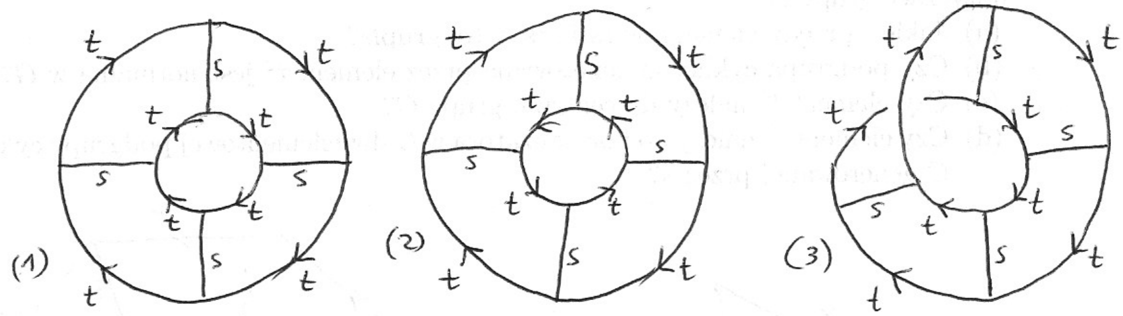
Zadania do wykładu "Grupy Coxetera i geometria"
Lista 1: grafy Cayleya grup

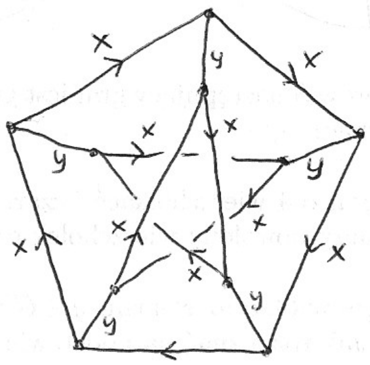
1. Niech Q będzie tzw. *grupą kwaternionową* złożoną z kwaternionów jednotkowych, $Q = \{\pm 1, \pm i. \pm j, \pm k\}$. Narysuj graf Cayleya $\mathrm{Cay}(Q, \{i, j\})$.
2. Jakim grupom odpowiadają trzy przedstowione poniżej grafy Cayleya?



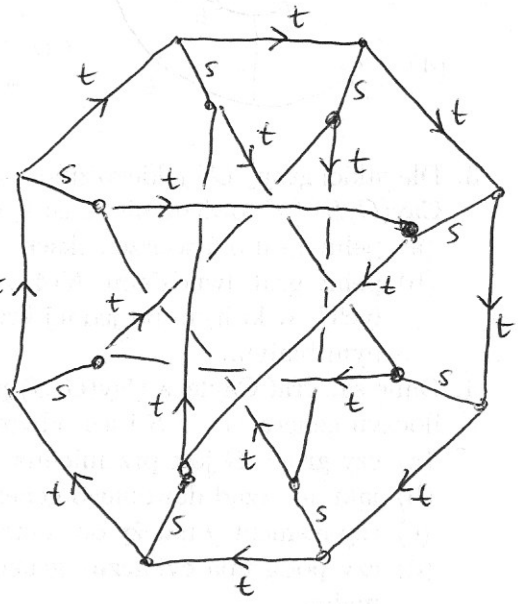
3. Dla jakiej grupy G i jakiego zbioru generatorów S następujący graf jest grafem Cayleya $\mathrm{Cay}(G, S)$ [odpowiedź nie musi być jednoznaczna]:
   (a) pełny graf o 5 wierzchołkach - $K(5)$;
   (b) pełny graf dwudzielny $K(4, 4)$, czyli graf o 4 wierzchołkach "czarnych" i 4 "białych", w którym po jednej krawędzi łączy dowolony wierzchołek czarny z dowolnym białym.
4. Dane są: graf Cayleya $\mathrm{Cay}(G, S)$ pewnej grupy G, oraz element $g \in G$ wyrażony jako iloczyn generatorw z S i ich odwrotności. Jak rozpoznać na podstawie tego grafu
   (a) czy grupa G jest przemienna;
   (b) jaki jest rząd dowolnego generatora $s \in S$, oraz jaki jest rząd elementu g;
   (c) czy element g należy do centrum $Z(G)$ grupy G;
   (d) czy podgrupa cykliczna generowana przez jeden z genetratorów $s \in S$ jest normalna.
5. Dane są: graf Cayleya $\mathrm{Cay}(G, S)$ pewnej grupy G, element $g \in G$ wyrażony jako iloczyn generatorw z S i ich odwrotności, oraz pogrupa $H = \langle T \rangle$ generowana przez podzbiór $T \subset S$.
   (a) Uzasadnij, że komponenty grafu $\mathrm{Cay}(G, S)$ powstałe po usunięciu krawędzi etykietowanych generatorami $t \in S \setminus T$ są izomorficzne (jako grafy etykietowane) z grafem Cayleya $\mathrm{Cay}(H, T)$. Ustal ponadto, że komponenty te odpowiadają warstom podgrupy H w G (lewostronnym czy prawostronnym?).

   Jak poznać za pomocą grafu $\mathrm{Cay}(G, S)$
   (b) czy podgrupa H jest normalna;
   (c) czy element g należy do normalizatora podgrupy H w G.
6. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania, i przy dodatkowym założeniu, że podgrupa H jest normalna w G, znajdź sposób wyznaczenia grafu Cayleya $\mathrm{Cay}(G/H, S \setminus T)$ grupy ilorazowej G/H względem generatorów ze zbioru $S \setminus T$ rozumianych jako odpowiednio indukowane elementy w grupie ilorazowej, w terminach samego grafu Cayleya $\mathrm{Cay}(G, S)$ (bez konieczności rozumienia w inny sposób czym są grupy G, H).

7. Uzasadnij, że obiekt na rysunku (a) poniżej nie jest grafem Cayleya żadnej grupy.
8. Uzasadnij, że obiekt na rysunku (b) poniżej jest grafem Cayleya pewnej grupy G. [**Wskazówka**: sprawdź, że grupa automorfizmów etykietowanego grafu z rysunku (b) działa prosto tranzytywnie na zbiorze jego wierzchołków.]Ustal, że grupa G jest nieprzemienna, i nieizomorficzna z grupą $D_4 \times Z_2$ (gdzie D_4 to grupa symetrii kwadratu) ani z grupą D_8 (symetrii ośmiokąta foremnego). Ustal też następujące fakty dotyczące grupy G:
   (a) Jakie są rzędy elementów ts i t^2s w tej grupie?
   (b) Czy podgrupa cykliczna generowana przez element t^2 jest normalna w G?
   (c) Czy element t^4 należy do centrum grupy G?
   (d) Czy element t^2 należy do normalizatora w G dwuelementowej podgrupy cyklicznej C generowanej przez s?



(a)



(b)