Zadania do wykładu “Grupy Coxetera i geometria”
Lista 3: grupy generowane przez inwolucje

Grupy generowane przez inwolucje i pre-odbicia.

0. Czy grupa G generowana przez inwolucje może mieć nieparzysty rząd?
1. Znajdź przykład grupy dyhedralnej zawierającej element rzędu 2 nie będący pre-odbiciem (względem standardowego układu generatorów). Czy każda grupa dyhedralna posiada taki element?
2. Niech G będzie grupą generowaną przez zbiór inwolucji S.
   (a) Uzasadnij, że pre-odbicia odpowiadające krawędziom w grafie Cayleya $\mathrm{Cay}(G, S)$ przylegającym do ustalonego wierzchołka v są parami różne.
   (b) Niech $s, t \in S$, $s \neq t$, i załóżmy, że rząd elementu st jest skończony. Niech C będzie dowolnym cyklem w grafie Cayleya $\mathrm{Cay}(G, S)$ złożonym z krawędzi naprzemiennie etykietowanych przez s i t. Uzasadnij, że każde dwie naprzeciwległe krawędzie cyklu C wyznaczają to samo pre-odbicie dla (G, S) (innymi słowy, środki przeciwległych krawędzi cyklu C należą do tej samej ściany).

Systemy Coxetera, własności skracania i wymiany.

3. Do zbioru standardowych generatorów $\{s, t\}$ grupy dyhedralnej D_m dodano kolejne elementy rzędu 2, uzyskując zbiór generatorów T (złożony z przynajmniej trzech elementów). Uzasadnij, że para (D_m, T) nie jest wtedy systemem Coxetera.
4. Załóżmy, że rząd m iloczynu st dwóch różnych standardowych generatorów systemu Coxetera (W, S) jest parzysty. Uzasadnij, że inwolucja $(st)^{m/2}$ nie jest wtedyy odbiciem dla (W, S).
5. Niech G będzie grupą wszystkich symetrii regularnego parkietażu płaszczyzny za pomocą kwadratów, niech Δ będzie jednym z ośmiu trójkątów barycentrycznego podziału jednej z kwadratowych klepek, i niech $S = \{a, b, c\}$ będzie zbiorem odbić względem prostych zawierających boki trójkąta Δ.
   (1) Uzasadnij, że S generuje G.
   (2) Znajdź graf Cayleya $\mathrm{Cay}(G, S)$. Wskazówka: zauważ, że grupa G działa prosto tranzytywnie na zbiorze trójkątów barycentrycznego podziału wszystkich klepek parkietażu; użyj środków tych trójkątów jako wierzchołków grafu Cayleya.
   (3) Znajdź wszystkie pre-odbicia dla (G, S) i uzasadnij, że (G, S) jest systemem Coxetera.
6. (**Własność składania - folding condition.**) Dany jest system Coxetera (W, S), oraz elementy $g \in W$, $s, t \in S$ takie, że $l(sg) = l(gt) = l(g) + 1$. Wykaż, że wtedy albo $l(sgt) = l(g) + 2$, albo $sgt = g$. Wskazówka: wyraź g za pomocą słowa minimalnego nad S oraz zastosuj własność skracania lub własność wymiany.
7. Dla generatora $s \in S$ w systemie Coxetera (W, S), niech H_s^+ oznacza zbiór wszystkich wierzchołków grafu Cayleya $\Omega = \mathrm{Cay}(W, S)$, które są zawarte w tej komponencie dopełnienia ściany Ω^s do której należy s. Uzasadnij, że H_s^+ składa się dokładnie z tych elementów $g \in W$, które dadzą się wyrazić słowem minimalnym nad S zaczynającym się od s.

Zastosowania M-redukcji.

8. Uzasadnij, że dla każdego systemu Coxetera (W, S) istnieje homomorfizm $W \to Z_2$, który każdy generator z S przeprowadza na generator w Z_2.
9. Niech (W, S) będzie systemem Coxetera z macierzą Coxetera M, i załóżmy że każdy pozadiagonalny wyraz M jest albo parzysty albo równy ∞. Pokaż, że wówczas istnieje homomorfizm $h : W \to Z_2^{|S|} = S^{Z_2}$ taki, że dla każdego $s \in S$ mamy $h(s) = \delta_s \in S^{Z_2}$. Uzasadnij też, że powyższy warunek na macierz M jest konieczny dla istnienia takiego homomorfizmu h.
10. Niech (W, S) będzie systemem Coxetera z macierzą Coxetera $M = (m_{st})$, i niech $u \in S$ będzie takim generatorem, że dla każdego $s \in S \setminus \{u\}$ zachodzi $m_{su} = \infty$.
    (1) Uzasadnij, że jeśli w jest słowem minimalnym nad S reprezentującym pewien element $g \in W$ i zaczynającym się od u, to każde słowo minimalne reprezentujące g zaczyna się od u.
    (2) Załózmy, że każdy generator $t \in S$ spełnia ten sam warunek co generator u powyżej. Uzasadnij, że wówczas dla każdego $g \in W$ istnieje dokładnie jedno słowo minimalne reprezentujące g.
11. Dla dowolnego systemu Coxetera (W, S) naszkicuj opis i uzasadnienie poprawności działania algorytmu rozpoznającego kiedy dwa słowa nad S reprezentują ten sam elemnet grupy W. (Istnienie takiego algorytmu oznacza, że w grupie W jest rozstrzygalny tzw. **problem słów**.)
12. Niech (W, S) będzie systemem Coxetera z macierzą Coxetera $M = (m_{st})$. Rozważmy relację równoważności $\sim$ na zbiorze S określoną przez następujący warunek: $s \sim t$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg elementów z S, $s_0 = s, s_1, \ldots, s_n = t$ taki, że dla dowolnych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu element $m_{s_i s_{i+1}}$ jest skończony i nieparzysty. Uzasadnij, że generatory $s, t \in S$ są sprzężone w W wtedy i tylko wtedy gdy $s \sim t$.