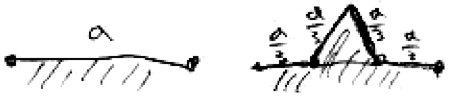
KRZYWA KOCHA I PŁATEK KOCHA

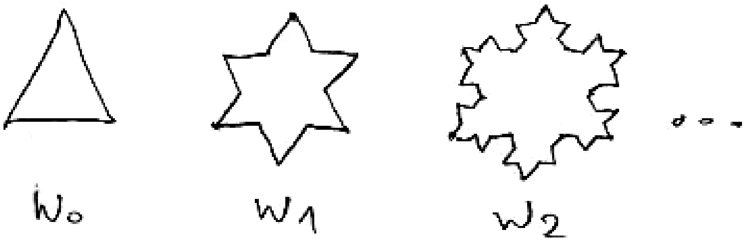
(1) zaczynamy od trójkąta równobocznego o boku 1 : 

(2) dokonujemy następującej modyfikacji każdego boku:



trójkąt równoboczny o boku $a/3$, doklejony na zewnątrz, wzdłuż środkowego odcinka powstałego z podziału boku a na 3 równe części

(3) powtarzamy (2) nieskończenie wiele razy:



(4) graniczna linia to krzywa Kocha;

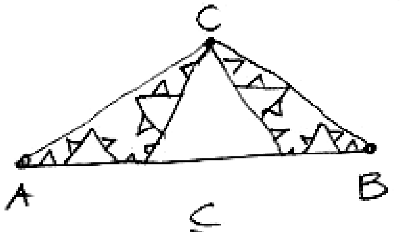
graniczny obszar ograniczony przez tę linię to płatek Kocha, ozn. Ω.

WŁASNOŚCI:

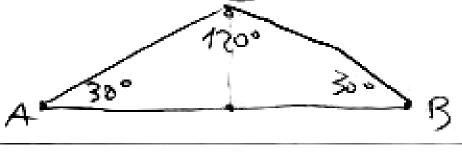
- krzywa Kocha jest ciągła, ale w żadnym punkcie nieróżniczkowalna
  krzywa zamknięta o nieskończonej długości
- płatek Kocha jest figurą ograniczoną, mierzalną (w sensie Jordana)

Uzasadnimy to ostatnie, i obliczymy pole płatka Kocha.

FAKT POMOCNICZY [przyjmujemy bez dowodu].



Fragment krzywej Kocha zbudowanej na odcinku AB jak na rysunku, mieści się całkowicie poniżej łamanej ACB.

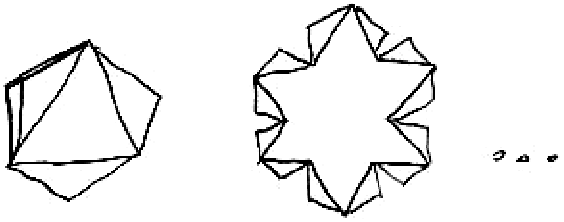


Przybliżenie wielokątami od wewnątrz: $W_0, W_1, W_2, \ldots$

Przybliżenia wielokątami od zewnątrz:

Z_n – otrzymujemy z W_n przez doklejenie wzdłuż każdego boku, po zewnętrznej stronie, trójkąta podobnego do 

, wzdłuż jego dłuższego boku



Z_0 Z_1

Dzięki faktom powyższym, dla każdego n mamy $\Omega \subset Z_n$.

MIERZALNOŚĆ Ω:

Pomocnicze informacje:

- boki W_n mają długość $\left(\frac{1}{3}\right)^n$
- W_n posiada $3 \cdot 4^n$ boków
- pole trójkąta 

wynosi $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$

Stąd $P(Z_n) - P(W_n) = [3 \cdot 4^n] \cdot \frac{\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)^2 \sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{4^n}{9^n} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left[P(Z_n) - P(W_n)\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0.$$

Więc płatek Kocha Ω jest mierzalny.

VERTE

POLE płatka Kocha Ω:

Koch 3

$$P(\Omega) = \lim_{n\to\infty} P(W_n)$$

- W_n powstaje z W_{n-1} przez doklejenie $3\cdot 4^{n-1}$ sztuk trójkątów równobocznych o boku $a = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
- pole trójkąta równobocznego o boku a wynosi $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Zatem $P(W_n) = P(W_{n-1}) + 3\cdot 4^{n-1}\cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\cdot\sqrt{3}}{4} =$

$$= P(W_{n-1}) + \frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Stąd ~~Powtarzając to rozumowanie~~:

$$P(W_n) = P(W_0) + \frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right].$$

Mamy ogólny wzór: $a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a - a^{n+1}}{1-a}$

Stąd $P(W_n) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\,\frac{\left(\frac{4}{9}\right) - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{\frac{5}{9}}$

$$P(\Omega) = \lim_{n\to\infty} P(W_n) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{4/9}{5/9} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} =$$

$$= \sqrt{3}\,\frac{5+3}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

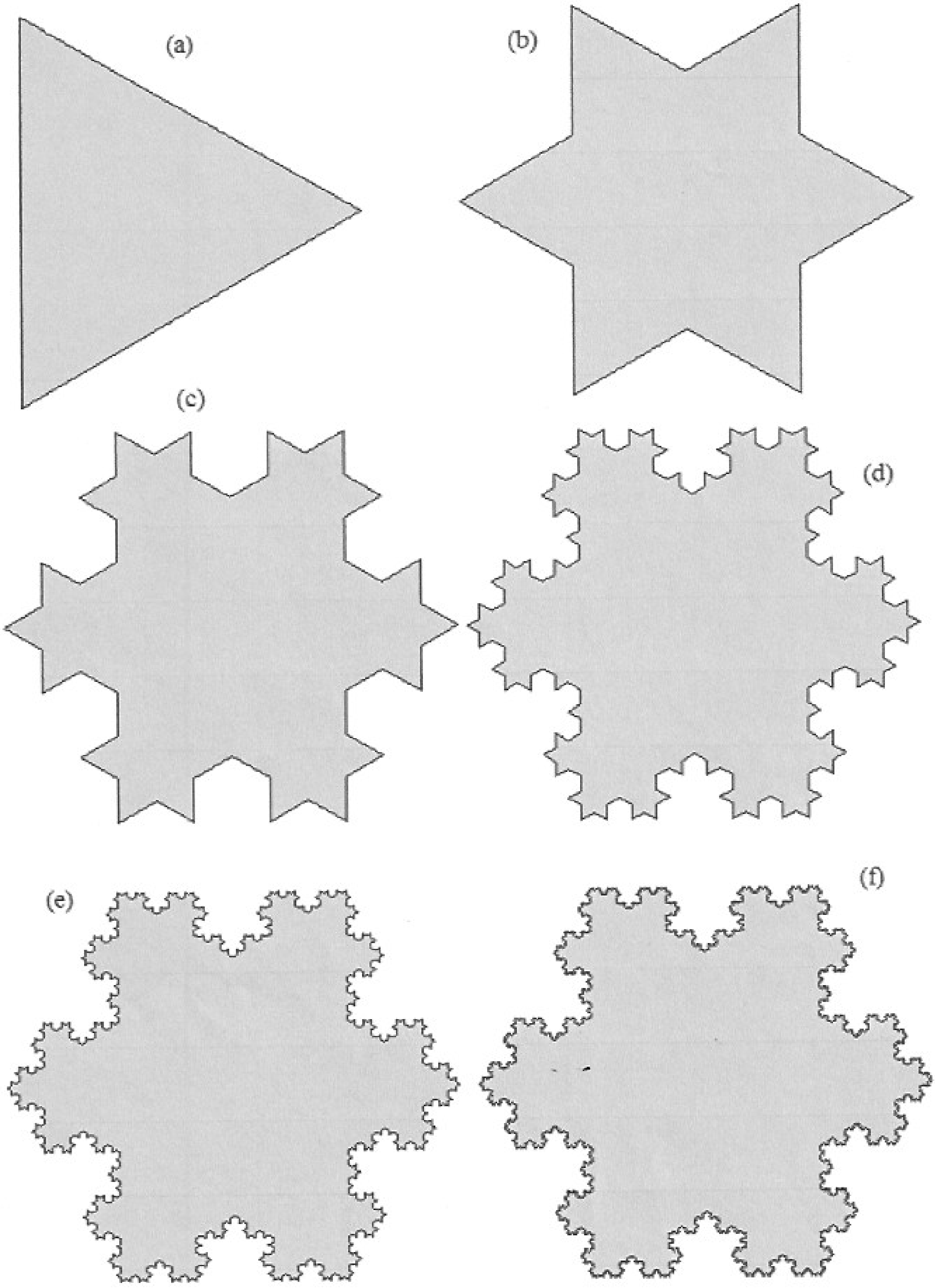
$$\boxed{P(\Omega) = \frac{2\sqrt{3}}{5}}$$

$\frac{8}{5}$ razy pole wyjściowego trójkąta równobocznego

Koch 4

UWAGI.

① Żaden fragment krzywej Kocha ograniczającej płatek Kocha nie jest wykresem funkcji ciągłej. Z tego powodu mierzalności płatka Kocha nie da się wywnioskować z Lematu o wykresie funkcji ciągłej.


(a)
(b)
(c)
(d)
(e)
(f)