Zadania do wykładu "Grupy Coxetera i geometria"
Lista 7: bryły platońskie i grupy Coxetera.

Ogólne własności wielościanów

0. Uzasadnij, że w dowolnym wypukłym wielościanie Q dowolne dwie flagi można "połączyć" za pomocą ciągu flag, w którym każde dwie kolejne flagi różnią się tylko na jednej pozycji.

Bryły platońskie i ich symbole Schläfli'ego

1. Uzasadnij bezpośrednio z definicji, że:
   (a) k-wymiarowy sympleks regularny jest bryłą platońską o symbolu Schläfli'ego $[3, 3, \ldots, 3]$;
   (b) k-wymiarowa kostka $[0, 1]^k \subset E^k$ jest bryłą platońską o symbolu Schläfli'ego $[4, 3, \ldots, 3]$;
   (c) k-wymiarowy hiperośmiościan, czyli otoczka wypukła w E^k końsów wektorów $\pm e_1, \ldots, \pm e_k$, jest bryłą platońską o symbolu Schläfli'ego $[3, 3, \ldots, 3, 4]$.
2. (opis 24-komórki) Rozważmy parkietaż P w 4-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^4 za pomocą jednostkowych 4-wymiarowych kostek (o wszystkich wierzchołkach mających całkowitoliczbowe współrzędne). Niech $Q_0 = [0, 1]^4$ będzie wyróżnioną klepką tego parkietażu. Niech A będzie zbiorem środków wszystkich tych klepek parkietażu P, które przylegają do Q_0 wzdłuż jej 3-wymiarowych ścian, i niech B będzie zbiorem wszystkich wierzchołkw Q_0. Niech Ω będzie otoczką wypukła zbioru $A \cup B$.
   (a) Uzasadnij, że Ω, jako zbiór, jest sumą kostki Q_0 oraz tych części klepek Q przylegających do Q_0 wzdłuż 3-wymiarowych ścian, które wyrażają się jako afiniczny stożek z wierzchołkiem w środku kostki Q i z podstawą będącą wspólną ścianą Q z Q_0.
   (b) Uzasadnij, że każda z 3-wymiarowych ścian w Ω jest ośmiościanem platońskim posiadającym następujący ogólny opis:
   niech Q i Q' będa płytkami parkietażu P przyległymi do Q_0 wzdłuż 3-wymiarowych ścian, i załózmy że ich przekrój jest 2-wymiarową ściana (kwadratem), którą oznaczamy przez K; niech a i a' będą środkami Q i Q' odpowiednio; wówczas a, a' i K leżą we wspólnej 3-wymiarowej afinicznej podprzestrzeni w E^4 i rozpięty przez nie wielościan w tej podprzestrzeni jest 8-ścianem platońskim oraz ścianą w Ω.
   (c) sprawdź, że Ω spełnia pozostałe warunki z definicji bryły platońskiej i uzasadnij, że jej symbolem Schläfli'ego jest $[3, 4, 3]$.
3. Uzasadnij, że jeśli grupa symetrii wielościanu wypukłego Q działa tranzytywnie na jego flagach, to Q jest bryłą platońską.

Parkietaże platońskie

Euklidesowy parkietaż platoński to taki parkietaż przestrzeni euklidesowej dowolego wymiaru, którego klepkami są jednakowe bryły platońskie, i w którym dwie różne klepki są albo rozłączne, albo ich przekrój jest CAŁĄ ścianą pewnego niższego wymiaru w każdej z nich.

4. Podaj definicję *współczynnika Schläfli'ego* parkietażu platońskiego, i uzasadnij, że jest to jednoznaczne pojęcie. Następnie podaj definicję *symbolu Schläfli'ego* parkietażu platońskiego.
5. Wyznacz symbol Schläfli'ego platońskiego parkietażu przestrzeni euklidesowej E^k za pomocą k-wymiarowych kostek.
6. Podaj opis platońskiego parkietażu przestrzeni E^4 za pomocą 24-komórkowych klepek, oraz wyznacz symbol Schläfli'ego tego parkietażu. Wskazwka: wykorzystaj opis 24-komórki z zadania 2.
7. Uzasadnij, że grupa symetrii euklidesowego parkietażu platońskiego działa prosto tranzytywnie na zbiorze flag (maksymalnych) tego parkietażu.
8. Niech P będzie euklidesowym parkietażem platońskim, niech Q będzie jego klepką, i niech Σ będzie sympleksem barycentrycznego podziału bryły Q.
   (a) Uzasadnij, że Σ jest wtedy wielościanem fundamentalnym euklidesowej grupy odbiciowej, i że ta grupa odbiciowa pokrywa się z grupą $\mathrm{Sym}(P)$ wszystkich symetrii parkietażu P.
   (b) Wyznacz miary kątów dwuściennych w sympleksie Σ, w terminach symbolu Schläfli'ego parkietażu P, i sprawdź, że diagram Dynkina stowarzyszonej grupy odbiciowej jest "linearny", z wykładnikami kolejno równymi liczbom występującym w symbolu Schläfli'ego.

Pewien sposb klasyfikacji brył platońskich

9. Uzasadnij, że nie ma innych brył platońskich niż podane w twierdzeniu klasyfikacyjnym, za pomocą analizy ich potencjalnych symboli Schläfli'ego, i bez korzystania z klasyfikacji skończonych grup Coxetera. Skorzystaj z następujących własności:
   (1) każda bryła platońska wyznacza grupę Coxetera która jest skończona i ma linearny diagram Dynkina z etykietami krawędzi równymi wyrazom w symblu Schläfli'ego;
   (2) każdy euklidesowy lub hiperboliczny parkietaż platoński wyznacza grupę Coxetera która jest nieskończona i ma linearny diagram Dynkina z etykietami krawędzi równymi wyrazom w symblu Schläfli'ego;
   (3) poddiagram diagramu Dynkina jest diagramem Dynkina odpowiedniej podgrupy specjalnej;
   (4) podgrupa specjalna skończonej grupy Coxetera nie moe być nieskończona;
   (5) następujące symbole Schläfli'ego odpowiadają euklidesowym parkietażom platońskim, i dlatego stowarzyszone z nimi grupy odbiciowe są nieskończone: $[p,q]$ - gdzie $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}$, $[3,4,3,3]$ oraz $[4,3,\ldots,3,4]$ z dowolną ≥ 0 liczbą trójek;
   (b) następujące symbole Schläfli'ego odpowiadają hiperbolicznym parkietażom platońskim, i dlatego stowarzyszone z nimi grupy odbiciowe są nieskończone: $[p,q]$ - gdzie $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}$, $[3,5,3]$, $[5,3,4]$, $[5,3,5]$, $[5,3,3,3]$, $[5,3,3,4]$ oraz $[5,3,3,5]$.