Zadania do wykładu "Grupy Coxetera i geometria"
Lista 6: geometryczne grupy Coxetera - ciąg dalszy.

Przestrzenie odbiciowe $\mathcal{U}(W, X)$

1. Niech X będzie przestrzenią z lustrami dla systemu Coxetera (W, S). Dla $w \in W$, niech $wX := \{[w, x] \in \mathcal{U}(W, X) : x \in X\}$. Uzasadnij, że przeciwobraz zbioru wX przez odwzorowanie ilorazowe $q : W \times X \to [W \times X/\sim] = \mathcal{U}(W, X)$ jest domknięty w przestrzeni $W \times X$.
2. Niech (W, S) będzie dowolnym systemem Coxetera. Niech $C = \mathrm{Cone}(S)$ bdzie stokiem nad zbiorem S, i niech rodzina podzbiorów $C_s := \{s\} \subset \mathrm{Cone}(S)$, dla $s \in S$, zadaje n C strukturę przestrzeni z lustrami. Uzasadnij, że przestrzeń $\mathcal{U}(W, C)$ jest ekwiwariantnie homeomorficzna z grafem Cayleya $\mathrm{Cay}(W, S)$.
3. Niech X będzie przestrzenią z lustrami X_s dla systemu Coxetera (W, S), i niech $Y \subset X$ będzie podprzestrzenią. Niech $T := \{s \in S : Y \cap X_s \neq \emptyset\}$. Potraktujmy przestrzeń Y wraz z rodziną podprzestrzeni $Y_t := Y \cap X_t$, $t \in T$, jako przestrzeń z lustrami dla systemu Coxetera (W_T, T). Dla dowolnego ustalonego $g \in W$ niech $f_g : \mathcal{U}(W_T, Y) \to \mathcal{U}(W, X)$ będzie zadane przez $f_g([w, y]) = [gw, y]$.
   (a) Uzasadnij, że odwzorowanie f_g jesdt dobrze określone.
   (b) Uzasadnij, że f_g jest włożeniem.
   (c) Uzasadnij, że jeśli Y jest otwartym podzbiorem X, to obraz odwzrowania f_g jest otwarty w $\mathcal{U}(W, X)$.
4. Uzasadnij, że przestrzeń $\mathcal{U}(W, X)$ jest drogowo spójna wtedy i tylko wtedy, gdy X jest drogowo spójna oraz $X_s \neq \emptyset$ dla każdego $s \in S$.
5. Niech X będzie przestrzenią z lustrami dla systemu Coxetera (W, S), i niech Y będzie dowolną przestrzenią z działaniem grupy W. Dla każdego $s \in S$, niech Y_s będzie zbiorem punktów stałych przekształcenia $s : Y \to Y$. Niech $f : X \to Y$ będzie dowolnym odwzorowaniem takim, że $f(X_s) \subset Y_s$. Uzasadnij, że istnije jedyne rozszerzenie f do W-ekwiwariantnego odwzorowania $\hat{f} : \mathcal{U}(W, X) \to Y$.

Lokalne homeomorfizmy i nakrycia

Lokalny homeomorfizm to takie przekształcenie $f : X \to Y$, że każdy punkt $x \in X$ posiada otwarte otoczeniu U w X, które f przekształca homeomorficznie na otwarty podzbiór w Y.

6. Podaj przykad lokalnego surjektywnego homeomorfizmu $f : X \to Y$, gdzie X jest przestrzenią spójną, który nie jest nakryciem. Czy można znaleźć taki przykład gdy Y jest jednospójna (np. $Y = S^2$, $Y = E^2$)?
7. Niech X będzie przestrzenią metryczną lokalnie spójną, i niech $f : X \to Y$ będzie lokalnym homeomorfizmem, który jest ponadto lokalną izometrią. Uzasadnij, że jeśli X jest zupełna, to f jest nakryciem.

Skończone grupy generowane przez odbicia

8. Niech G będzie skończoną podgrupą w grupie $O(n)$ (ortogonalnych przekształceń liniowych przestrzeni R^n ze standardowym iloczynem skalarnym) generowaną przez ortogonalne odbicia względem podprzestrzeni $H_i < R^n$, $i \in I$. Uzasadnij, że G jest geometryczną grupą odbiciową odpowiadającą pewnemu wielościennemu stożkowi $C^n \subset R^n$, jako wielościanowi fundamentalnemu. (Równoważnie, po obcięciu działania G do sfery $S^{n-1} \subset R^n$, jest to geometryczna grupa odbiciowa z wielościanem fundamentalnym $P^{n-1} = C^n \cap S^{n-1}$.) Inaczej mówiąc, istnieje zbiór $S \subset G$ złożony z odbić taki, że para (G, S) jest systemem Coxetera (zbiór S na ogół będzie różny od wyjściowego zbioru generującego).
9. Niech $Q \subset S^n$ będzie wielościanem parkietującym odbiciowo sferę S^n, i niech G będzie grupą generowaną przez odbicia względem ścian wielościanu Q. Załóżmy, że G nie jest prosto tranzytywna w działaniu na klepkach parkietażu Π_Q. Posługując się poprzednim zadaniem uzasadnij, że mimo wszystko G jest sferyczną grupą odbiciową. Pokaż też, że wielościanem fundamentalnym dla G jest pewien wypukły wielościan P powstały z podziału Q na kilka jednakowych częsci (ile?).
10. Niech G będzie skończoną grupą przkształceń liniowych przestrzeni R^n.
   (a) Uzasadnij, że istnieja taki iloczyn skalarny w R^n, dla którego wszaystkie przekształcenia z grupy G są ortogonalne.
   (b) Uzasadnij, że jeśli g/inG jest nietrywialnym przekształceniem zachowującym pewną $(n-1)$-wymiarową podprzestrzeń $V < R^n$, to względem iloczynu skalarnego z punktu (a) g jest ortogonalnym odbiciem względem V.