WYKŁAD: POLA FIGUR INNYCH NIŻ WIELOKĄTY

Dla dowolnego zbioru ograniczonego F na płaszczyźnie określmy jego miarę zewnętrzną $P_z(F)$ jako:

$$P_z(F) := \inf\{P(Z) : Z \supset F,\ Z\text{-wielokątna}\}.$$

UWAGA. Przekonajmy się na przykładzie, że miara zewnętrzna nie spełnia wzoru

$$P_z(F_1 \cup F_2) = P_z(F_1) + P_z(F_2)$$

dla rozłącznych zbiorów/figur F_1 i F_2, i dlatego nie nadaje się na sensowne określenie pola dla figur innych niż wielokątne.

Niech $F_1 = K_Q = \{(x,y) : x, y \in [0,1] \cap Q\}$

– punkty kwadratu o obu współrzędnych wymiernych.

Niech $F_2 = [0,1] \times [0,1] \setminus K_Q$

– punkty kwadratu o przynajmniej jednej współrzędnej niewymiernej.

Wówczas $F_1 \cup F_2 = [0,1] \times [0,1]$.

$P_z(K_Q) = 1$, bo wielokąt Z o najmniejszym polu zawierającym K_Q jest kwadrat $[0,1] \times [0,1]$.

Podobnie $P_z([0,1] \times [0,1] \setminus K_Q) = 1$.

Oczywiście zachodzi też $P_z([0,1] \times [0,1]) = 1$.

No i mamy: $P_z(F_1 \cup F_2) = 1$, $P_z(F_1) + P_z(F_2) = 1 + 1 = 2 \neq 1$.

Jako kolejną próbę, określmy miarę wewnętrzną zbioru ograniczonego F:

$$P_W(F) := \sup\{P(W) : W \subset F,\ W\text{-wielokątne}\}.$$

UWAGA. Miara wewnętrzna P_W również nie spełnia wzoru na sumę, dla tych samych figur $F_1 = KQ$ oraz $F_2 = [0,1]\times[0,1] \setminus KQ$.

Wielokątem o największym polu zawierającym się w KQ jest wielokąt pusty, który ma pole $P(\phi) = 0$.

Zatem $P_W(KQ) = 0$, i podobnie $P_W([0,1]\times[0,1]\setminus KQ) = 0$.

Natomiast $P_W([0,1]\times[0,1]) = 1$, bo wielokątem W o największym polu zawartym w kwadracie $[0,1]\times[0,1]$ jest ten właśnie kwadrat. Mamy zatem

$$P_W(F_1 \cup F_2) = P_W([0,1]\times[0,1]) = 1$$

$$P_W(F_1) + P_W(F_2) = 0 + 0 = 0$$

więc równość nie zachodzi.

UWAGA. Podobnie można się przekonać, że wzór na sumę nie zachodzi dla średniej arytmetycznej miary wewnętrznej i miary zewnętrznej: $\frac{1}{2}(P_W + P_Z)$.

Nie widać więc sposobu sensownego określenia pola dla wszystkich figur ograniczonych.

Dlatego, ograniczymy się tylko do niektórych figur ograniczonych – jednak będzie to rodzina ogromna – dużo większa niż same tylko figury wielokątne.

Zauważmy, że jeśli figury wielokątne W i Z spełniają zależności $W \subset F \subset Z$, to $P(W) \leq P(Z)$.

Z tego łatwo widać, że dla dowolnego zbioru F zachodzi nierówność $P_W(F) \leq P_Z(F)$.

My ograniczymy się do takich figur F, dla których ta nierówność jest równością.

DEFINICJA. Mówimy, że zbiór F jest mierzalny (w sensie Jordana) gdy $P_Z(F) = P_W(F)$. Wówczas określamy <u>pole</u> zbioru F (nazywane też <u>miarą Jordana</u> zbioru F) jako $P(F) := P_Z(F) = P_W(F)$.

UWAGA. Od razu widać, że jeśli F jest figurą wielokątną, to F jest mierzalne, i miara Jordana F jest równa jej polu jako figury wielokątnej. Nasza definicja jest więc rozszerzeniem pola na różne figury, które nie są wielokątne.

UWAGA 2. W praktyce, aby sprawdzić mierzalność figury F i wyliczyć jej pole, wystarczy wskazać 2 ciągi figur wielokątnych W_n i Z_n takich, że $W_n \subset F$, $Z_n \supset F$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \left[P(Z_n) - P(W_n) \right] = 0.$$

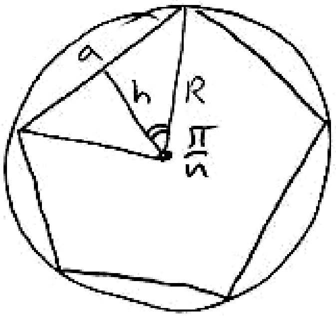
Gdy wskazaliśmy takie ciągi figur, to zachodzą dla nich równości

$$P_W(F) = \lim_{n\to\infty} P(W_n) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n) = P_Z(F)$$

Czyli F jest mierzalne, a ponadto $P(F) = \lim_{n\to\infty} P(W_n) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n)$.

PRZYKŁAD figury mierzalnej nie będącej wielokątem — koło K_R o promieniu R.

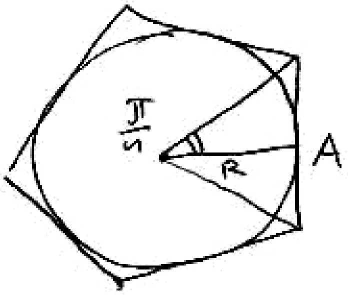
Jako ciąg W_n weźmiemy n-kąty foremne wpisane w K_R, a jako Z_n - n-kąty foremne opisane na K_R.



$$a = 2R\sin\frac{\pi}{n}$$

$$h = R\cos\frac{\pi}{n}$$

$$P(W_n) = n\cdot\frac{a\cdot h}{2} = nR^2\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$$



$$A = 2R\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}, \quad H = R$$

$$P(Z_n) = n\cdot\frac{A\cdot H}{2} = nR^2\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.$$

$$P(Z_n) - P(W_n) = nR^2\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= \underbrace{nR^2\sin\frac{\pi}{n}}_{\to\pi}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}}_{\to 1} - \underbrace{\cos\frac{\pi}{n}}_{\to 1}\right)}_{\to 0}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[P(Z_n) - P(W_n)\right] = 0$$

Zatem koło K_R jest mierzalne.

Obliczmy jego pole:

$$P(K_R) = \lim_{n\to\infty} P(W_n) = \lim_{n\to\infty} R^2\underbrace{n\sin\frac{\pi}{n}}_{\to\pi}\underbrace{\cos\frac{\pi}{n}}_{\to 1} = \pi R^2.$$

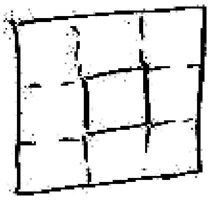
□

Inny PRZYKŁAD figury mierzalnej nie będącej wielokątem

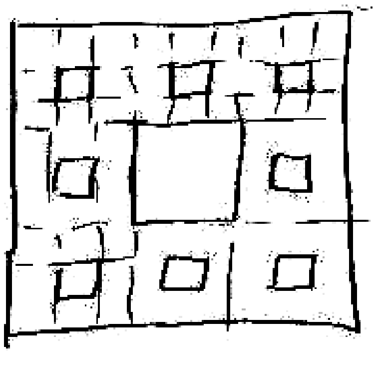
— dywan Sierpińskiego.

Dywan Sierpińskiego powstaje w następujący sposób:

- kwadrat dzielimy na 9 jednakowych kwadratów, i usuwamy z niego wnętrze „środkowego" kwadratu; —



- następnie z każdego z pozostałych ośmiu składowych kwadratów usuwamy wnętrze środkowego ~~k~~ podkwadratu — w podobny sposób; otrzymujemy figurę jak na rysunku



- kontynuujemy usuwanie środkowych podkwadratów z kolejnych coraz to mniejszych składowych kwadratów, powtarzając to nieskończenie wiele razy.

Na ćwiczeniach należy uzasadnić, że ta figura jest mierzalna, i że jej pole wynosi 0.

Udowodnimy teraz następujący:

LEMAT. Jeśli ograniczone figury F_1 i F_2 są rozłączne i mierzalne, to ich suma $F_1 \cup F_2$ też jest mierzalna, i zachodzi wzór

$$P(F_1 \cup F_2) = P(F_1) + P(F_2).$$

Dowód:

Niech W_n^1 i Z_n^1 to ciągi figur wielokątnych takich, że

$$W_n^1 \subset F_1 \subset Z_n^1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \left[P(Z_n^1) - P(W_n^1)\right] = 0.$$

Mamy też wtedy równość $P(F_1) = \lim_{n\to\infty} P(W_n^1) = \lim_{n\to\infty} P(Z_n^1)$.

Dla figury F_2 mamy analogiczne ciągi figur W_n^2 i Z_n^2.

Dla dowodu mierzalności sumy $F_1 \cup F_2$ określmy nowe ciągi figur wielokątnych W_n i Z_n:

$$W_n := W_n^1 \cup W_n^2, \quad Z_n := Z_n^1 \cup Z_n^2.$$

Oczywiście mamy $W_n \subset F_1 \cup F_2 \subset Z_n$ oraz W_n i Z_n są wielokątne. Skoro figury F_1 i F_2 są rozłączne, to również „przybliżające je od wewnątrz" figury W_n^1 i W_2^2 są rozłączne.

W takim razie

$$P(W_n) = P(W_n^1) + P(W_n^2).$$

Figury Z_n^1 i Z_n^2 przybliżające od zewnątrz nie muszą już być rozłączne, i dlatego mamy jedynie nierówność

$$P(Z_n) \leq P(Z_n^1) + P(Z_n^2).$$

Mamy więc takie nierówności:

$$0 \le P(Z_n) - P(W_n) \le P(Z_n^1) + P(Z_n^2) - \left(P(W_n^1) + P(W_n^2)\right)$$

$$= \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\left[P(Z_n^1) - P(W_n^1)\right]} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\left[P(Z_n^2) - P(W_n^2)\right]}$$

Z twierdzenia o 3 ciągach wnioskujemy, że

$$\lim_{n\to\infty} \left[P(Z_n) - P(W_n)\right] = 0$$

czyli $F_1 \cup F_2$ jest mierzalne.

Pole figury $F_1 \cup F_2$ obliczamy wtedy jako granicę pól wielokątów W_n przybliżających od wewnątrz:

$$P(F_1 \cup F_2) = \lim_{n\to\infty} P(W_n) = \lim_{n\to\infty} \left[P(W_n^1) + P(W_n^2)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(W_n^1) + \lim_{n\to\infty} P(W_n^2) = P(F_1) + P(F_2).$$

A zatem wzór na sumę zachodzi. $\square$

UWAGA O FIGURACH MIARY ZERO

LEMAT. Jeśli dla pewnej ograniczonej figury F istnieje ciąg figur wielokątnych Z_n takich, że $F \subset Z_n$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n)=0$, to figura F jest mierzalna a jej pole wynosi $P(F)=0$.

Dowód. Jako ciąg W_n można dobrać ciąg wielokątów pustych, $W_n=\emptyset$, i wtedy

$$\lim_{n\to\infty}[P(Z_n)-P(W_n)] = \lim_{n\to\infty}[P(Z_n)-0] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(Z_n) = 0,$$

czyli F jest mierzalne.
Jej pole to wtedy $P(F)=\lim\limits_{n\to\infty} P(Z_n) = 0.$ $\square$

Zatem, aby pokazać, że figura ma miarę zero, wystarczy wskazać jeden ciąg wielokątów Z_n jak w lemacie (wielokąty przybliżające od zewnątrz, których pole dąży do zera).

PRZYKŁADY ZBIORÓW MIARY ZERO.

1. punkt
2. odcinek
3. dowolny podzbiór zbioru miary zero także jest mierzalny i także ma miarę zero

To są proste ćwiczenia.

Inne proste obserwacje to:

4. dowolna skończona suma zbiorów miary zero jest zbiorem mierzalnym i ma miarę zero.
5. okrąg ma miarę zero.

Z punktu 4 wynika np. że dowolny zbiór skończony ma miarę zero, i że dowolna skończona łamana ma miarę zero.

Uzasadnimy sobie następującą nieco trudniejszą obserwację:

LEMAT. Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą określoną na domkniętym przedziale $[a,b]$. Wówczas wykres funkcji f, traktowany jako podzbiór płaszczyzny R^2 składający się z punktów $(x, f(x)): x \in [a,b]$ jest figurą miary zero.

Dowód:

Skorzystamy ze znanego z analizy faktu, że funkcja ciągła określona na domkniętym przedziale jest jednostajnie ciągła, czyli spełnia warunek:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Niech $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Do tego ε_n dobieramy δ_n jak w warunku jednostajnej ciągłości. Podzielmy przedział $[a,b]$ na małe podprzedziały $I_1^n, I_2^n, \dots, I_{k(n)}^n$ długości mniejszej niż δ_n.

W każdym podprzedziale wybieramy punkt $x_j \in I_j^n$.

Ponieważ z jednostajnej ciągłości, dla $y \in I_j^n$ zachodzi

$$|f(y) - f(x_j)| < \frac{1}{n} \qquad (\text{bo } \varepsilon_n = \frac{1}{n})$$

wnioskujemy, że wykres funkcji f zawiera się w sumie prostokącików

$$\bigcup_{j=1}^{k(n)} I_j^n \times \left[f(x_j) - \frac{1}{n}, f(x_j) + \frac{1}{n}\right].$$

Zatem tą sumę prostokącików przyjmujemy jako Z_n.

Obliczmy pole $P(Z_n)$ takiej sumy prostokącików.

W tym celu, oznaczmy przez $|I_j^n|$ długość podprzedziału I_j^n i zauważmy, że $|I_1^n| + |I_2^n| + \dots + |I_{k(n)}^n| = |[a,b]| = b-a$.

W takim razie, ponieważ prostokąciki nie zachodzą na siebie (patrz rysunek poniżej), mamy

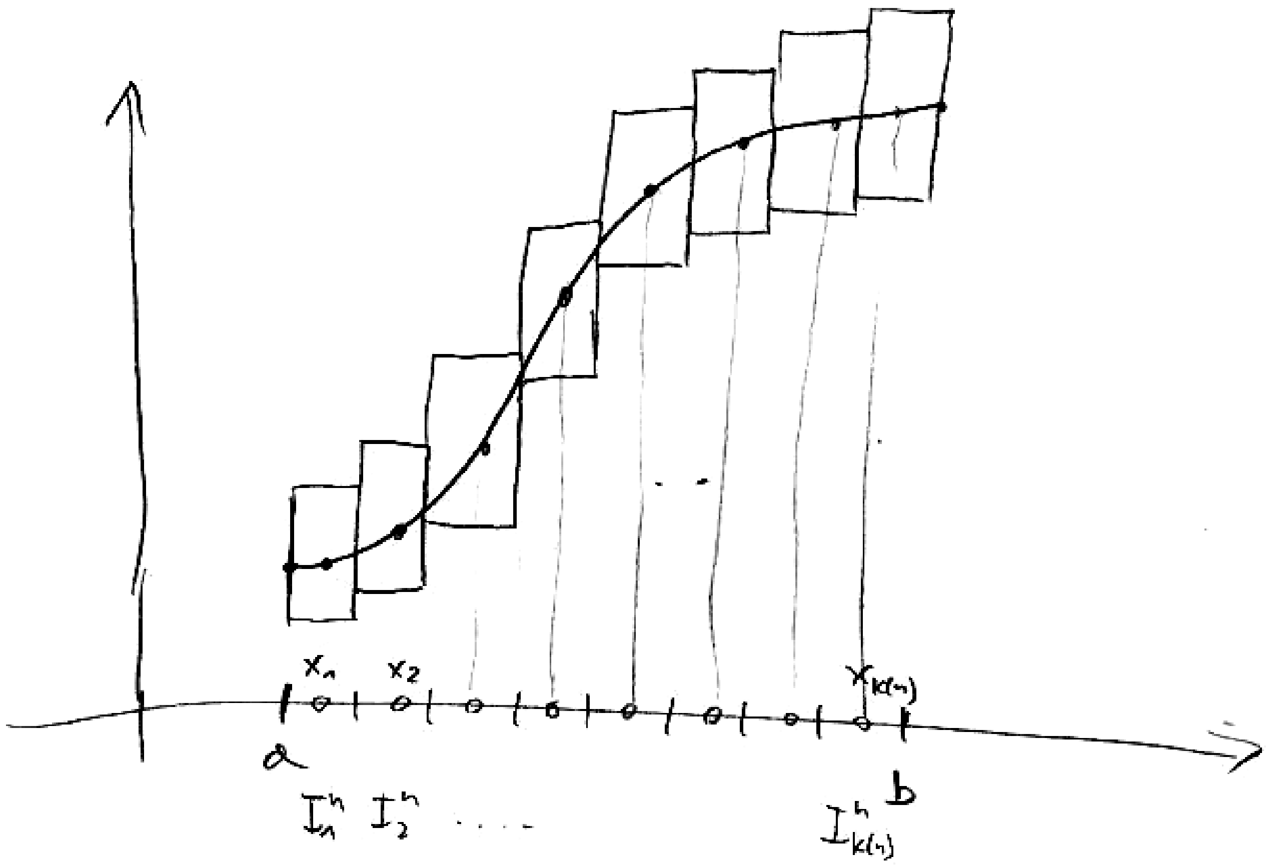
$$P(Z_n) = \sum_{j=1}^{k(n)} P\left(I_j^n \times \left[f(x_j) - \tfrac{1}{n}, f(x_j) + \tfrac{1}{n}\right]\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k(n)} |I_j^n| \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{k(n)} |I_j^n| = \frac{2}{n}(b-a).$$

Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\cdot(b-a) = 0.$$

A więc wykres jest mierzalną figurą, i ma miarę zero. $\square$



Powyższy lemat o wykresie funkcji ciągłej pozwala wskazać wiele innych figur mierzalnych.
Kluczowe jest w tym aspekcie następujące:

TWIERDZENIE. Jeśli F jest figurą na płaszczyźnie ograniczoną zamkniętą linią C, i jeśli C ma miarę zero, to figura F jest mierzalna.

Dowód: niech Y_n będzie ciągiem figur wielokątnych takich, że $Y_n \supset C$ oraz $\lim_{n\to\infty} P(Y_n) = 0$.

Określmy ciąg przybliżeń zewnętrznych dla F:

$Z_n = F \cup Y_n$, oraz ciąg przybliżeń wewnętrznych jako

W_n = wielokąt, którego wnętrzem jest $Z_n - Y_n$.

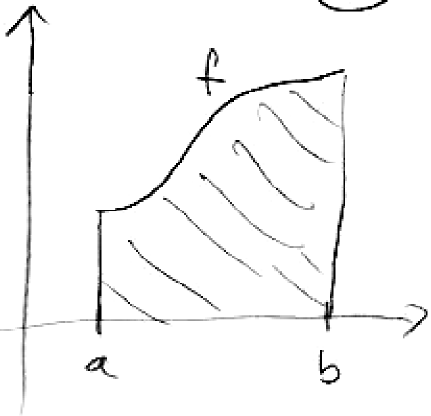
Wtedy mamy $P(Z_n) = P(W_n) + P(Y_n)$

(bo W_n i Y_n nie zachodzą na siebie), a zatem

$$P(Z_n) - P(W_n) = P(Y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

A to właśnie oznacza, że figura F jest mierzalna. □

WNIOSKI.



(a) ~~Pole~~ Obszar pod wykresem funkcji ciągłej, jak na rysunku obok, jest figurą mierzalną. Rzeczywiście, ten obszar jest ograniczony linią C, której częścią jest wykres funkcji f, a ponadto składa się ona jeszcze z trzech odcinków. Wszystko to są figury miary zero, więc ich suma (czyli cała linia C) też ma miarę zero.

(b) Dowolna figura ograniczona linią C, która składa się ze skończenie wielu fragmentów, z których każdy, po ewentualnym obróceniu, staje się wykresem funkcji ciągłej, jest figurą mierzalną.

UWAGA. Rozumowanie bardzo podobne do powyższego dowodu Lematu o wykresie funkcji ciągłej pozwala zdefiniować przybliżenie zewnętrzne i wewnętrzne dla obszaru pod wykresem funkcji ciągłej, jako „schodkowe" sumy prostokątów, których pola są równe sumom górnym i dolnym w definicji całki Riemanna. Stąd już nietrudno wyciągnąć wniosek, że miara Jordana obszaru pod wykresem funkcji ciągłej jest równa całce Riemanna $\int_a^b f(x)\,dx$ z tej funkcji.