Zadania z Geometrii Elementarnej 1
Lista 5. Wielościany i wzór Eulera.

1. Uzasadnij, że dla dowolnego wielościanu wypukłego mamy $3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \ldots = 2K$ oraz $3W_3 + 4W_4 + 5W_5 + \ldots = 2K$, gdzie S_i oznacza ilość i-kątnych ścian, zaś W_i ilość wierzchołków w których spotyka się i ścian.
2. Uzasadnij, że w dowolnym wielościanie wypukłym $3W \leq 2K$ oraz $3S \leq 2K$. Kiedy zachodzą równości?
3. Posługując się poprzednim zadaniem oraz tożsamością Eulera wyprowadź następujące nierówności, prawdziwe w dowolnym wielościanie wypukłym: $2W \geq S+4$, $2S \geq W+4$, $3W \geq K+6$, $3S \geq K+6$. Czy w tych nierównościach może zdarzyć się równość? Dla jakich wielościanów?
4. Wielościan wypukły ma 5 ścian. Ile może mieć wierzchołków i ile krawędzi?
5. Czy dla każdej trójki liczb naturalnych W, K, S wypełniających tożsamość Eulera istnieje wielościan wypukły o liczbie ścian S, liczbie krawędzi K oraz liczbie wierzchołków W? A jak będzie, gdy dodatkowo założymy, że $W \geq 4$, $S \geq 4$?
6. Czy wielościan, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi musi być foremny (platoński)?
7. Uzasadnij, że w dpowolnym wielościanie archimedesowym wszystkie krawędzie mają jednakowe długości.
8. Jakie wielościany archimedesowe można uzyskać przez ścinanie naroży w wielościanach platońskich?
9. Posługując się wzorem Eulera oblicz ilość wierzchołków, krawędzi oraz ścian poszczególnych rodzajów w wielościanie archimedesowym, w którym wokół każdego wierzchołka cyklicznie występują:
   a. trzy trójkąty i pięciokąt;
   b. trójkąt, pięciokąt, trójkąt, pięciokąt;
   c. trójkąt i dwa ośmiokąty;
   d. trójkąt, kwadrat, pięcikąt, kwadrat;
   e. keadrat, sześcikąt, ośmiokąt.
10. Naszkicuj diagramy Schlegela i siatki brył z zadania 9, i zastanów się jak otrzymać takie bryły przez obcinanie wierzchołków bądź krawędzi brył platońskich.
11. Czy istnieje wielościan, w którym ilość nieparzystokątnych ścian byłaby nieparzysta?
12. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym:
    a. w każdym wierzchołku spotyka się sześć trójkątnych ścian;
    b. każdy wierzchołek należy do trzech ścian, z których dwie są ośmiokątne a jedna czworokątna;
    c. wszystkie ściany są sześciokątne?
13. Wykaż, że każdy wielościan wypukły musi mieć przynajmniej jedno naroże trójścienne, lub przynajmniej jedną ścianę trójkątną.
14. Wykaż, że w każdym wielościanie wypukłym suma liczby ścian trójkątnych i liczby naroży trójściennych jest równa conajmniej 8. Podaj przykłady kilku różnych wielościanów, dla których ta suma wynosi dokładnie 8. Czy można jakoś scharakteryzować takie wielościany?