GE

1

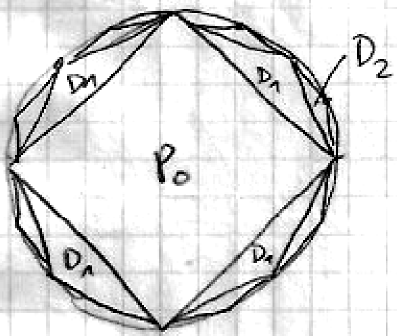
# JAK STAROŻYTNI GRECY MIERZYLI POLE FIGUR O KRZYWOLINIOWYCH BRZEGACH —

Metoda wyczerpywania —

- Eudoksos IV w. p.n.e.
- Archimedes III w p.n.e. (pole wycinków paraboli, hiperboli, pewnych spiral, pole powierzchni sfery i wycinków sferycznych)

Istota metody — coraz dokładniejsze zapełnianie figury wielokątami, i ścisły dowód tego, że pola kolejnych wypełnień w granicy dają pole całej figury.

## SZCZEGÓŁY — NA PRZYKŁADZIE KOŁA




$P_0$ - wyjściowy kwadrat wpisany w koło

$D_1$ - 4 dodatkowe trójkąty

$D_2$ - 8 dodatkowych trójkątów

$\vdots$ $D_n$ - $2^{n+1}$ dodatkowych trójkątów

$$\left.\begin{array}{l} P_0 + D_1 = P_1 \\ P_1 + D_2 = P_2 \\ \text{itd}, \ldots \end{array}\right\}$$ tymi samymi symbolami oznaczamy też pola tych figur

Niech $P$ - pole koła

Czy możemy twierdzić, że $P = P_0 + D_1 + D_2 + \ldots = \lim_{n\to\infty} P_n$ ?

(Współcześnie, dzięki pojęciu miary Jordana, możemy tak twierdzić, dobierając drugi ciąg wielokątów przybliżających koło „od zewnątrz")

Eudoksos podał (inny) ścisły dowód —

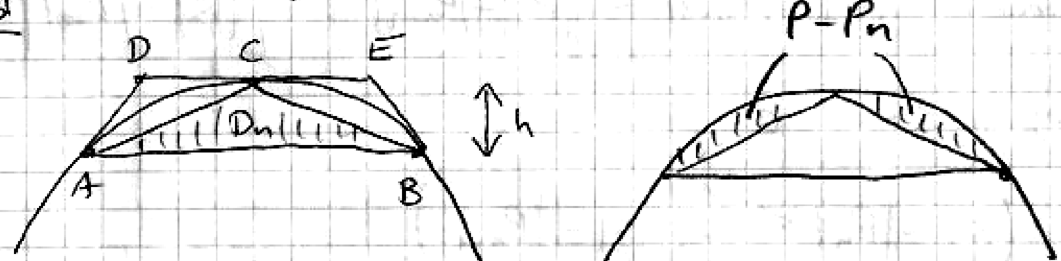
— z którym się zapoznamy, i porównamy go z podejściem Jordana.

KLUCZOWA OBSERWACJA [Eudoksos] $\boxed{2}$ GE

Pole $D_n$ części dodawanej w $n$-tym kroku wypełnia więcej niż połowę obszaru jaki został do wypełniania, tzn. $P - P_n < D_n$.

Będziemy to nazywać <u>Warunkiem Eudoksosa</u>

<u>Dowód</u>




[i to wszystko $2^{n+1}$ razy]

$$P-P_n < 2^{n+1}\left[\frac{|DC|\cdot h}{2}+\frac{|CE|\cdot h}{2}\right] = 2^{n+1}\left[\frac{|DE|\cdot h}{2}\right] < 2^{n+1}\left[\frac{|AB|\cdot h}{2}\right] = D_n$$

$\square$

WNIOSEK Z OBSERWACJI

Ponieważ $D_n = P_n - P_{n-1}$, warunek Eudoksosa $P - P_n < D_n$ możemy przepisać jako

$$P - P_n < P_n - P_{n-1}$$

Dodajmy do obu stron $P - P_n$. Otrzymamy

$$2(P-P_n) < (P_n - P_{n-1}) + (P - P_n) = P - P_{n-1}$$

Stąd

$$P - P_n < \frac{1}{2}(P - P_{n-1})$$

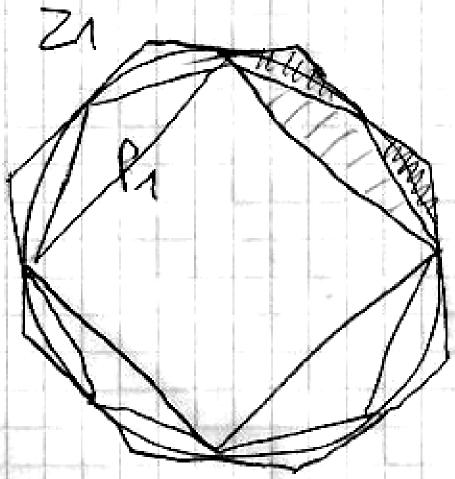
czyli

$$P - P_n < \frac{1}{2}(P-P_{n-1}) < \frac{1}{2^2}(P-P_{n-2}) < \dots$$

$$\dots < \frac{1}{2^n}(P - P_0).$$

Zatem, skoro $\frac{1}{2^n} \to 0$ to również $P - P_n \to 0$, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$. $\square$

PORÓWNANIE Z DEFINICJĄ MIERZALNOŚCI JORDANA  GE



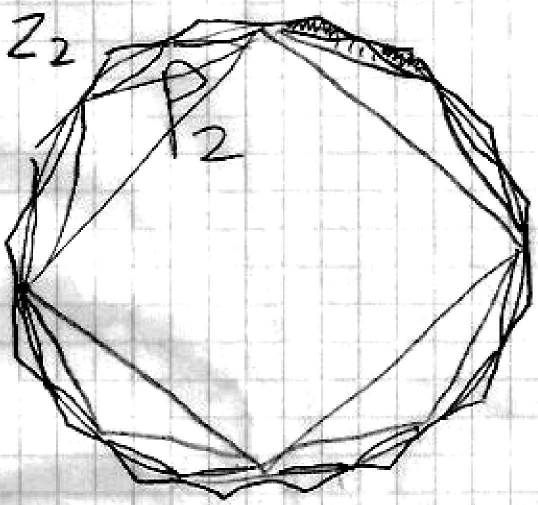

Pokazaliśmy że

$$Z_1 - P_1 < D_1 < P - P_0$$

$$Z_2 - P_2 < D_2 < P - P_1 < \frac{1}{2}(P - P_0)$$

$$\vdots$$

$$Z_n - P_n < D_n < P - P_{n-1} < \frac{1}{2^{n-1}}(P - P_0)$$




Zatem $Z_n - P_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

a to jest mierzalność w sensie Jordana ?

Zatem z warunku Eudoksosa wynika, że figura która daje się zapełniać w sposób go spełniający jest mierzalna w sensie Jordana, i że jej miara Jordana jest równa granicy pól kolejnych zapełnień.

# POLE WYCINKA PARABOLI

– metoda wyczerpywania, wg Archimedesa
(ale we współczesnym języku układu kartezjańskiego, wyznaczników, itp)

---

## 1°. Pole trójkąta we współrzędnych kartezjańskich

wierzchołki $A=(x_1,y_1)$ $B=(x_2,y_2)$ $C=(x_3,y_3)$

$$P=\frac{1}{2}\left|\det\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)\right|=\frac{1}{2}\left|\det\left([x_2-x_1,y_2-y_1],[x_3-x_1,y_3-y_1]\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{pmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & 1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right|=$$

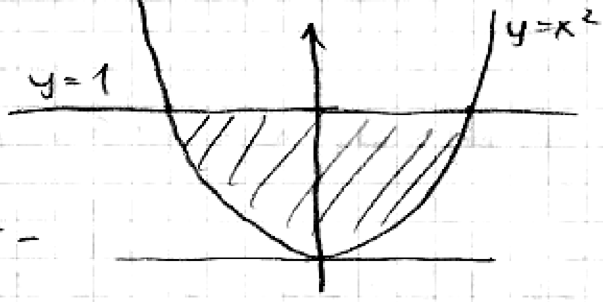
$$=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\end{pmatrix}\right|$$

Ostatnia równość:

wyznacznik nie zmienia się, gdy do pewnej kolumny dodamy wielokrotność innej kolumny;

do kolumny pierwszej dodaliśmy $x_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

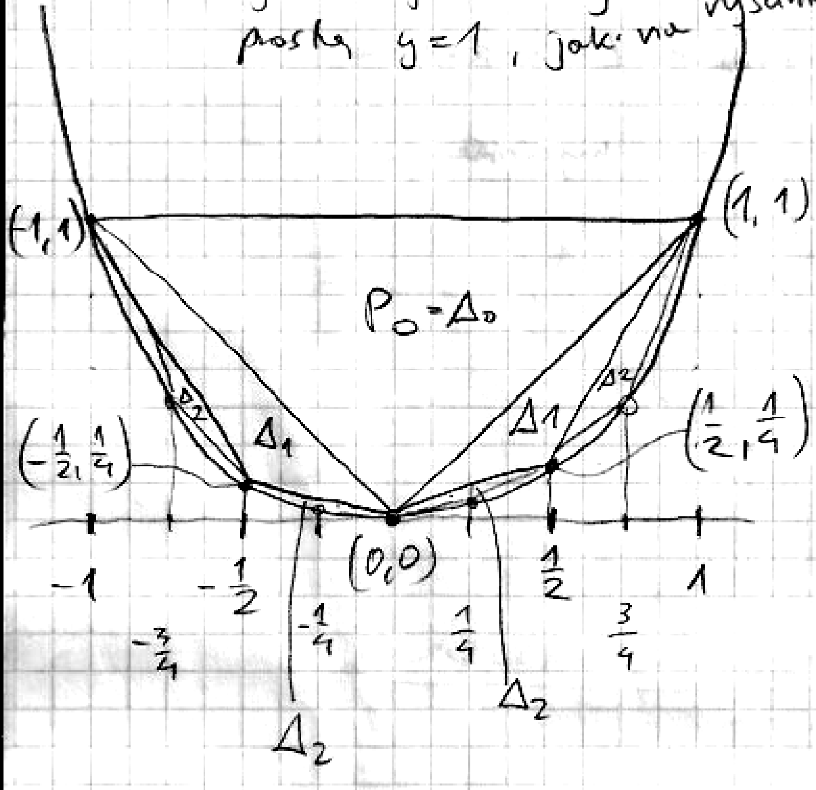
do kolumny drugiej — $y_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.




[redacted] GE

$\boxed{5}$

2°. parabola $y=x^2$ – wycinek ograniczony prostą $y=1$, jak na rysunku tutaj




$P_0$ – 1 trójkąt $\Delta_0$

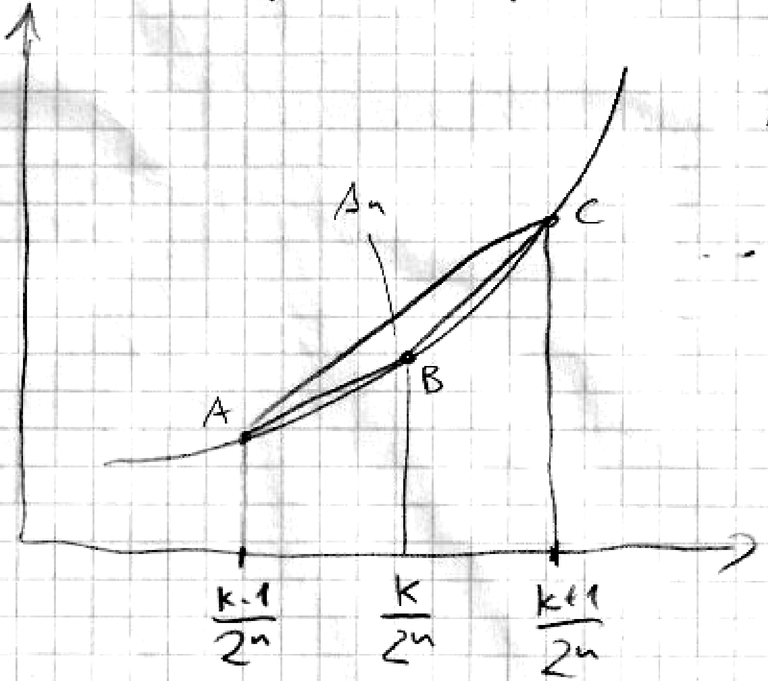
$D_1$ – 2 trójkąty $\Delta_1$

$D_2$ – 4 trójkąty $\Delta_2$

⋮

$D_n$ – $2^n$ trójkątów $\Delta_n$

Ogólna postać trójkąta $\Delta n$




$A\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{(k-1)^2}{4^n}\right)$

$B\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k^2}{4^n}\right)$

$C\left(\frac{k+1}{2^n}, \frac{(k+1)^2}{4^n}\right)$

$\frac{k-1}{2^n} \quad \frac{k}{2^n} \quad \frac{k+1}{2^n}$

$$\Delta_n = \frac{1}{2}\left|\begin{matrix} \frac{k-1}{2^n} & \frac{(k-1)^2}{4^n} & 1 \\ \frac{k}{2^n} & \frac{k^2}{4^n} & 1 \\ \frac{k+1}{2^n} & \frac{(k+1)^2}{4^n} & 1 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{4^n}\underbrace{\left|\begin{matrix} k-1 & (k-1)^2 & 1 \\ k & k^2 & 1 \\ k+1 & (k+1)^2 & 1 \end{matrix}\right|}_{2} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{4^n}$$

VERTE →

Wszystkie trójkąty $\Delta_n$ mają to samo pole równe $\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{4^n}$

Zatem $D_n = 2^n \cdot \Delta_n = 2^n \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}$.

Gdyby był spełniony warunek Eudoksosa

to mielibyśmy pole wycinka:

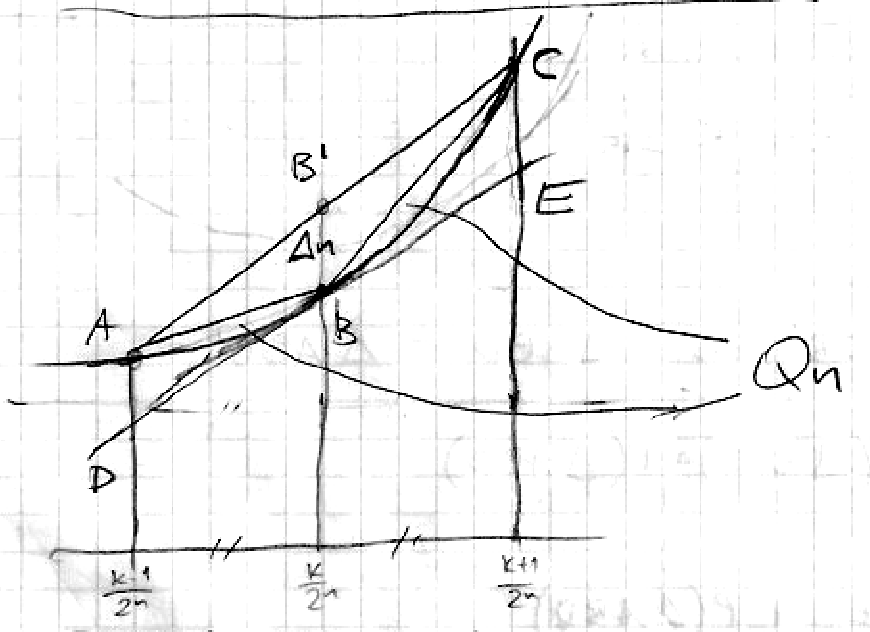
$$P = D_0 + D_1 + D_2 + \dots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Pozostaje sprawdzić warunek Eudoksosa.

Sprawdzenie warunku Eudoksosa






FAKT POMOCNICZY:

styczna DE do paraboli w punkcie B jest równoległa do siecznej AC

Dowód ① $B=\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k^2}{4^n}\right)$

współczynnik kierunkowy $\varkappa_1$ stycznej w B = pochodnej z funkcji $y=x^2$ w punkcie $x=\frac{k}{2^n}$.

$$f' = 2x$$

$$\varkappa_1 = f'\left(\frac{k}{2^n}\right) = 2\cdot\frac{k}{2^n} = \frac{k}{2^{n-1}}$$

② $A=\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{(k-1)^2}{4^n}\right)$, $C=\left(\frac{k+1}{2^n}, \frac{(k+1)^2}{4^n}\right)$

współczynnik kierunkowy siecznej to

$$\varkappa_2 = \left(\frac{(k+1)^2}{4^n} - \frac{(k-1)^2}{4^n}\right) \Big/ \left(\frac{k+1}{2^n} - \frac{k-1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{4k}{4^n} \Big/ \frac{2}{2^n} = \frac{k}{4^{n-1}}\cdot\frac{2^{n-1}}{1} = \frac{k}{2^{n-1}}$$

Zatem $\varkappa_1 = \varkappa_2$, czyli $AC \parallel DE$. □

VERTE →

Aby sprawdzić warunek Eudoksosa wystarczy pokazać że $Q_n < \Delta_n$

2 obserwacje:

1°. $\Delta BCE \equiv \Delta BCB'$ oraz $\Delta ABD \equiv \Delta ABB'$

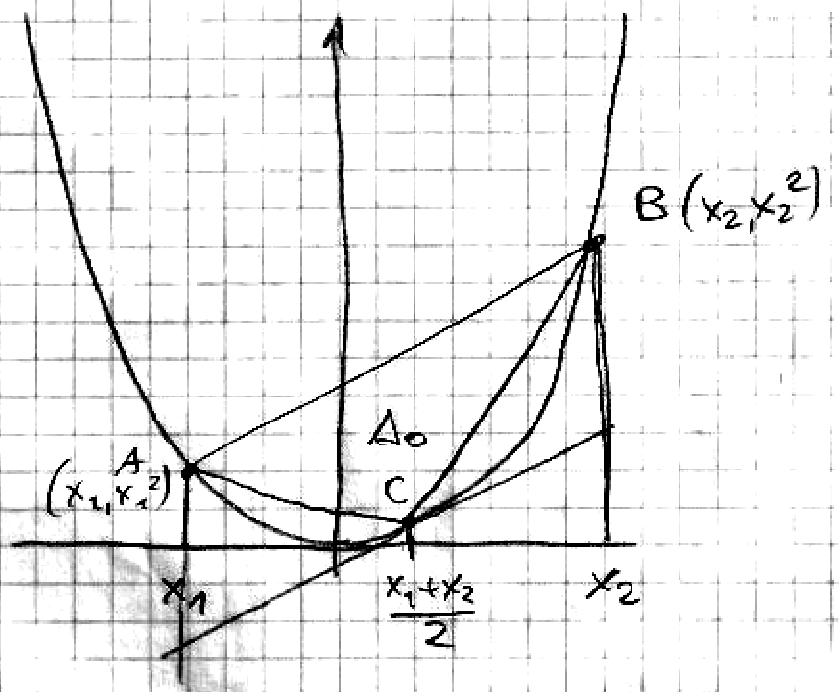
stąd $\Delta_n = P(\Delta BCE) + P(\Delta ABD)$

2°. $Q_n < P(\Delta BCE) + P(\Delta ABD)$

WNIOSEK z 1° i 2°: $Q_n < \Delta_n$. $\square$

# OGÓLNY WYCINEK PARABOLI

9 [redacted] GE




$$C = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right)$$

Rozumowanie jak poprzednio pokazuje że

$$P = \frac{4}{3}\Delta_0$$

od 3. wiersza odejmujemy średnią arytmetyczną 1. i 2. wiersza

$$\Delta_0 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_2^2 & 1 \\ x_1 & x_1^2 & 1 \\ \frac{x_1+x_2}{2} & \frac{(x_1+x_2)^2}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_2^2 & 1 \\ x_1 & x_1^2 & 1 \\ 0 & -\frac{(x_1-x_2)^2}{4} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}(x_2-x_1)\cdot\frac{(x_2-x_1)^2}{4} = \frac{1}{8}(x_2-x_1)^3.$$

$$P = \frac{1}{6}(x_2-x_1)^3. \qquad \square$$

[Podobne wycinki parabol $y = ax^2$ dla dowolnego $a$]