Zadania z Geometrii Elementarnej 1
Lista 4. Zasada Cavalieriegi i podobne metody.

1. Posługując się intuicyjnymi metodami w stylu Cavalieriego i Toricellego oblicz pola następujących powierzchni:
   (a) powierzchnia boczna stożka o promieniu podstawy r i tworzącej L;
   (b) powierzchnia boczna stożka ściętego o promieniach podstaw $r_1 < r_2$ i pobocznicy λ;
2. Zastosuj zasadę Cavalieriego do obliczenia objętości torusa, czyli bryły powstałej przez obrót koła o promieniu r wokół osi odległej o $d > r$ od środka tego koła.
   Wskazówka: porównaj przekroje torusa płaszczyznami prostopadłymi do osi obrotu z przekrojami walca, położonego poziomo, o odpowiednio dobranych parametrach.
3. Zastosuj zasadę Cavalieriego do obliczenia objętości następujących brył:
   (a) bryły ograniczonej paraboloidą obrotową $z = x^2 + y^2$ oraz płaszczyzną $z = h_0$;
   (b) odcinka paraboloidy obrotowej o wysokości h i promieniu kołowego "denka" r;
   (c) bryły przypominającej wrzeciono, powstałej przez obrót wokół cięciwy *krótszego* łuku okręgu o końcach wspólnych z tą cięciwą (dobierz sam parametry);
   (d) bryły przypominającej jabłko, powstałej przez obrót wokół cięciwy *dłuższego* łuku okręgu o końcach wspólnych z tą cięciwą (dobierz sam parametry);
   (e) bryły ograniczonej hiperboloidą obrotową zadaną równaniem $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ oraz płaszczyznami $z = 1$ i $z = -1$;
   (f) bryły ograniczonej górną częścią hiperboloidy dwupowłokowej $x^2 + y^2 = z^2 - 1$ oraz płaszczyzną $z = 2$;
4. Wyznacz metodą niepodzielnych pole powierzchni torusa z zadania 2.
5. Wykorzystaj "proporcjonalnościową" wersję zasady Cavalieriego do wyprowadzenia wzoru na
   (a) pole elipsy o półosiach a i b (zadanej równaniem $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$), porównując ją z odpowiednim kołem, oraz wyliczając długości odcinków przekroju za pomocą równania elipsy;
   (b) objętość elipsoidy o półosiach długości a, b i c (rozważ równanie elipsoidy $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, wylicz półosie elips będących jej przekrojami, wstawiając $z = h$ do jej równania, skorzystaj ze wzoru na pole elipsy z poprzedniego podpunktu).
6. Wykorzystaj rysunek poniżej jako pomysł do wyliczenia objętości walcowego klina po prawej stronie rysunku (dobierz parametry klina). Lewa strona rysunku przedstawia półkulę o promieniu R (której objętość możemy traktować jako znaną) wypełnioną odpowiednimi powierzchniami walcowymi dającymi się "rozprostować" do prostokątów.