

Zadania do wykładu "Grupy Coxetera i geometria"

Lista 2: grupy dyhedralne

1. Czy grupy symetrii następujących sześciu szlaków są izomorficzne z grupą D_∞ :
...AAAA... ...AVAV... ...ZZZZ... ...HHHH... ...EEEE... ...LFLF... ?
2. Czy grupa kwaternionowa $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ jest izomorficzna z grupą D_4 ?
3. Czy grupa wszystkich symetrii
(a) graniastosłupa prawidłowego o podstawie będącej n -kątem foremnym, $n \neq 4$,
(b) graniastosłupa skręconego o podstawie n -kątej, $n \neq 3$,
jest izomorficzna z grupą dyhedralną D_{2n} ?
4. Dla wszystkich elementów z grupy dyhedralnej D_m znajdź minimalne (co do długości) słowa na standardowych generatorach s, t reprezentujące te elementy. Uzasadnij, że dla każdego $g \in D_m$ z wyjątkiem jednego, takie słowo minimalne jest jedyne, a dla tego wyjątkowego jednego elementu są dwa takie słowa.
5. Uzasadnij, że jeśli s i t są standardowymi generatorami grupy dyhedralnej D_m , to s jest sprzężony z t wtedy i tylko wtedy gdy m jest skończone i nieparzyste.
6. Wyznacz centrum grupy dyhedralnej D_m .
7. Wyznacz wszystkie klasy sprzężoności elementów w grupie dyhedralnej D_m .
8. Dla jakich k grupa D_k jest podgrupą w grupie D_m ? Dla jakich k i m jest to podgrupa normalna?
9. Znajdź podgrupę izomorficzną z grupą dyhedralną D_{12} w grupie permutacji S_7 . Uzasadnij, że dla $n < 7$ w grupie S_n nie ma podgrupy izomorficznej z D_{12} .
10. Uzasadnij, że każda skończona grupa izometrii płaszczyzny jest izomorficzna albo z grupą cykliczną C_n (rzędu n), $n \geq 1$, albo z grupą dyhedralną D_m , $m \geq 1$.