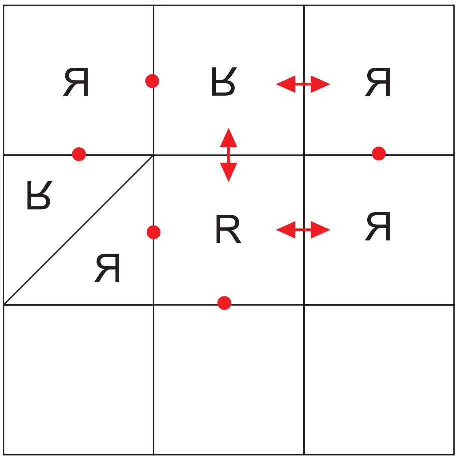
Niech L = P = 3, wtedy nowy przypadek otrzymamy tylko dla G = D = 4.



Jest to ten sam przypadek, co L = P = 4 i G = D = 3.

- Na bokach sąsiednich

Nowy przypadek otrzymamy, gdy G = P = 3. Do sprawdzenia pozostaje przypadek, gdy na dwóch pozostałych bokach określony jest obrót 4.

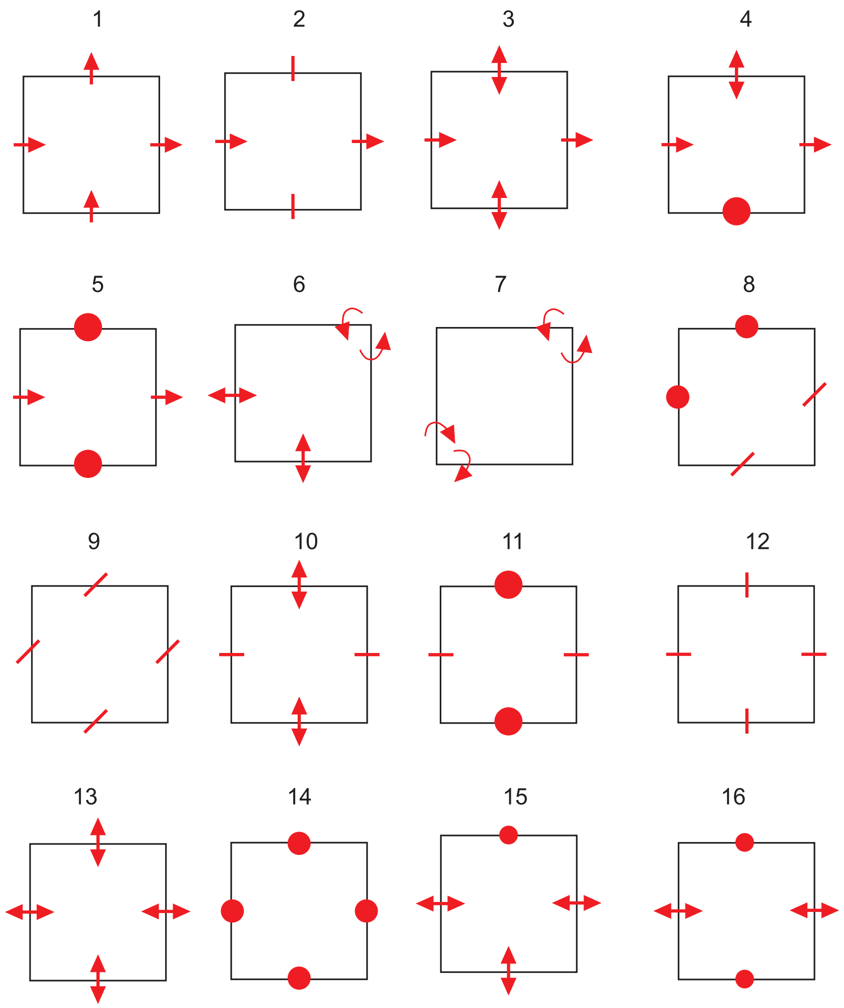


Widzimy sprzeczność na polu VI.

Więcej przypadków nie ma.

PODSUMOWANIE:

Otrzymaliśmy 16 różnych sposobów rozmieszczenia przekształceń (1 – 6) na kwadratowej klepce, czyli 16 różnych regularnych parkietaży.

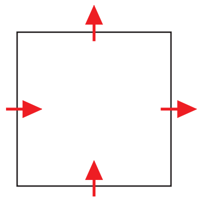


Rozdział 4

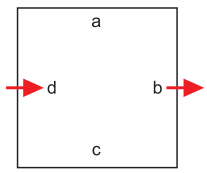
Zmiana czworokąta

Niektóre spośród szesnastu znalezionych reguł można stosować do tworzenia parkietaży innymi czworokątami niż kwadraty. Na przykład regułę z czterema translacjami dla równoległoboków. W tym rozdziale rozstrzygnę, jakich czworokątów różnych od kwadratów można używać jako klepek w parkietażu z zadaną regułą.

4.1. Na każdym boku zadane jest to samo przekształcenie – translacja.



Oznaczamy każdy bok czworokątnej płytki: a, b, c, d.



Skoro przeciwległe boki są określone przez translację to bok d znajdzie się na miejscu boku c. Stąd wnioskujemy, że boki d i b muszą być równej długości. Poza tym boki d i b muszą być równoległe. Mamy więc:

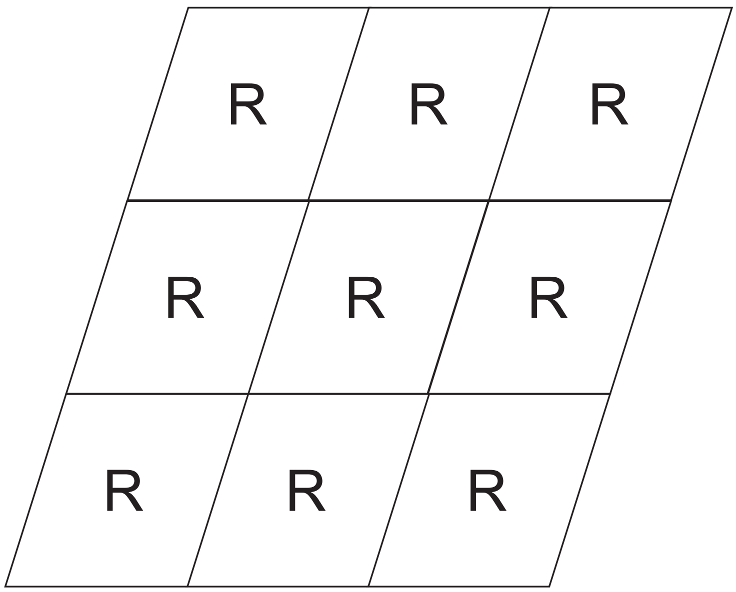
d = b i d || b 1(*)

Takie samo rozumowanie prowadzimy dla dwóch pozostałych boków a i c. Otrzymujemy:

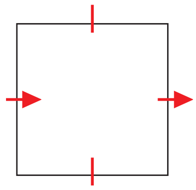
a = c i a || c 1(**)

Musimy znaleźć takie czworokąty, które spełniają jednocześnie 1(*) i 1(**). Te warunki spełniają tylko **równoległoboki**.

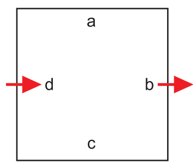
Zobaczmy jak wygląda fragment takiego parkietażu:



4.2.



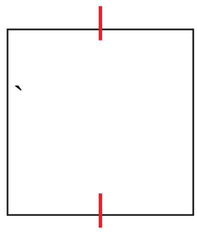
Oznaczmy boki:



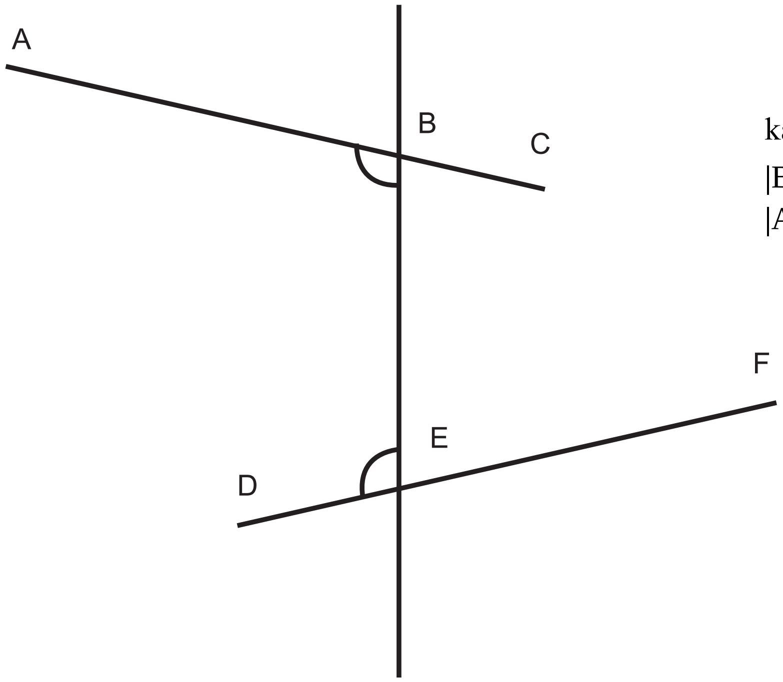
Z 4.1. otrzymujemy, że :

d = b i d || b 2(*)

Zobaczmy, jakie ograniczenia dają przekształcenia określone na dwóch pozostałych bokach.



Zauważmy, że muszą zachodzić warunki:



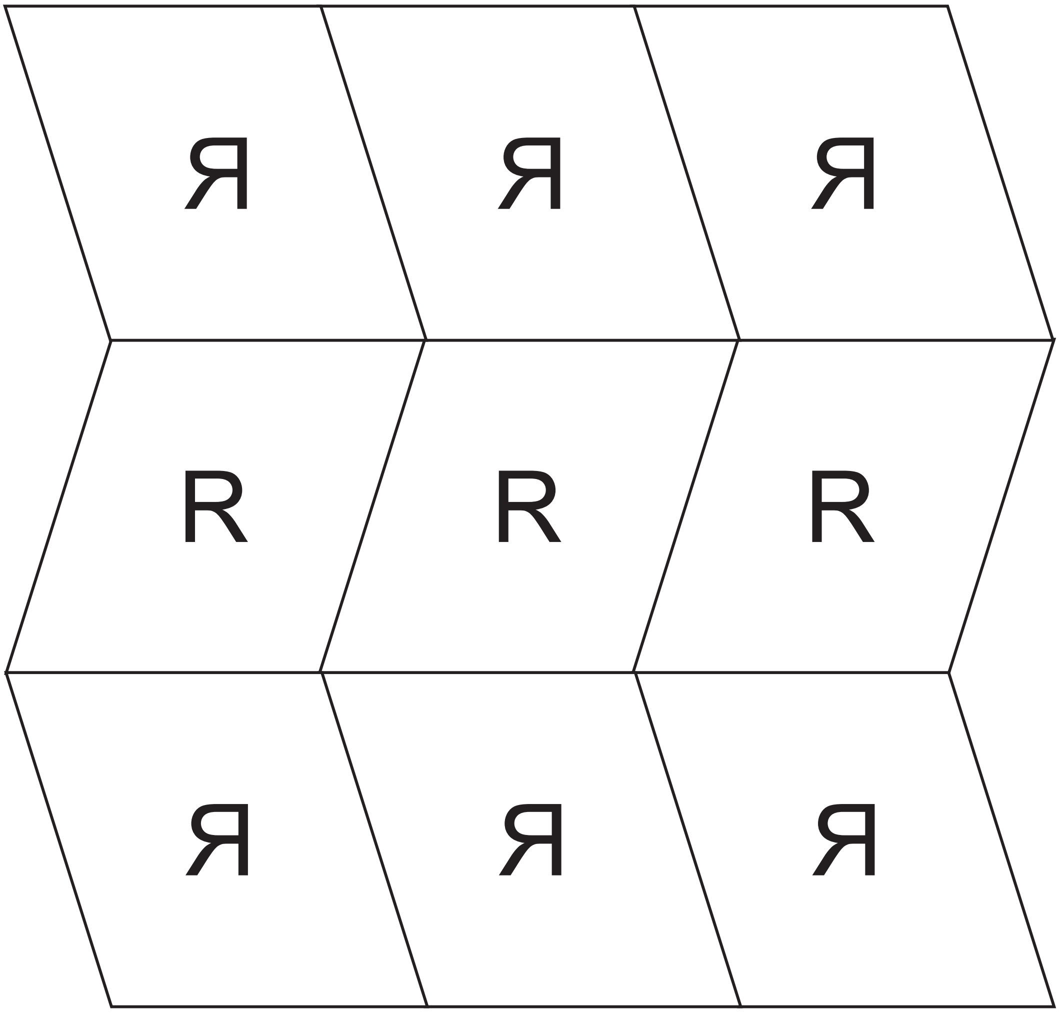
kąt ABE = kąt DEB

|BC| = |DE|

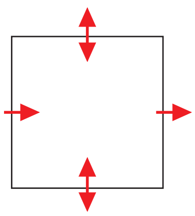
|AB| = |EF|

Łatwo stwierdzić, że warunki powyższe można zastąpić jednym – **warunkiem równości** pary przeciwległych boków. 2(**)

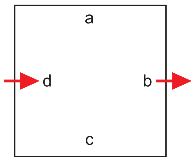
Warunki 2(*) i 2(**) są spełnione jednocześnie tylko przez **równoległoboki**.
Parkietaż wygląda następująco:



4.3.



Oznaczmy boki czworokąta:

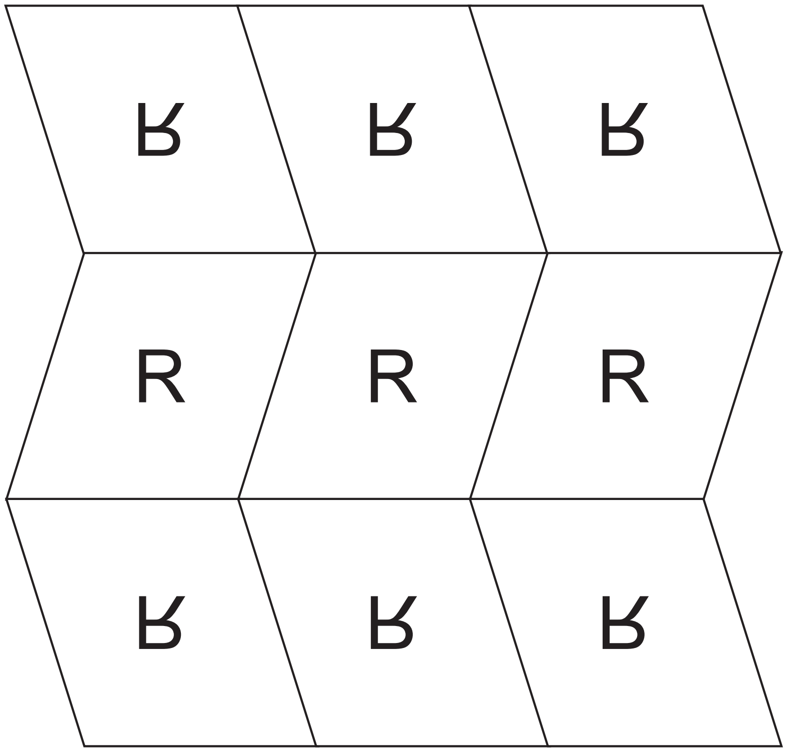


Z 4.1. wiemy, że:

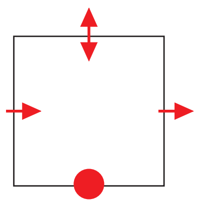
d = b i d || b 3(*)

Dodając do boków a i c odbicia widzimy, że nie zawęzi to grupy poszukiwanych czworokątów.
Warunek 3(*) spełniają jedynie **równoległoboki**.

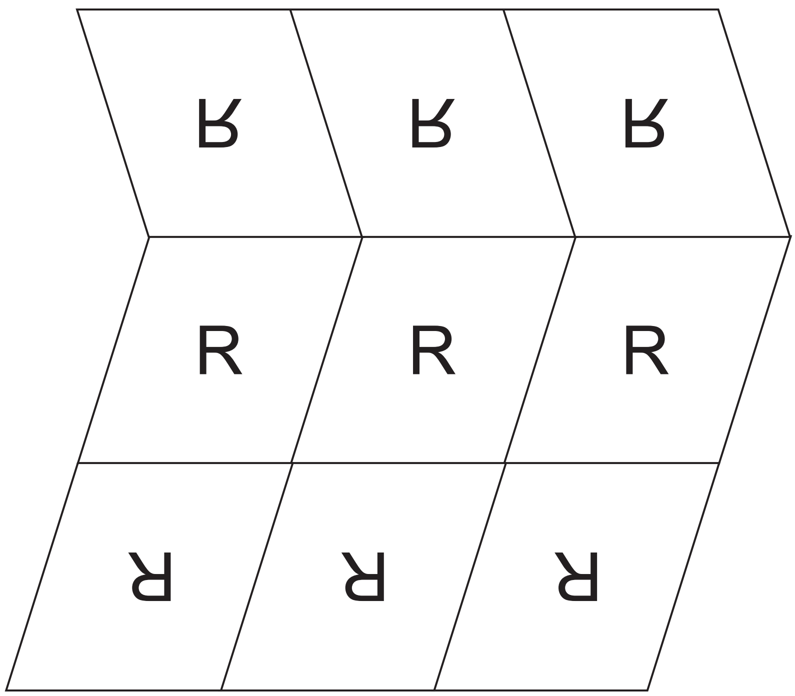
Parkietaż:



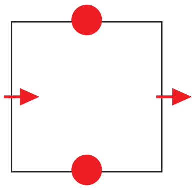
4.4.



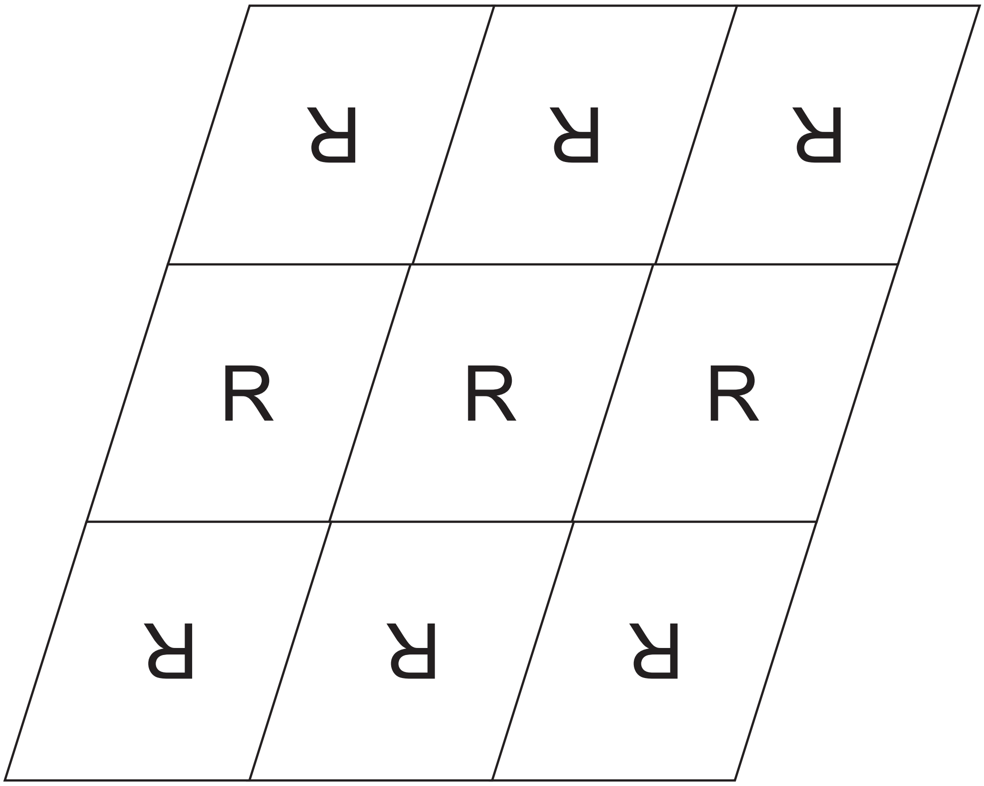
Korzystając z 4.1 i 4.3 możemy stwierdzić, że szukaną grupą czworokątów są **równoległoboki**.
Parkietaż:



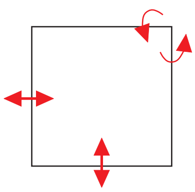
4.5.



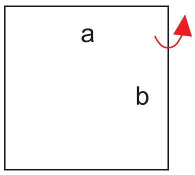
Korzystamy tutaj z 4.1 i możemy stwierdzić, że szukana grupą czworokątów są **równoległoboki**.
Parkietaż:



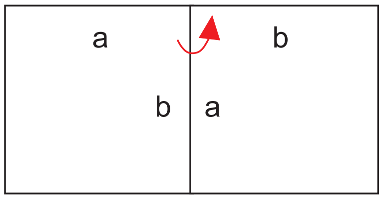
4.6.



Oznaczamy boki:



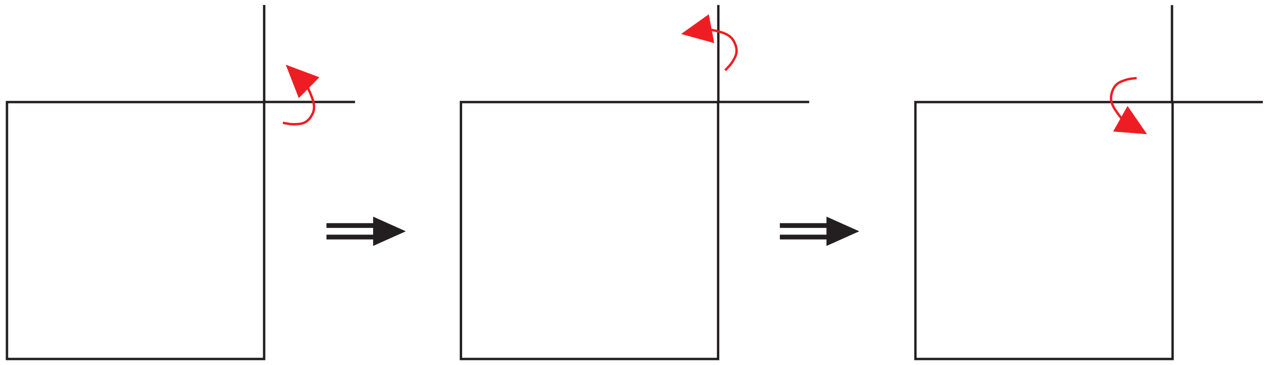
Przechodząc do następnej klepki przez bok b otrzymujemy:



Musi więc zachodzić:

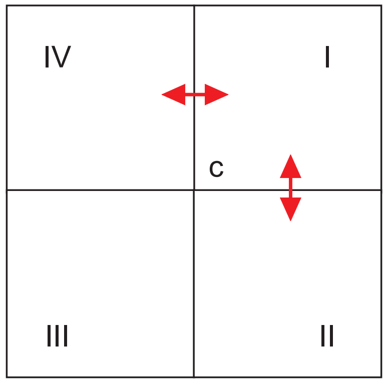
a = b   6(*)

Korzystając z zasady B (rozdział 2 strona 8) otrzymujemy:

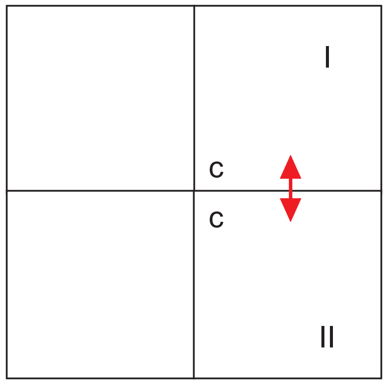


W prawym górnym rogu zawsze będzie wykonywany obrót o 90°, stąd wniosek, że kąt pomiędzy bokiem a i b musi być prosty 6(**)

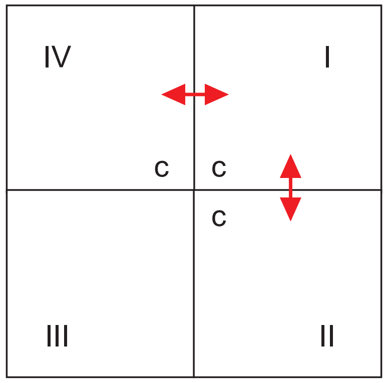
Na dwóch pozostałych bokach mamy określone odbicie:



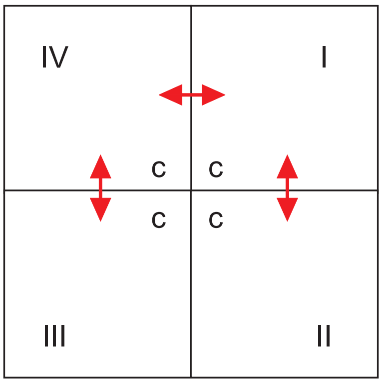
Po przejściu z I na klepkę II otrzymujemy :



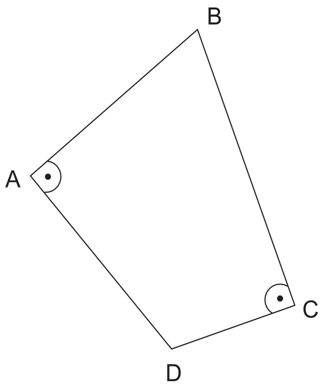
Natomiast po odbiciu na płytkę IV otrzymujemy:



Z płytki IV na III przechodzimy również przez odbicie:

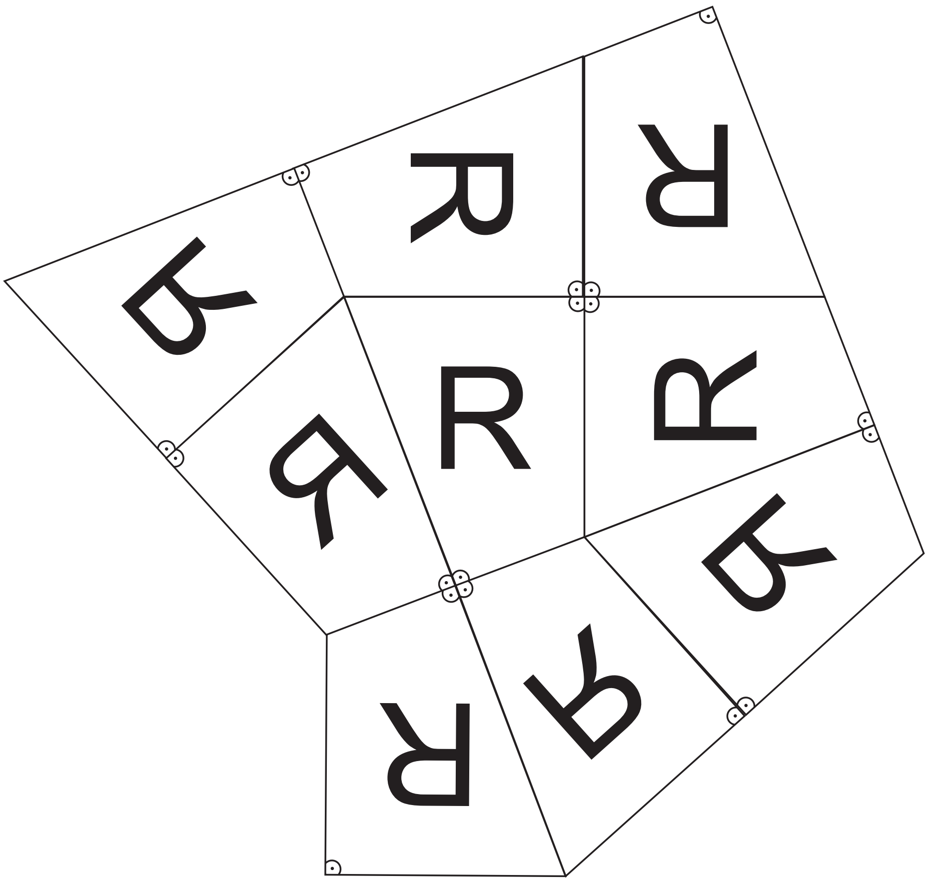


Widzimy, że kąt przy wierzchołku c musi być kątem prostym (kąt c leży naprzeciwko wierzchołka z określonym obrotem) 6(***)
Warunki 6(*), 6(**), 6(***) spełnia czworokąt:

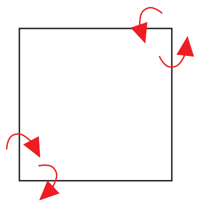


|AB| = |AD|, kąt DAB = kąt DCB = 90°

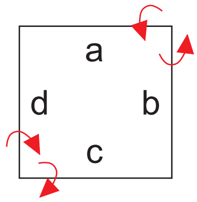
Parkietaż:



4.7.



Oznaczmy boki:

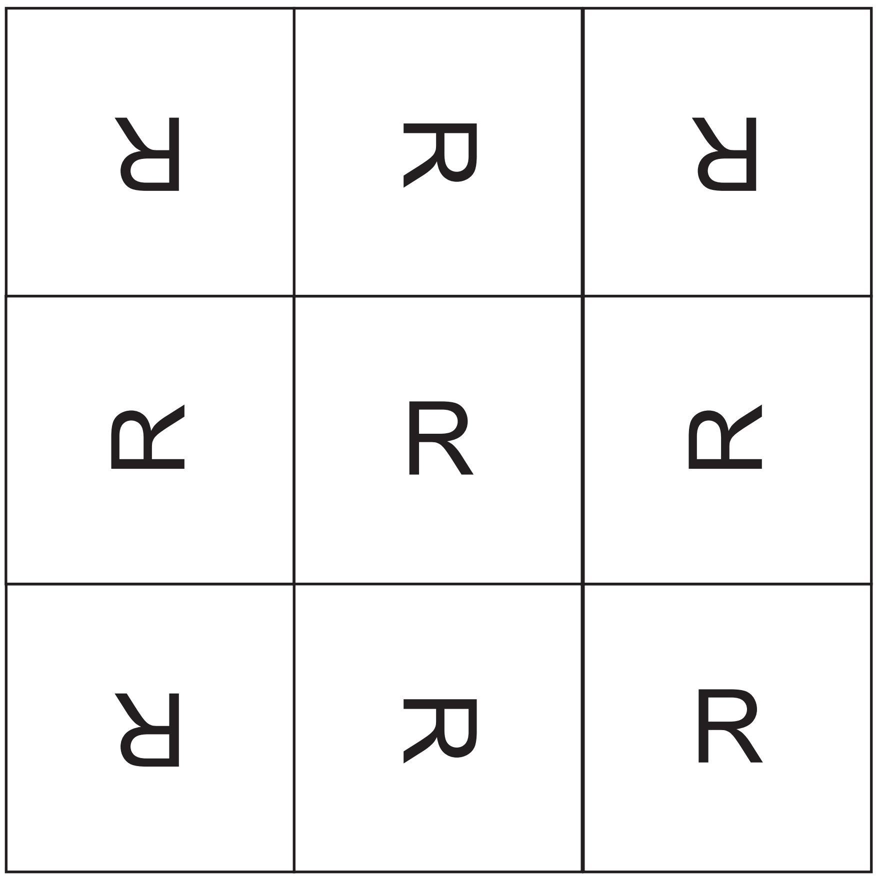


Z 4.6. otrzymujemy:

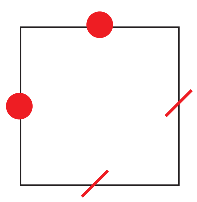
a=b, kąt ab = 90° (kąt między bokami a i b) 7(*)

c=d, kąt cd = 90° (kąt między bokami c i d) 7(**)

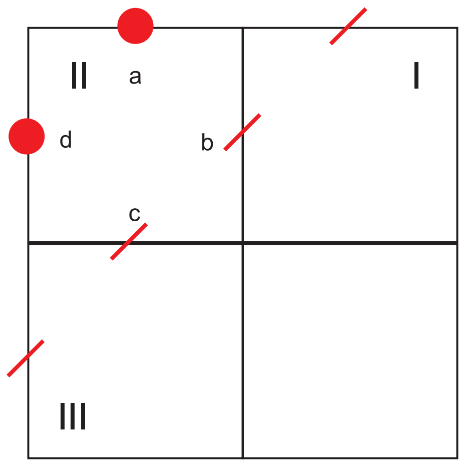
Takie warunki spełniają tylko **kwadraty**



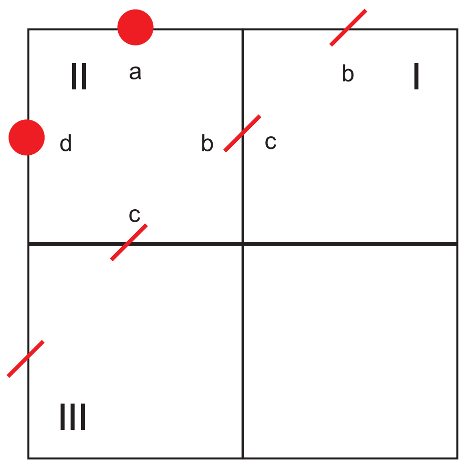
4.8.



Oznaczmy wyjściową klepkę i rozważmy układ złożony z czterech płytek:



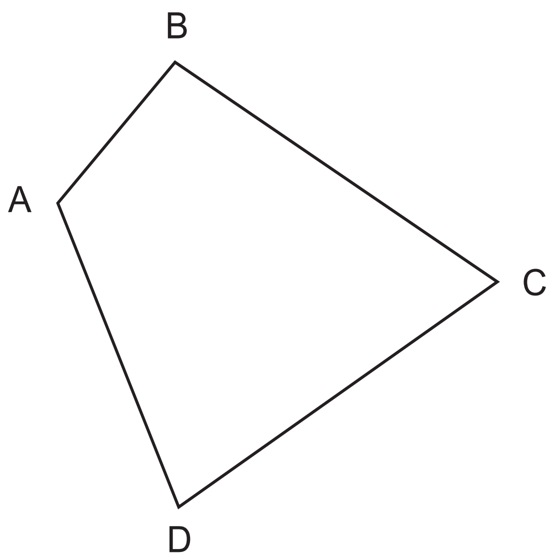
Z oznaczonej płytki II przechodzimy na I odbiciem względem przekątnej. Bok c przejdzie na bok b.



Musi więc zachodzić

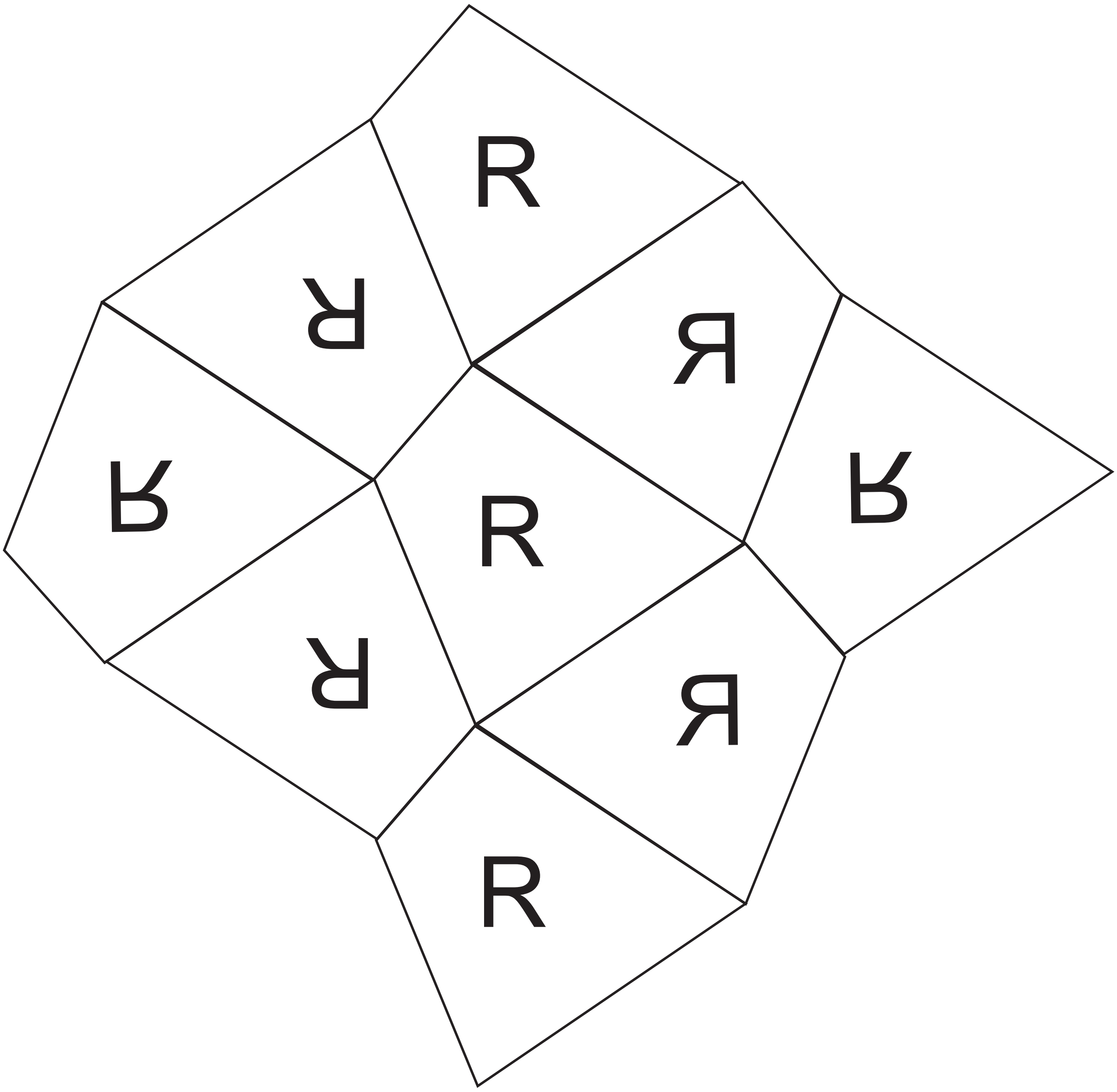
b = c 8(*)

Są to boki sąsiednie, na których określone jest odbicie względem przekątnej. Ponieważ obroty na pozostałych bokach nie wnoszą ograniczeń, poszukiwana grupa czworokątów musi spełniać jedynie 8(*). Są to czworokąty:

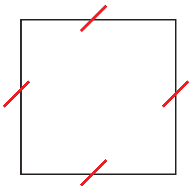


|BC| = |CD|

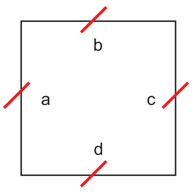
Parkietaż:



4.9.



Oznaczmy boki::



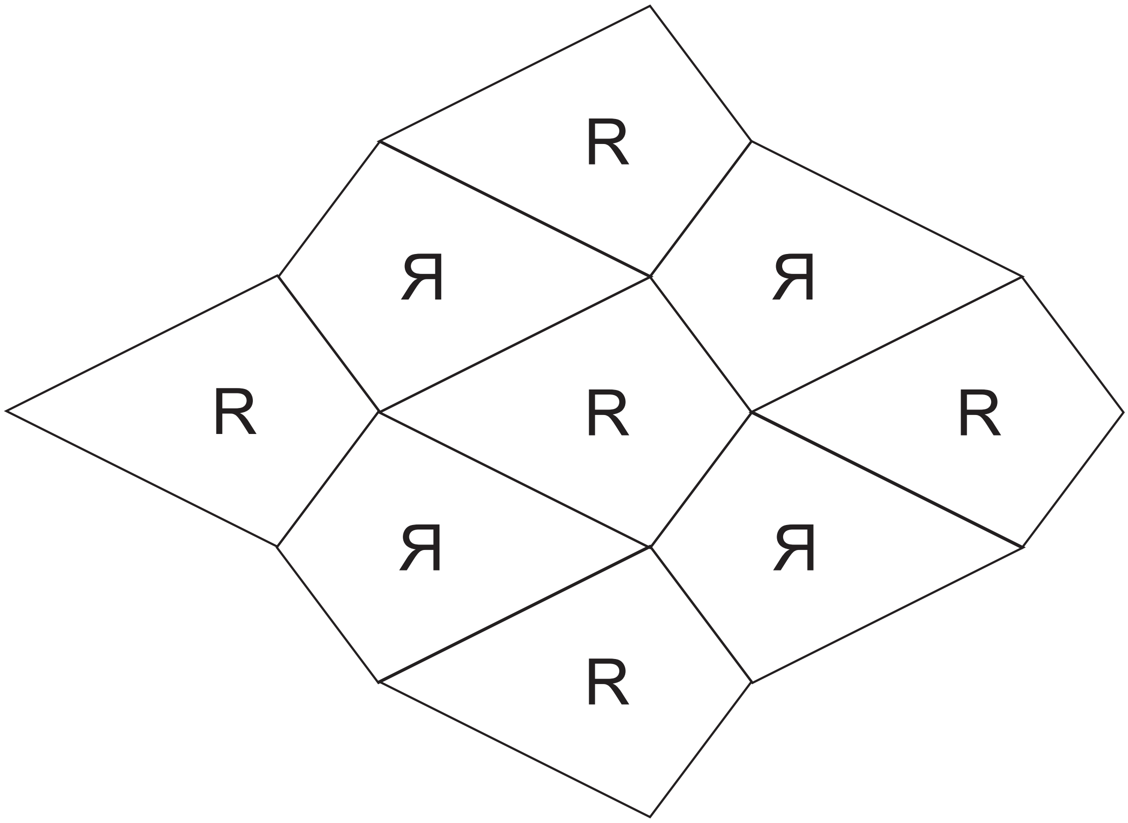
Zgodnie z 4.8. otrzymujemy:

b = c   i   a = d   9(*)

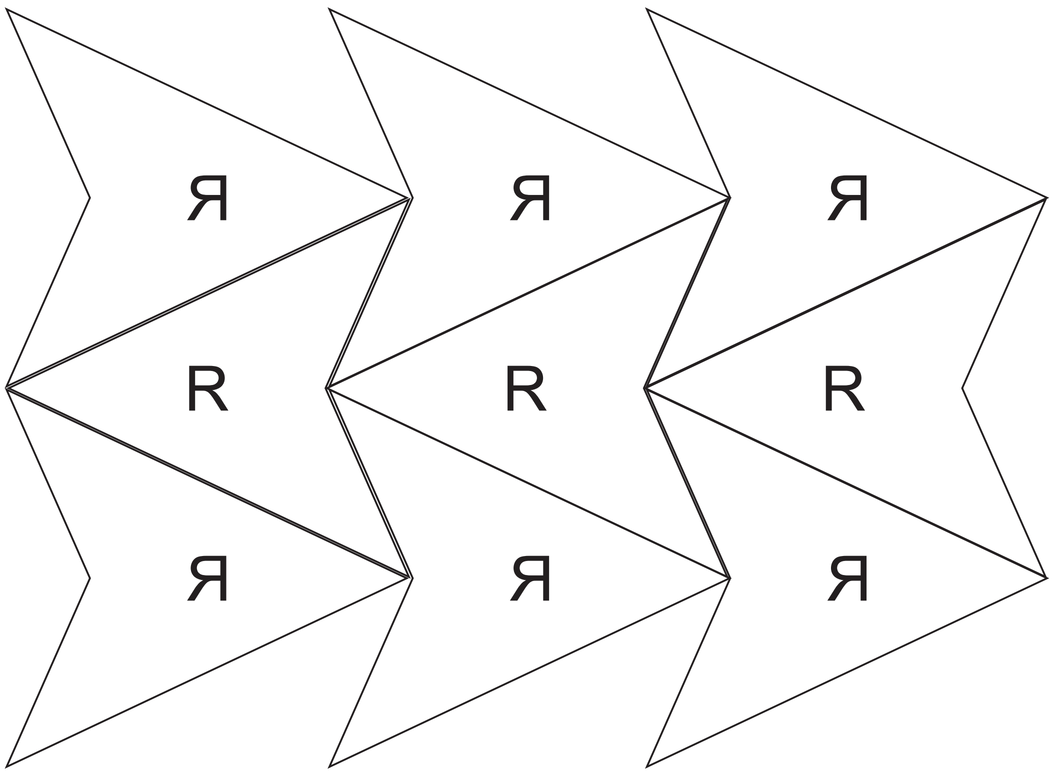
Mamy równość boków sąsiadujących. Warunek 9(*) spełniają tylko **deltoidy**.

Możemy tutaj wyróżnić dwa typy deltoidów: wypukły i wklęsły.

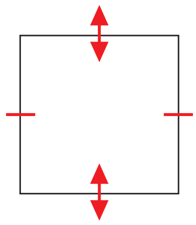
Parkietaż dla deltoida wypukłego:



Parkietaż dla deltoida wklęsłego:

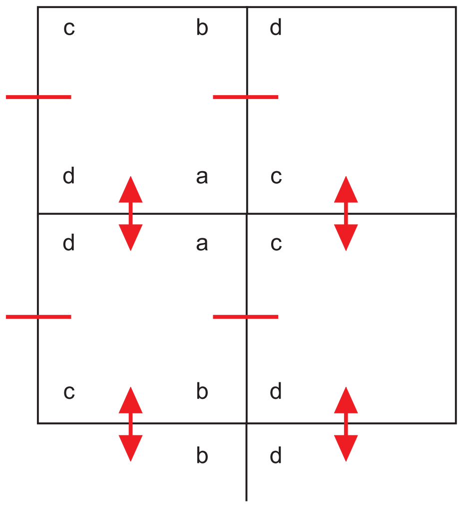


4.10.



Tak jak w 4.2. szukane czworokąty muszą spełniac warunek równości przeciwległych boków. 10(*)

Oznaczmy wierzchołki:



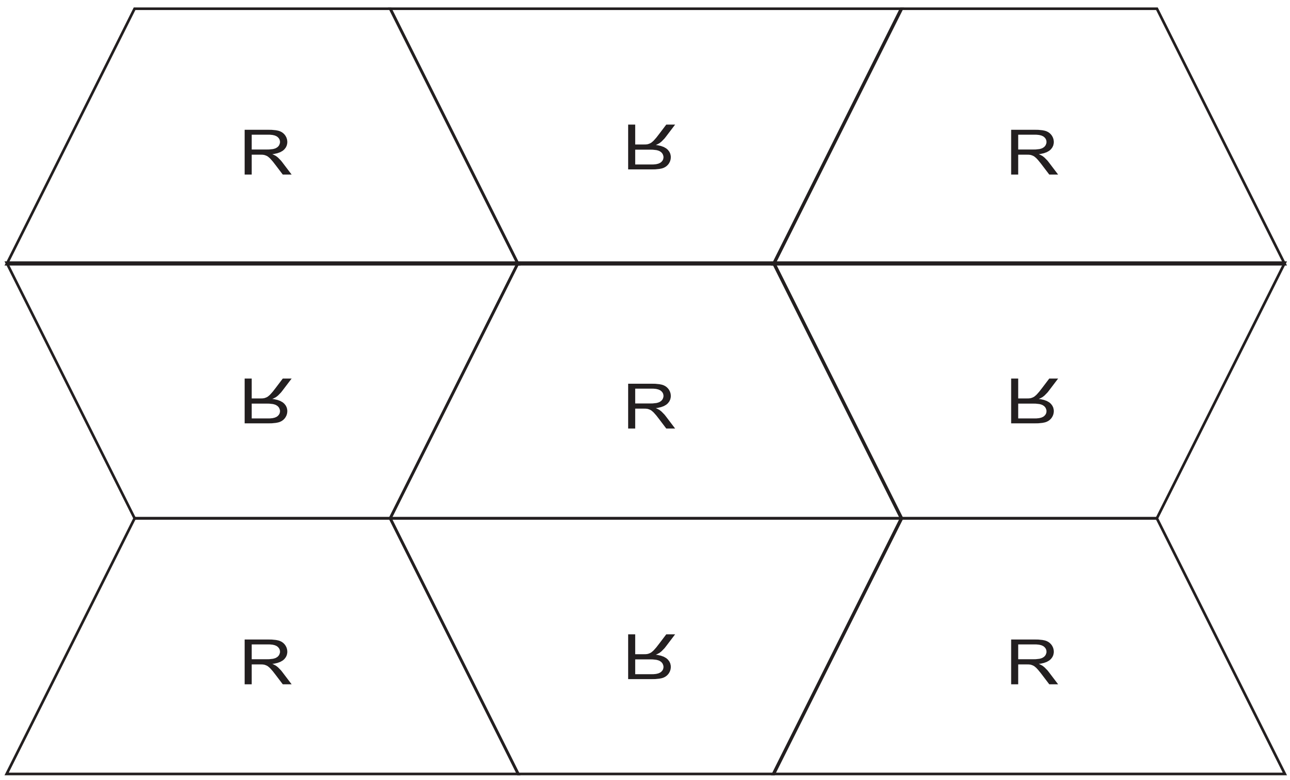
Musi zachodzić:

kąt a + kąt c =180° i

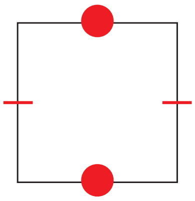
kąt b + kąt d = 180° 10(**)

Jest to równość przeciwległych kątów, a taki warunek spełniają czworokąty wpisane w okrąg. Nietrudno stwierdzić, że jeśli dodamy do tego warunku równość boków, to taki parkietaż mogą tworzyć tylko **trapezy równoramienne**.

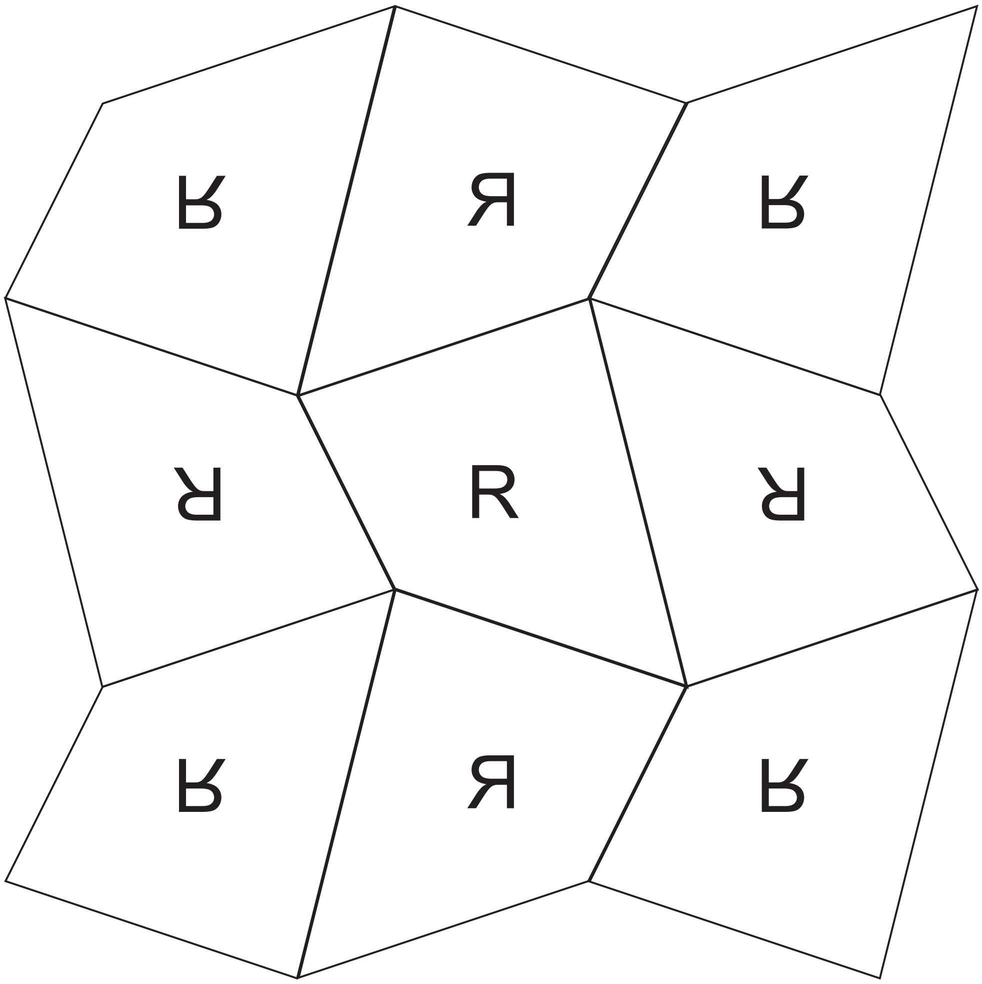
Parkietaż:



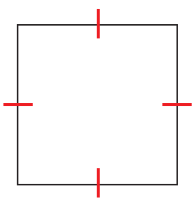
4.11.



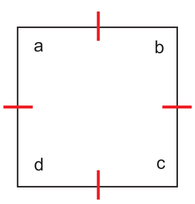
W tym przypadku musi być spełniony jedynie warunek równości przeciwległych boków.
Parkietaż:



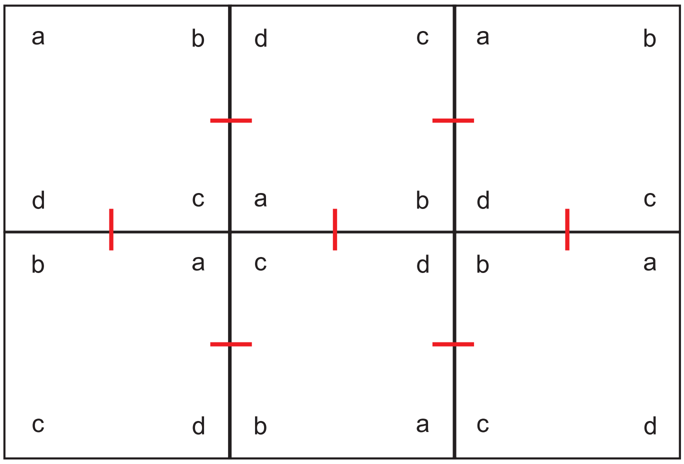
4.12.



Oznaczmy wierzchołki:



Z 4.2. dostajemy równość boków: ab = dc i ad = dc 12(*)
Rozważając sąsiednie klepki otrzymujemy:



kąt a + kąt c = 180°

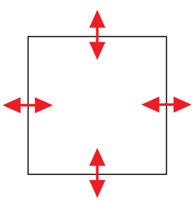
kąt b + kąt d = 180°

Suma przeciwległych kątów = 180°

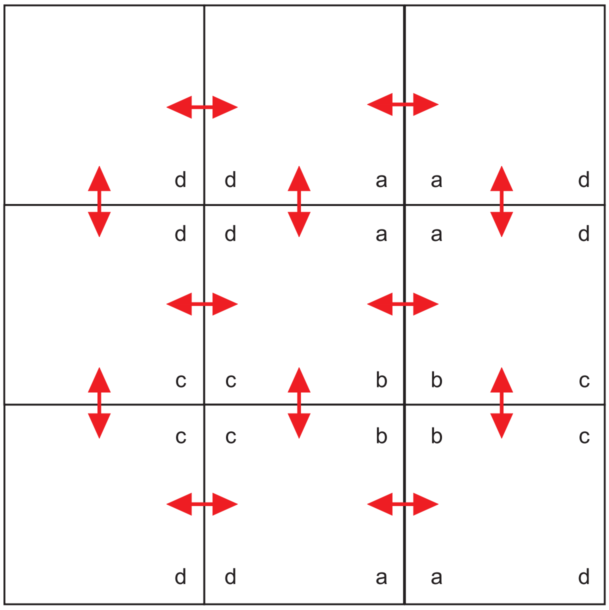
12(**)

12(*) i 12(**) spełniają tylko **prostokąty**.
Parkietaż:

4.13.



Zaznaczmy wierzchołki i rozważmy układ złożony z 9 klepek



Widzimy, że cztery kąty przy wierzchołku c dają kąt pełny. Zatem:

kąt c = 90° 13(*)

Podobnie dla innych kątów:

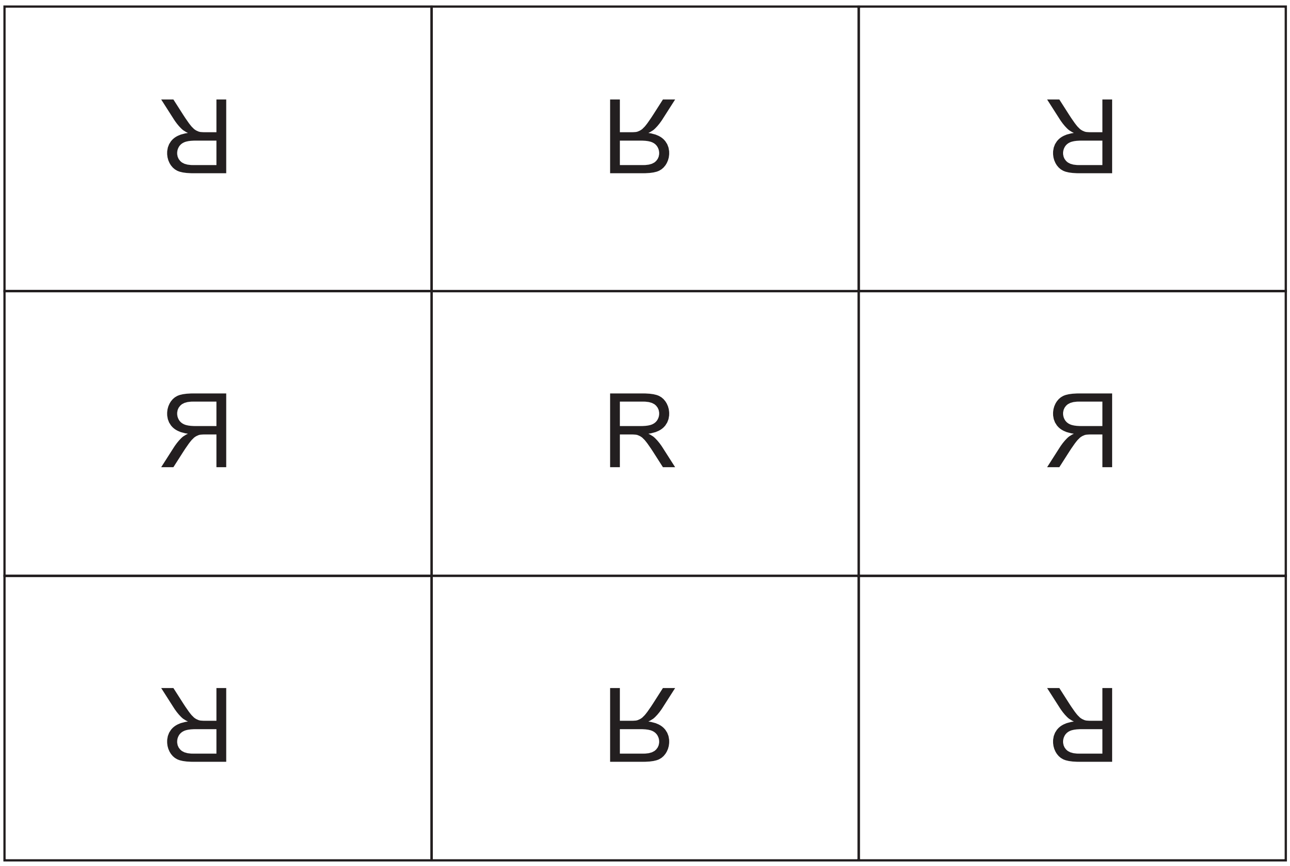
kąt a = 90° 13(**)

kąt b = 90° 13(***)

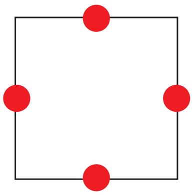
kąt d = 90° 13(****)

Powyższe warunki spełniają tylko **prostokąty**.

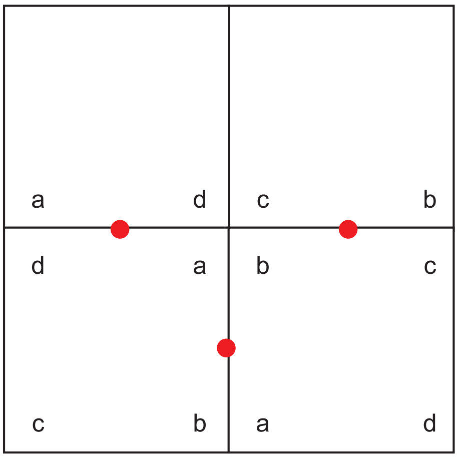
Parkietaż:



4.14.



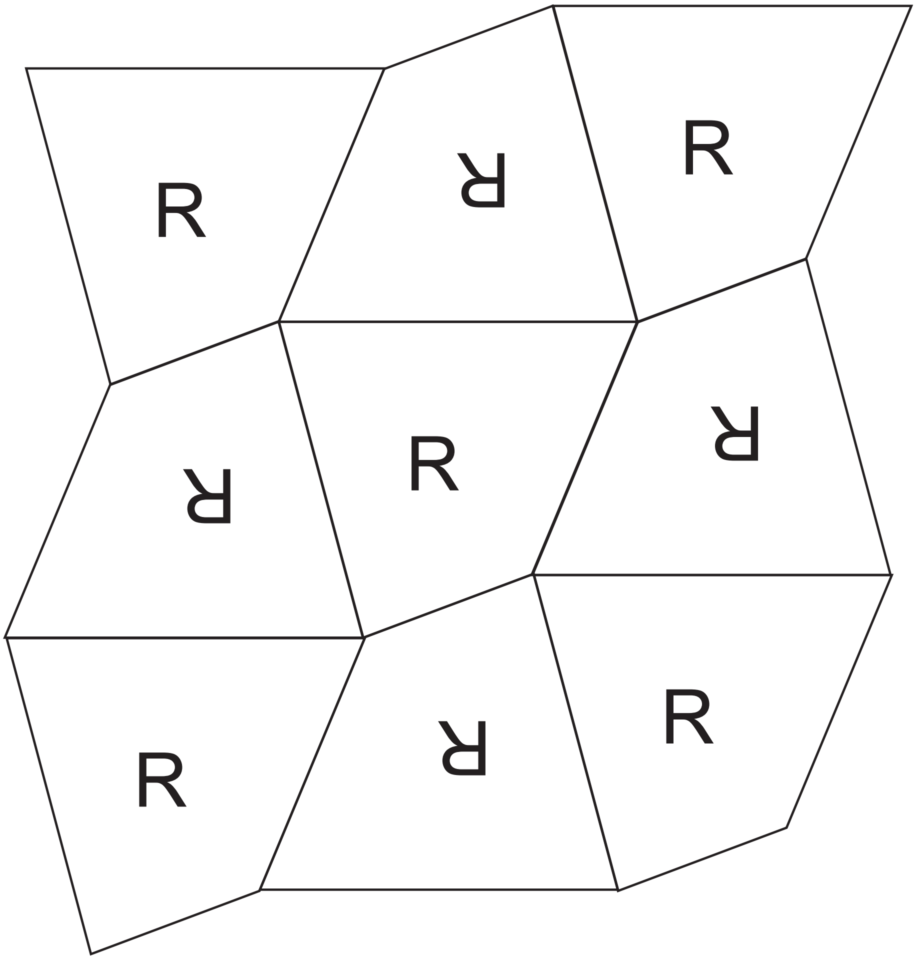
Zaznaczmy wierzchołki:



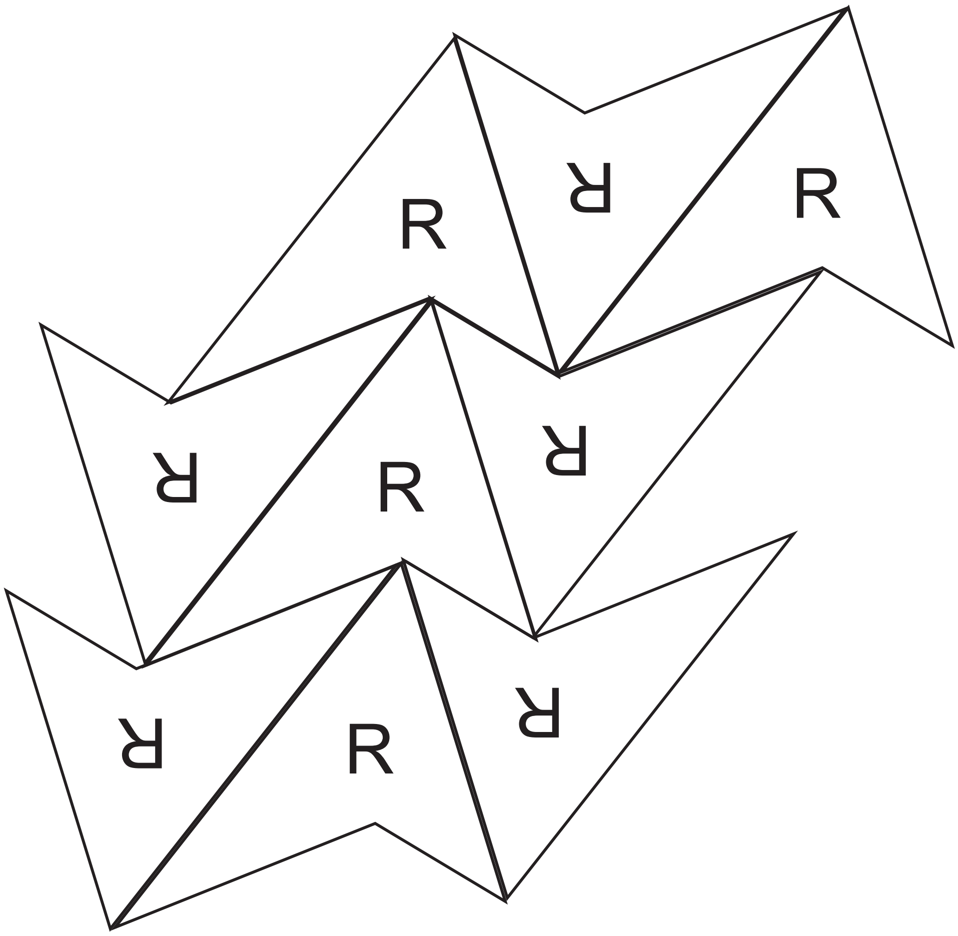
Widzimy, że kąt a + kąt b + kąt c +kąt d = 360°.

Ten warunek spełniają **dowolne czworokąty**, wypukłe i wklęsłe.

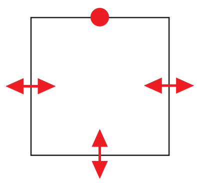
Parkietaż dla czworokąta wypukłego:



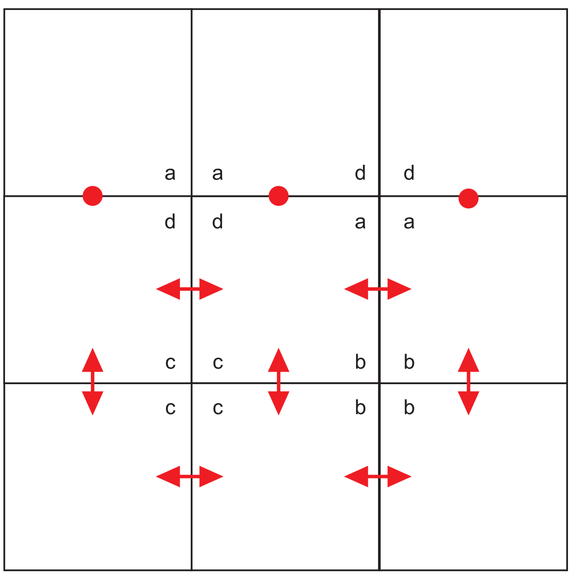
Parkietaż dla czworokąta wklęsłego:



4.15.



Oznaczmy wierzchołki:

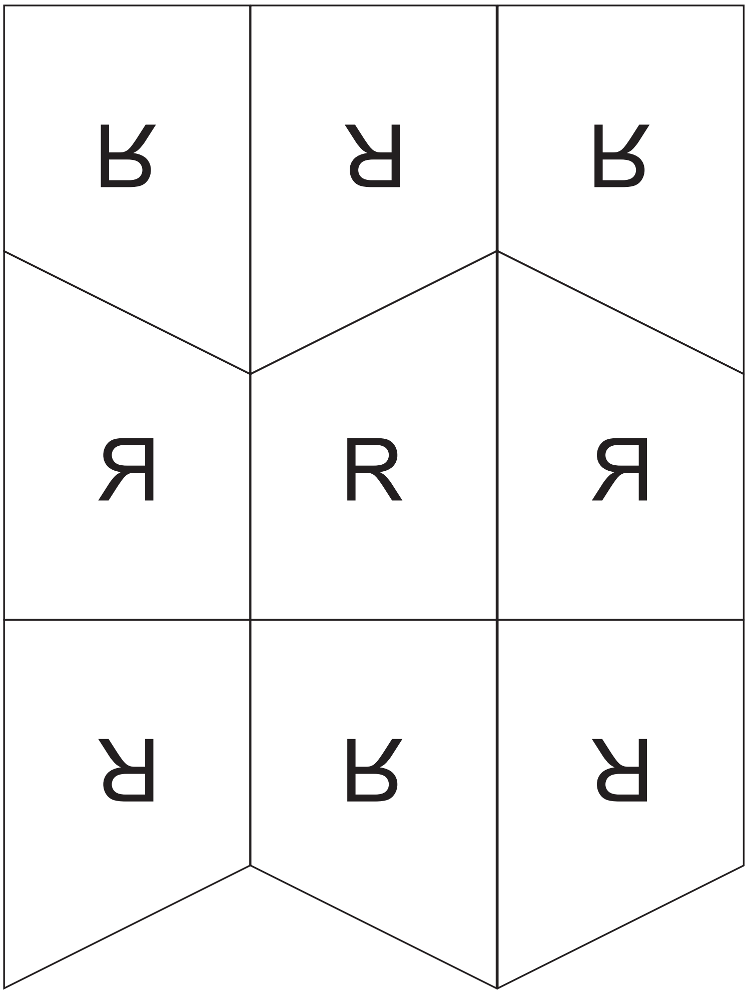


Widzimy, że: kąt c = 90° 15(*)

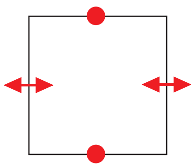
kąt b = 90° 15(**)

Są to kąty przy boku znajdującym się naprzeciwko boku z określonym obrotem.

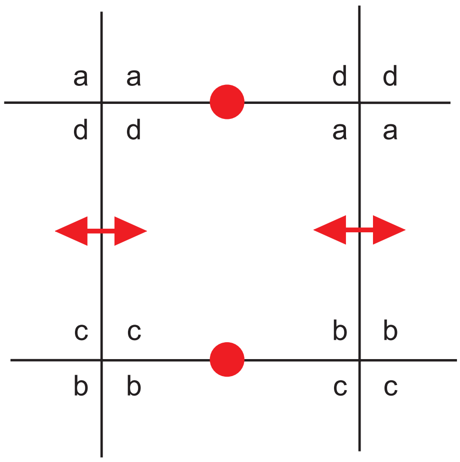
Czworokąt, który spełnia jednocześnie 15(*) i 15(**) to **trapez prostokątny**.
Parkietaż:



4.16.



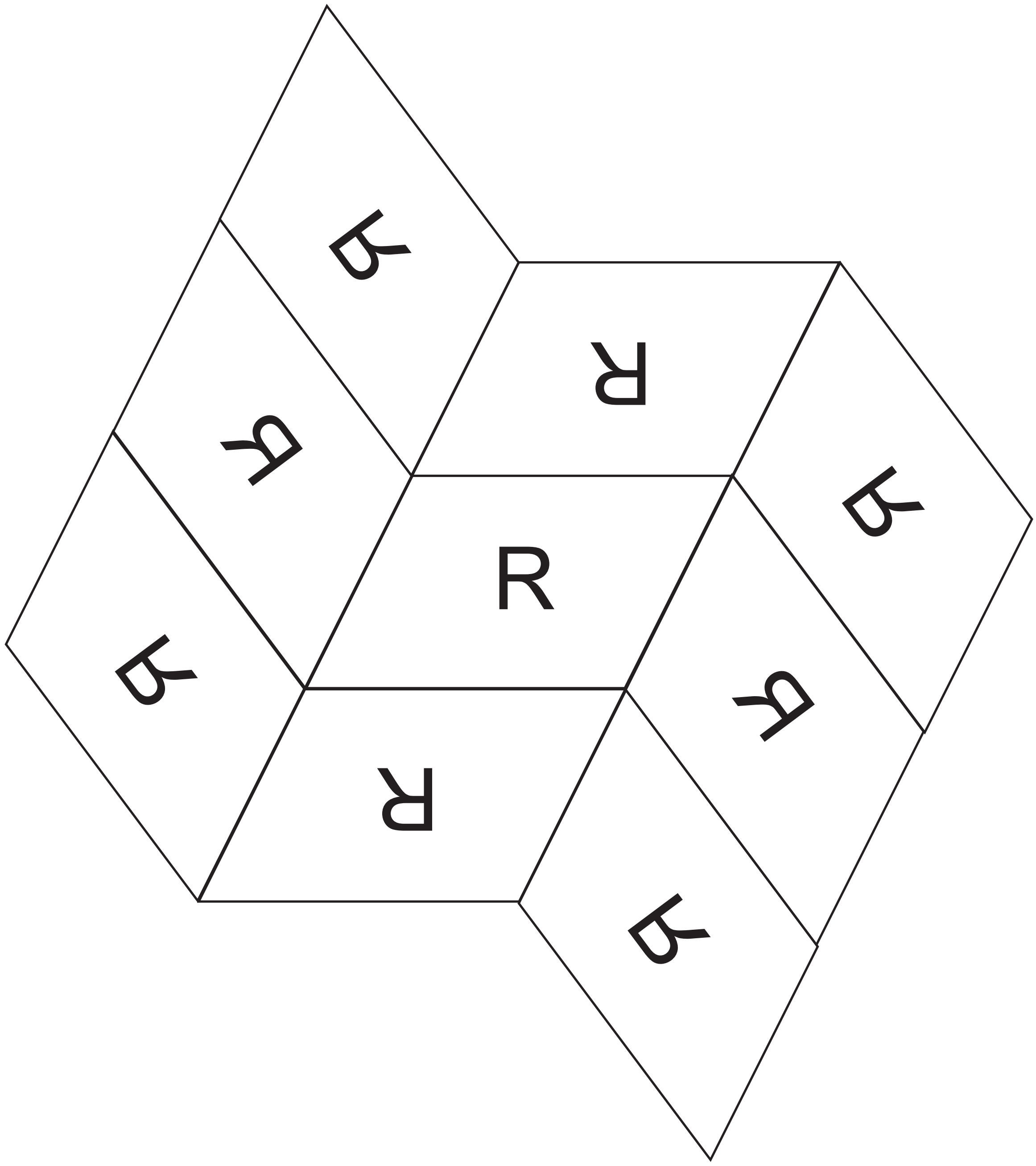
Oznaczmy wierzchołki:



Kąt c + kąt b = 180° 16(*)
Kąt a + kąt d = 180° 16(**)

Suma kątów leżących przy przeciwległych bokach wynosi 180°

Takie warunki spełniają jedynie **równoległoboki**.
Parkietaż:



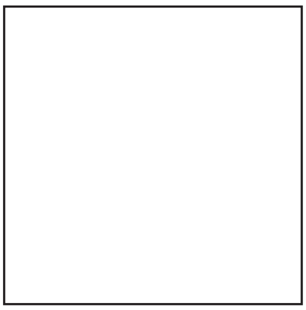
Rozdział 5

Jak zrobić swój własny parkietaż

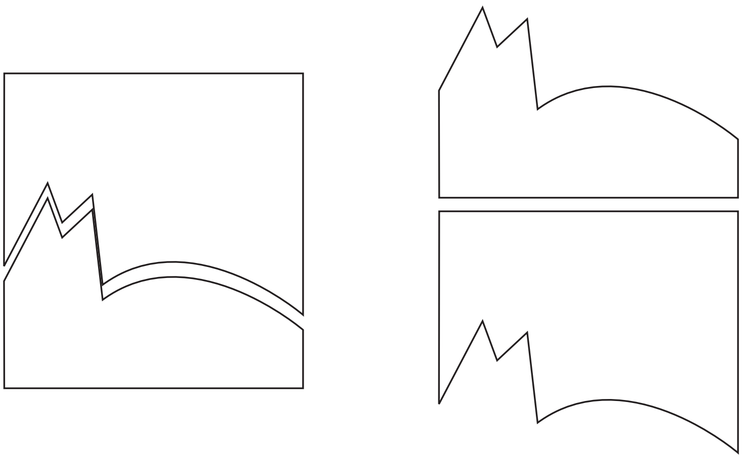
W tym rozdziale pokażę jak można geometrycznie projektować i wykonywać parkietaże typu Eschera. Potrzebne będą do tego nożyczki, ołówek, klej i papier kolorowy. Poniższe przykłady zaczerpnięte są z książki Wacława Zawadowskiego pt. „Mozaiki matematyczne”.

Przykład I

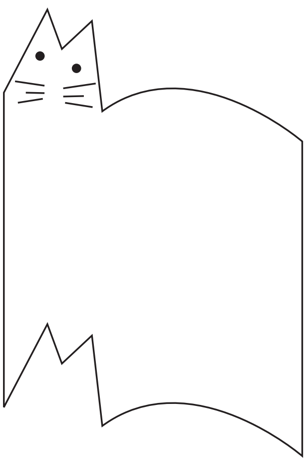
Wyjściową płytką niech będzie kwadrat.



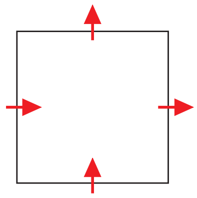
Wycinamy nożyczkami jeden bok, przesuwamy ten wycięty kawałek i dokładamy go do równoległego, przeciwległego boku.

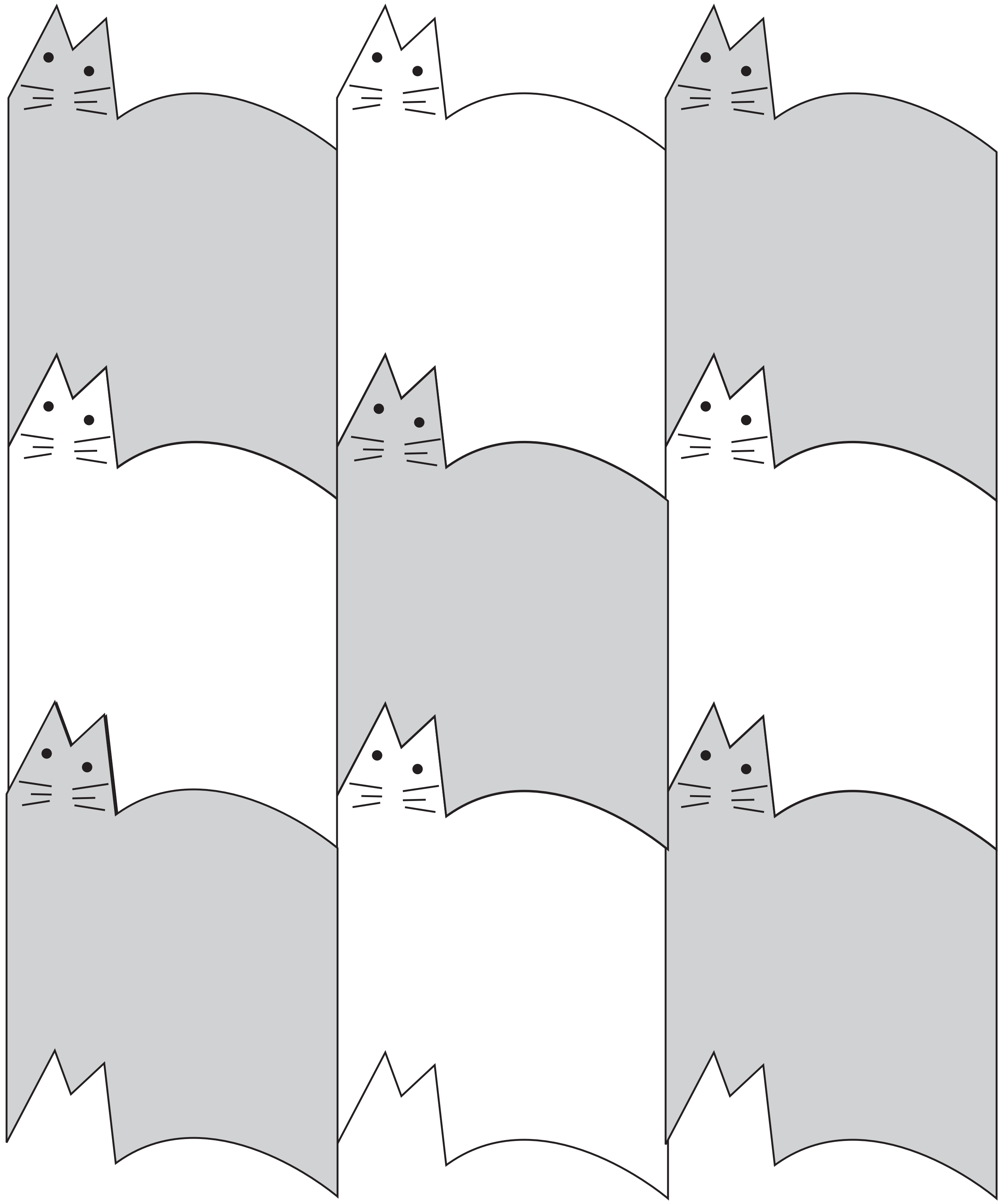


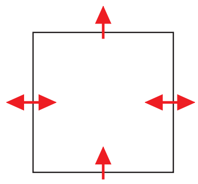
Dostajemy niesymetryczny wzór - kotka.

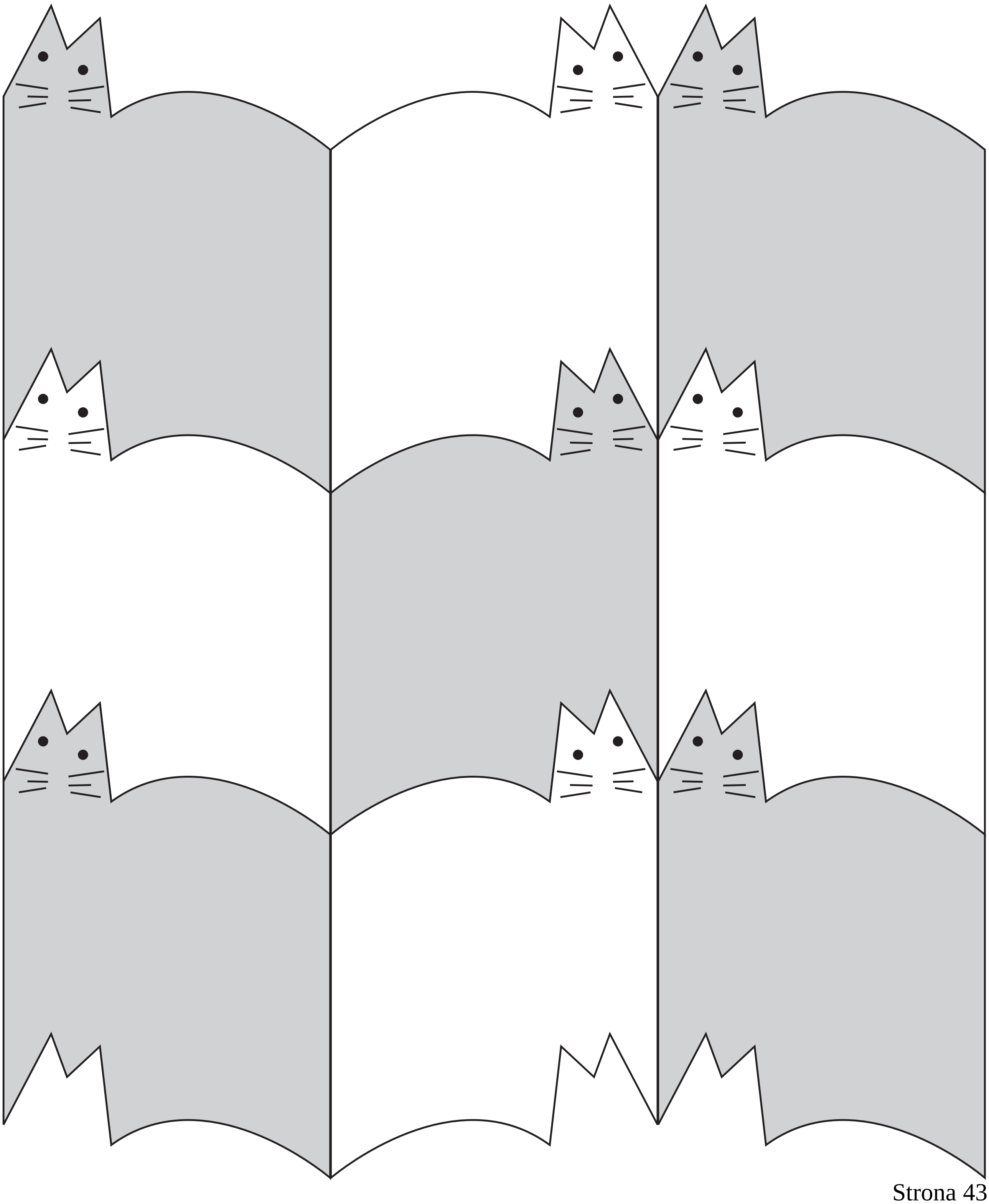


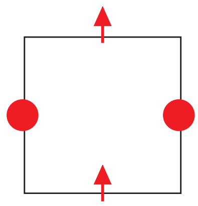
Kwadratowymi płytkami można szczelnie wyłożyć całą płaszczyznę. Takimi kotkami też.
Nie wszystkie z szesnastu reguł (rozdz. 3) można zastosować do ułożenia parkietażu z tego wzoru.
Ja wybrałam trzy i na ich podstawie otrzymałam trzy różne parkietaże

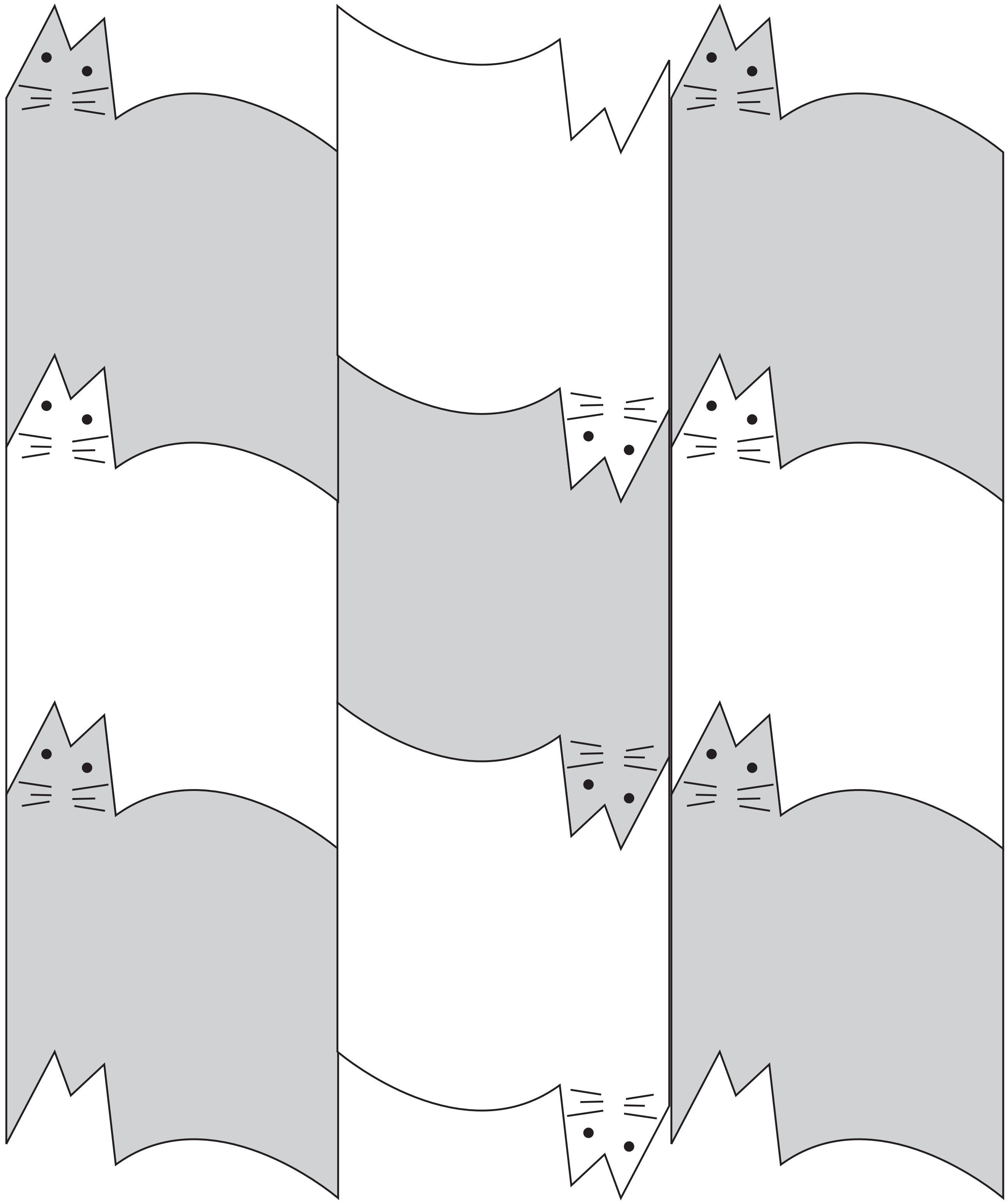






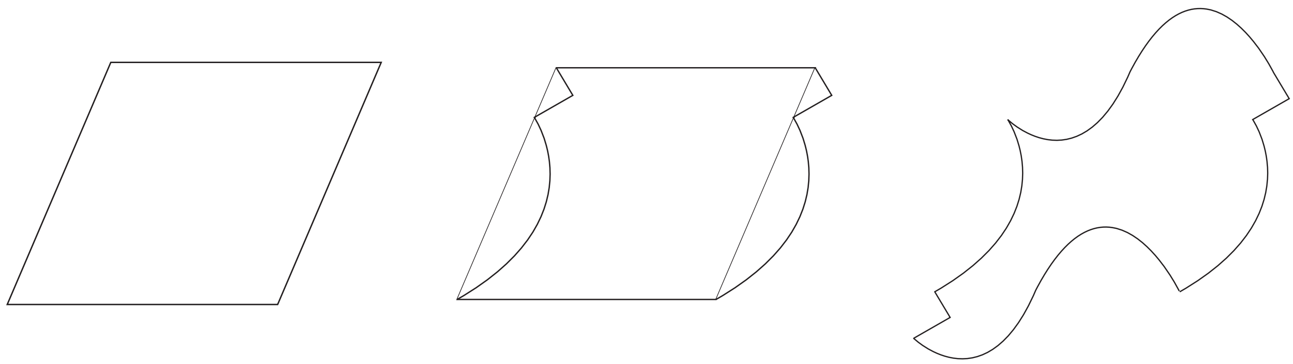




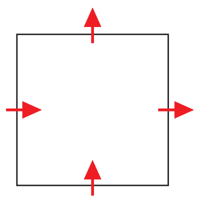


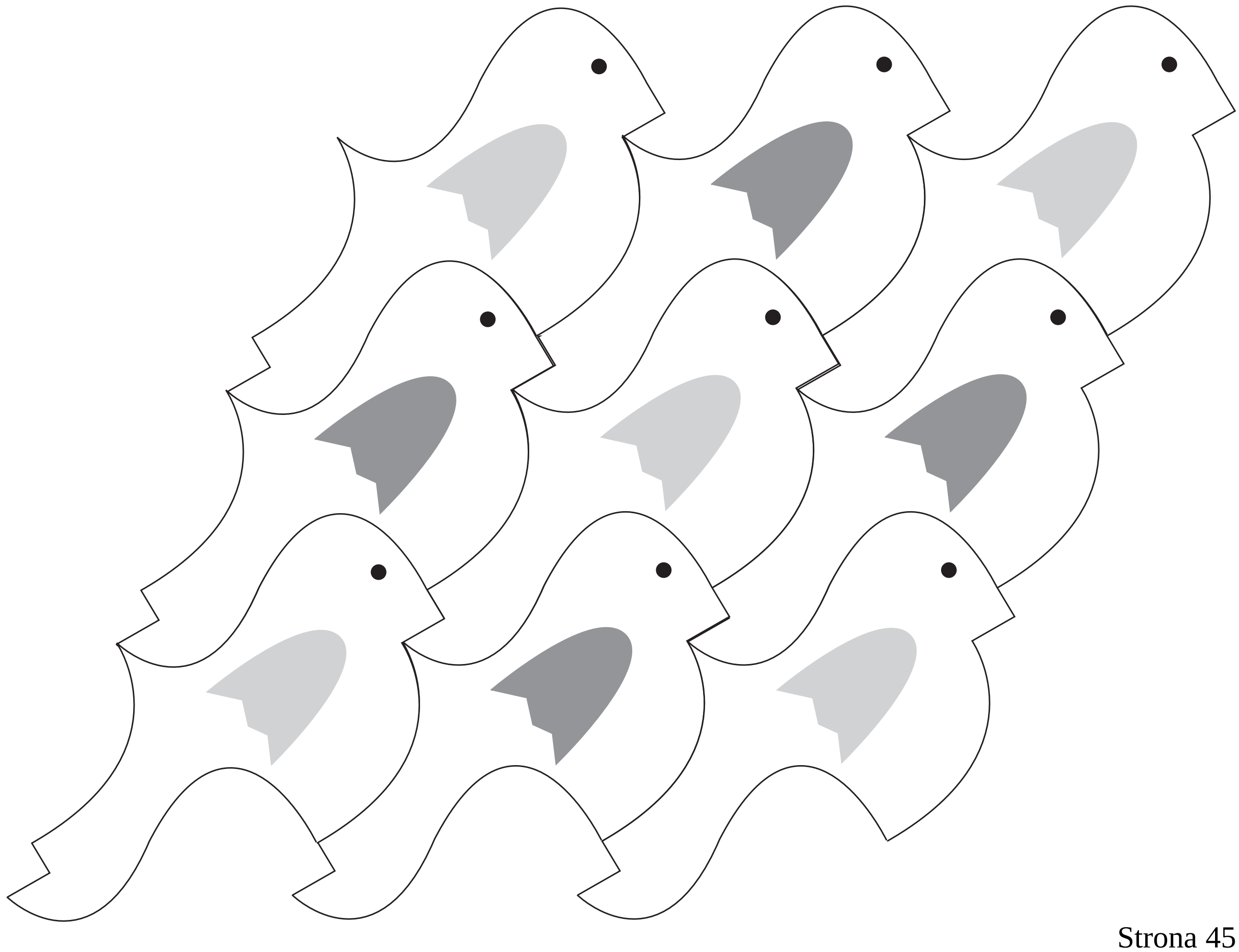
Przykład II

Teraz przekształcimy równoległobok. Co odetniemy nożyczkami z jednego boku to dokleimy do przeciwległego.



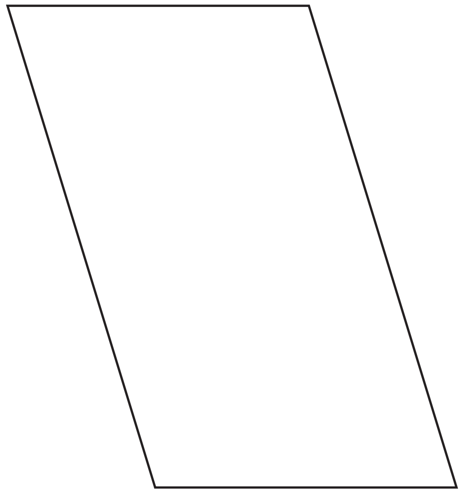
Otrzymujemy niesymetryczny wzór - gołębia. Do tego wzoru pasuje reguła:



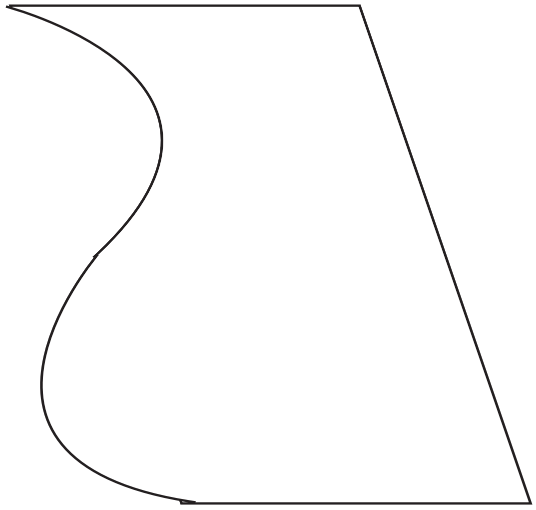


Przykład III

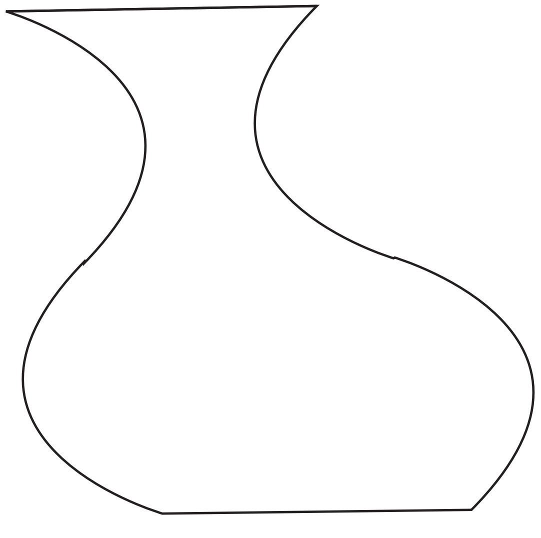
Znów wyjściową klepką bądzie równoległobok. Tym razem będzie on węższy i wyższy.



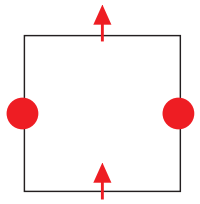
Najpierw przekształcimy lewy bok. Wytniemy kawałek, a niżej dołożymy taki sam ale obrócony o 180°.

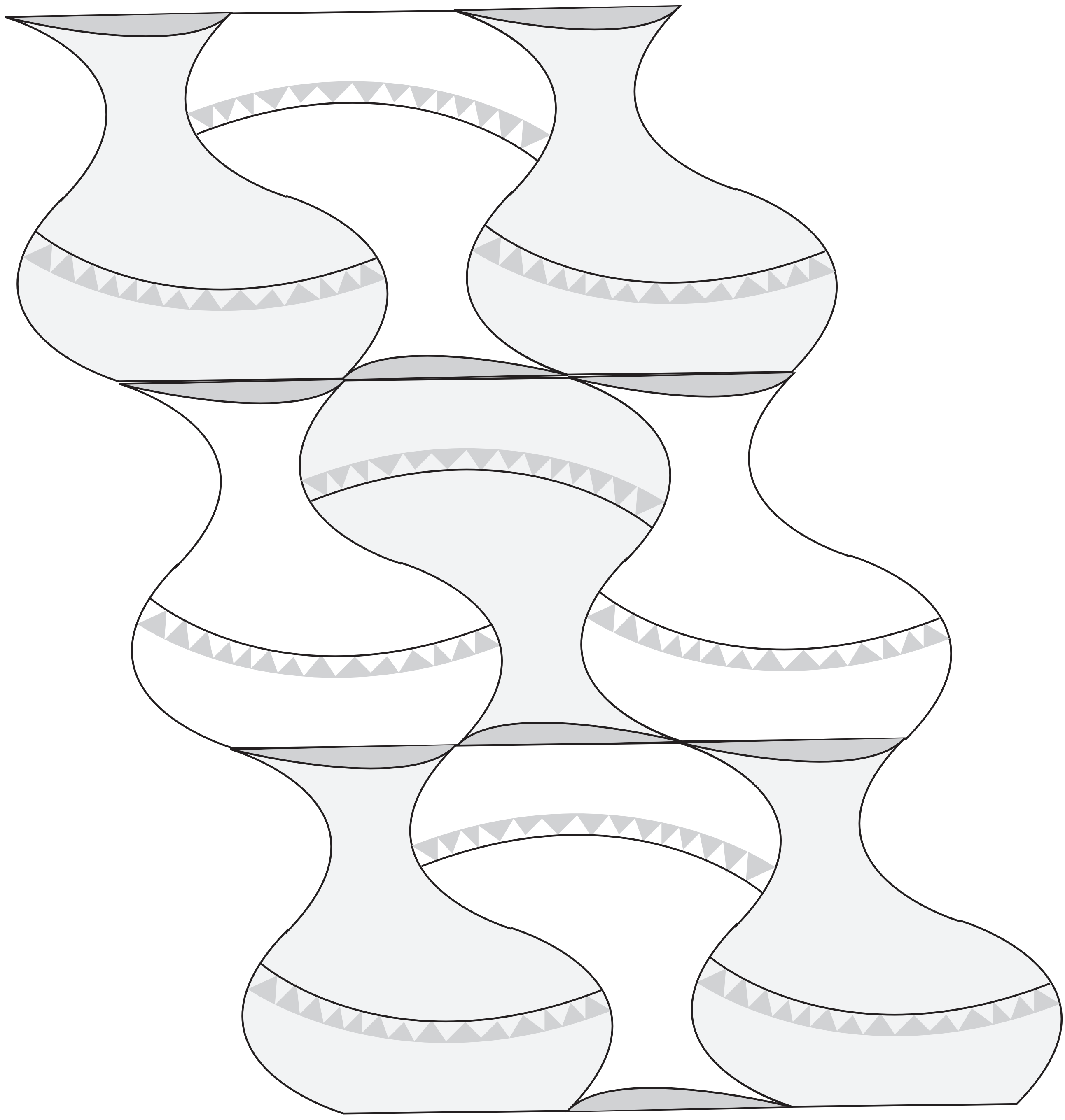


To samo robimy z przeciwległym bokiem.Otrzymamy niesymetryczny wzór - dzban.



Parkietaż zrobimy zgodnie z regułą



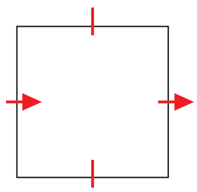


Podobnym ale dużo bardziej skomplikowanym kompozycjom poświęcił wiele swoich prac M. C. Escher.
Jak wykonać parkietaż z psami? Zaczynamy od prostokąta.

Wycinamy kawałek z lewego pionowego boku i doklejamy do przeciwległego boku (są to tylne łapy psa)

Wycinamy z dołu kształt głowy. Odbijamy symetrycznie względem prostej pionowej i doklejamy do góry.

Wzór jest gotowy. Ten parkietaż zrobiony przez Eschera przedstawia regułę:



SPIS TREŚCI