Zadania do wykładu “Grupy Coxetera i geometria”
Lista 4: systemy Coxetera, podgrupy specjalne.

Algebraiczne operacje na systemach Coxetera

1. Niech $(G_i, S_i) : i = 1, 2$ będą systemami Coxetra o macierzach Coxetera M_i. Rozważmy produkt wolny $G = G_1 * G_2$, i potraktujmy zbiór $S = S_1 \sqcup S_2$ w naturalny sposób jako zbiór generatorów G. Uzasadnij, że (G, S) też jest systemem Coxetera. Wyznacz macierz Coxetera tego systemu.
2. Niech $(G_i, S_i) : i = 1, 2$ będą systemami Coxetra o macierzach Coxetera M_i. Rozważmy sumę prostą (równoważnie, produkt kartezjański) $G = G_1 \oplus G_2$, oraz generujący ją zbiór $S = \{(s, 1) : s \in S_1\} \cup \{(1, t) : t \in S_2\}$. Uzasadnij, że (G, S) też jest systemem Coxetera. Wyznacz macierz Coxetera tego systemu.

Prostokątne systemy Coxetera

System Coxetera (G, S) nazywamy *prostokątnym*, gdy dla dowolnych różnych $s, t \in S$ mamy $m_{st} \in \{2, \infty\}$. *Graf definiujący* prostokątnego systemu Coxetera (G,S) to graf o zbiorze wierzchołków S, w którym para różnych wierzchołków s, t jest połączona krawędzią dokładnie wtedy, gdy $m_{st} = 2$.

3. Dane są prostokątne systemy Coxetera (W_i, S_i) o grafach definujących Γ_i, $i = 1, 2$.
   (a) Czym jest grupa Coxetera o grafie definującym $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ (suma rozączna grafów)?
   (b) Uzasadnij, że system Coxetera $(W_1 * W_2, S_1 \sqcup S_2)$ jest też prostokątny, i ustal jak wygląda graf definiujący tego systemu.
4. Uzasadnij, że prostokątna grupa Coxetera jest skończona dokładnie wtedy, gdy jej graf definiujący jest grafem pełnym.

Grupy permutacji i systemy Coxetera

5. Niech $S = \{(12), (13), (14)\}$ będzie zbiorem transpozycji z grupy permutacji S_4.
   (a) Uzasadnij, że S generuje S_4.
   (b) Uzasadnij, że para (S_4, S) nie jest systemem Coxetera.
6. Niech $\Sigma = \{(i\ i + 1) : i = 1, \ldots, n - 1\}$ będzie zbiorem transpozycji z grupy permutacji S_n.
   (a) Uzasadnij, że Σ generuje S_n.
   (b) Uzasadnij, że para (S_n, Σ) jest systemem Coxetera. Wyznacz macierz Coxetera tego systemu.

Geometria form kwadratowych

7. Niech $\langle\, ,\, \rangle$ będzie dowolną formą kwadratową na przestrzeni wektorowej V wymiaru n, i niech $w \in V$ będzie taki, że $\langle w, w\rangle \neq 0$.
   (a) Uzasadnij, że ortogonalne dopełnienie $w^\perp$ wektora w jest podprzestrzenią wymiaru $n - 1$.
   (b) Wyprowadź wzory na odbicie ortogonalne względem $w^\perp$ oraz rzut ortogonalny na $w^\perp$.
8. Niech $\langle\, ,\, \rangle$ będzie dowolną formą kwadratową na przestrzeni wektorowej V wymiaru n, i niech $v, w \in V$ będą takimi wektorami, że $\langle v, v\rangle \neq 0$ oraz $\langle w, w\rangle \neq 0$. Załóżmy też, że spełniona jest nierówność

   $$(\star) \qquad \langle v, w\rangle^2 < \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle.$$

   Uzasadnij, że podprzestrzenie $v^\perp$ i $w^\perp$ są wtedy różne.
   Pokaż też, że warunku $(\star)$ nie można zastąpić warunkiem, że wektory v, w są niewspółiniowe.

Podgrupy specjalne

9. Dla systemu Coxetera (W, S), niech $(T_i)_{i\in I}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru S. Uzasadnij, że jeśli $T = \cap_{i\in I} T_i$, to $W_T = \cap_{i\in I} W_{T_i}$.
10. Niech T_1, T_2 będąpodzbiorami zbioru generatorów S systemu Coxetera (W, S), i niech $w_1, w_2 \in W$. Wykaż, że $w_1 W_{T_1} \subset w_2 W_{T_2}$ wtedy i tylko wtedy gdy $w_1^{-1} w_2 \in W_{T_2}$ oraz $T_1 \subset T_2$.
11. Uzasadnij geometrycznie, przy użyciu grafu Cayleya oraz własności rozspajania dla ścian, że jeśli (W, S) jest systemem Coxetera, to dla każdego $T \subset S$ para (W_T, T) jest systemem Coxetera.
12. Niech R_T oznacza zbiór odbić w systemie Coxetera (W_T, T), dla podgrupy specjalnej $W_T < W$. Uzasadnij, że $R_T = R \cap W_T$ (gdzie R to zbiór odbić w systemie (W, S)).