Zadania do wykładu “Grupy Coxetera i geometria”
Lista 5: Geometryczne grupy odbiciowe.

Wielościany odbiciowo parkietujące

0. Znajdź wszystkie wielościany wypukłe parkietujące odbiciowo sferę S^1 oraz euklidesową prostą E^1. Które z nich są wielościanami fundamentalnymi grup odbiciowych?
1. Niech P będzie sześciokątem foremnym na płaszczyźnie euklidesowej E^2, i niech W_P będzie grupą generowaną przez odbicia względem ścian tego wielokąta (a dokładniej względem prostych zawierających boki wielokąta P). Niech Π_P będzie parkietażem otrzymanym przez odbijanie P, i wszystkich jego wcześniej otrzymanych kopii, względem ich wszystkich boków. Uzasadnij, że podgrupa w W_P stabilizująca dowolną klepkę parkietażu Π_P jest 6-elementowa i izomorficzna z grupą dyhedralną D_3.
2. Niech Π_P będzie parkietażem sfery S^2 za pomocą regularnych 5-kątów sferycznych, uzyskanym przez promieniste zrzutowanie 1-szkieletu 12-ścianu platońskiego na sferę wpisaną w ten 12-ścian, i niech P będzie jedną z klepek tego parkietażu. Uzasadnij, że podgrupa stabilizująca klepkę P w grupie generowanej przez odbicia względem ścian P jest pełną grupą symetrii klepki P, tzn. 10-elementową grupą dyhedralną D_5.
3. Znajdź wszystkie wielokąty euklidesowe P, które parkietują płaszczyznę E^2. Które z nich są wielokątami fundamentalnymi grup odbiciowych?
   Wskazówka. Uzasadnij następujący fakt pomocniczy, a następnie z niego skorzystaj: *Jeśli wielokąt P parkietuje płaszczyznę, i kąt przy jednym z jego wierzchołków jest postaci $2\pi/k$ dla pewnego nieparzystego k, to dwusieczna tego kąta jest osią symetrii dla P.*
4. Znajdź wszystkie wypukłe wielokąty sferyczne P, które odbiciowo parietują sferę S^2.
   Wskazówka: skorzystaj z faktu, że suma kątów w n-kącie sferycznym jest ostro większa niż $(n-2)\pi$, oraz ze wskazówki analogicznej do tej w poprzednim zadaniu.
5. Podaj przykład wielościanu wypukłego $P \subset E^3$ parkietującego odbiciowo E^3, i nie będącego prostopadłościanem ani graniastosłupem

Geometria i sympleksy

6. Uzasadnij, że r_1, r_2 są odbiciami w E^n takimi, że rząd ich złożenia wynosi $m > 1$ wtedy i tylko wtedy gdy kąt pomiędzy lustrami tych odbić wynosi $k \cdot \pi/m$ dla pewnego $k \in \{1, \dots, m-1\}$ względnie pierwszego z m.

Ścianą k-wymiarową wielościanu $P \subset X^n$ nazywamy każdy niepusty podzbiór P zawarty w jego brzegu, który daje się wyrazić jako przekrój $X^k \cap P$, dla pewnej k-wymiarowej podprzestrzeni $X^k \subset X^n$, i który ma niepuste wnętrze w X^k.

Jeśli wielościan P jest otoczką wypukłą $\mathrm{conv}(A)$ pewnego skończonego zbioru A, przy czym A jest minimalnym zbiorem rozpinającym P, to ścianom $F \subset P$ odpowiadają jednoznacznie pewne podzbiory $A_F \subset A$, dla których $F = \mathrm{conv}(A_F)$.

Wielościan P w X^n nazywamy *sympleksem* (n-wymiarowym), jeśli jest otoczką wypukłą zbioru $(n+1)$-elementowego A, i jeśli przyporządkowanie $F \to A_F$ jest surjekcją ze zbioru ścian wielościanu P na zbiór wszystkich niepustych podzbiorów A.

7. Zbiór punktów $A_0, \dots, A_k$ w R^n nazywamy *afinicznie niezależnym* gdy układ wektorów $A_i - A_0 : i = 1, \dots, k$ jest liniowo niezależny.

(a) Uzasadnij, że własność afinicznej niezależności nie zależy od porządku punktów.
(b) Uzasadnij, że jeśli punkty $A_0, \dots, A_n$ w R^n są afinicznie niezależne, to otoczka wypukła $\mathrm{conv}(A_0, \dots, A_n)$ jest sympleksem.

8. Niech $q_0, \dots, q_n$ będą liniowo niezależnymi wektorami w R^{n+1}, i niech

$$C = C(q_0, \dots, q_n) := \{\sum a_i q_i : a_i \geq 0\}$$

będzie stożkiem symplicjalnym.
(a) Niech $H \subset R^{n+1}$ będzie n-wymiarową podprzestrzenią afiniczną rozpiętą na końcach wektorów $q_0, \dots, q_n$. Uzasadnij, że przekrój $H \cap C$ jest n-wymiarowym sympleksem w H.
(b) Niech $S^n \subset R^{n+1}$ będzie sferą o środku w 0, czyli w wierzchołku stożka C. Uzasadnij, że przekrój $S^n \cap C$ jest n-wymiarowym sympleksem sferycznym w S^n.

Geometryczne grupy odbiciowe

9. Uzasadnij, że jeśli P jest wielościanem fundamentalnym euklidesowej grupy odbiciowej, to jego naroże wokół każdego wierzchołka jest symplicjalne, tzn. wygląda lokalnie jak naroże wierzchołka w pewnym stożku symplicjalnym tego samego wymiaru. Wskazówka: skorzystaj z faktu, że każdy wielościan fundamentalny sferycznej grupy odbiciowej jest sympleksem.
10. Znajdź wszystkie sferyczne i euklidesowe systemy Coxetera, które są prostokątne, oraz wyznacz ich grafy definiujące.
11. Niech $E^{n+k} = E^n \oplus E^k$ będzie rozkładem ortogonalnym przestrzeni euklidesowej E^{n+k}. Niech P, Q będą wielościanami fundamentalnymi grup odbiciowych w E^n i E^k odpowiednio, zaś grupy te oznaczmy przez W_P i W_Q. Uzasadnij, że produktowy wielościan wypukły $P \oplus Q \subset E^{n+k}$ jest także wielościanem fundamentalnym euklidesowej grupy odbiciowej. Jaka jest macierz Coxetera tej grupy, jeśli znamy macierze Coxetera grup W_p i W_Q, i jak się ta nowa grupa wyraża w terminach grup W_P i W_Q?
12. Dla $i = 1, 2$, niech (W_{P_i}, S_{P_i}) będą sferycznymi systemami Coxetera z wielościanami fundamentalnymi $P_i \subset S^{n_i}$. Uzasadnij, że produkt prosty $W_{P_1} \oplus W_{P_2}$ jest sferyczną grupą odbiciową na sferze $S^{n_1+n_2+1}$. Spróbuj nadać sens powyższemu stwierdzeniu także w przypadku gdy któreś $n_i = 0$. Wskazówka: rozważ $S^{n_1+n_2+1} \subset R^{n_1+n_2+2} = R^{n_1+1} \times R^{n_2+1}$.