IZOMETRIE PŁASZCZYZNY

E^2 – płaszczyzna

DEF. izometria – $\varphi: E^2 \to E^2$ zachowujące odległość

tzn. $\forall A,B \in E^2 \quad |\varphi(A)\varphi(B)| = |AB|$

OZN. $\varphi(A)=A'$, $\varphi(B)=B'$, ...

WŁASNOŚCI IZOMETRII

(1) proste na proste

(2) zachowywanie kątów

(3) zachowywanie równoległości

Ad (2) A, B, C – niewspółliniowe

Wówczas $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle A'B'C'|$

Z tw. cosinusów:

$$\cos(\sphericalangle ABC) = \frac{|AB|^2+|BC|^2-|AC|^2}{2|AB|\cdot|AC|}$$

Stąd: (1) $\cos|\sphericalangle A'B'C'| = \cos|\sphericalangle ABC|$

(2) ponieważ cos jest różnowartościowy na przedziale $[0,\pi]$

mamy $|\sphericalangle A'B'C'| = |\sphericalangle ABC|$.

Alternatywnie: cecha przystawania BBB

Ad (3)

równoległość prostych wyraża się przez odległość:

• $p \parallel q \iff$ odległości punktów $A \in p$ od q są jednakowe.

Ponadto

• odległość A od p = odległość A' od p'

(odległość punktu od prostej jest zachowywana przez izometrię)

Stąd: $p \parallel q \Rightarrow p' \parallel q'$.

Ad (1)

FAKT. (charakteryzacja współliniowości).

3 różne punkty A, B, C są współliniowe $\iff$

– albo $|AB|+|BC| = |AC|$ (B między A i C)

– albo $|AC|+|CB| = |AB|$ (C między A i B)

– albo $|AB|+|AC| = |BC|$ (A między B i C).

WNIOSKI.

(1) punkty współliniowe mają współliniowe obrazy.

(2) prosta AB przechodzi na prostą $A'B'$.

④ Każda izometria jest bijekcją.

⑤ przekształcenie odwrotne do izometrii jest izometrią.

⑥ Złożenie izometrii jest izometrią.

④+⑤+⑥ Zbiór wszystkich izometrii płaszczyzny jest grupą względem składania.

Ad ⑥ φ, ψ - izometrie

$A, B \in E^2$ - dowolne

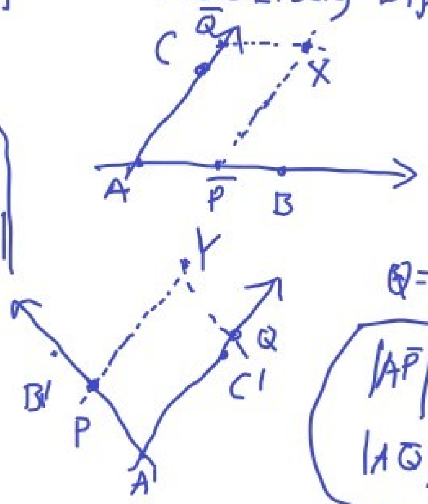
$$|\varphi\circ\psi(A)\ \varphi\circ\psi(B)| \overset{\text{bo } \varphi \text{ izometria}}{=} |\psi(A)\ \psi(B)| \underset{\text{bo } \psi \text{ izometria}}{=} |AB|$$

Stąd $\varphi\circ\psi$ izometria.

Ad ④ różnowartościowość: niech $A \neq B$. Wtedy $|AB| \neq 0$, więc $|A'B'| = |AB| \neq 0$, a to znaczy że $A' \neq B'$. □

„NA": niech A, B, C pomocnicze niewspółliniowe punkty

Pomocnicze układy współrzędnych:



Niech $Y \in E^2$ - dowolny

Szukamy X t.że $X' = Y$.

Oglądamy Y w układzie $A'B'C'$.

$Q = \bar{Q}'$ $P = \bar{P}'$

$$|A\bar{P}| = |A'P|$$
$$|A\bar{Q}| = |A'Q|$$

$X\bar{Q} \to QY$

$X\bar{P} \to PY$

stąd $X \to Y$

czyli $Y = X'$. □

Ad ⑤ φ - izometria

φ^{-1} istnieje dzięki ④

Niech $A, B \in E^2$ - dowolne

Interesuje nas $|\varphi^{-1}(A)\ \varphi^{-1}(B)|$.

Niech $C := \varphi^{-1}(A)$

$D = \varphi^{-1}(B)$.

Wtedy

$A = \varphi(C)$

$B = \varphi(D)$.

Z tego, że φ jest izometrią: $|AB| = |CD| =$
$= |\varphi^{-1}(A)\ \varphi^{-1}(B)|$.

Stąd φ^{-1} jest izometrią. □

PRZYKŁADY IZOMETRII.

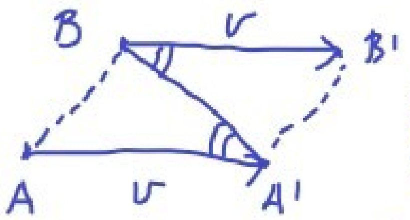
(0) przekszt. tożsamościowe id, I.

(1) translacja o wektor $\vec{v}$.

$T_{\vec{v}}(A)$ = taki punkt X

że $\vec{AX} = \vec{v}$.

Jest izometrią, bo

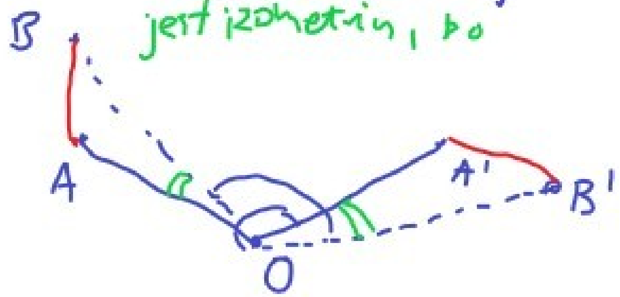


Kąty naprzemianległe

$AA' \parallel BB'$ Z cechy BKB $\Rightarrow \Delta ABA' \equiv \Delta BB'A' \Rightarrow |AB| = |A'B'|$.

(2) obrót o kąt α wokół punktu O.

jest izometrią, bo



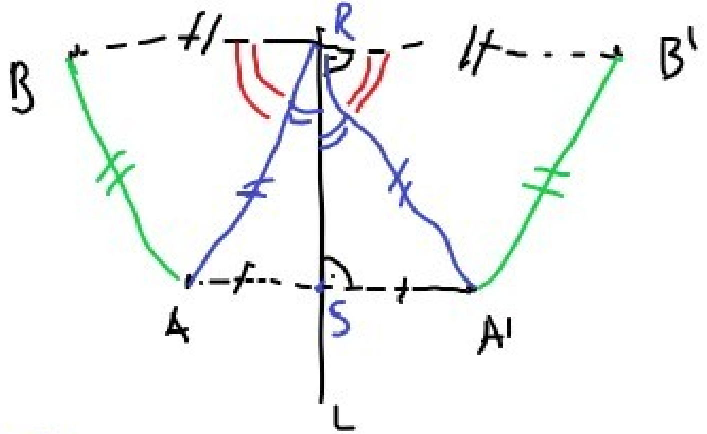
$$\left.\begin{aligned} |\sphericalangle AOB| &= |\sphericalangle A'OB'| \\ |OA| &= |OA'| \\ |OB| &= |OB'| \end{aligned}\right\} \xRightarrow{BKB} \Delta OAB \equiv \Delta OA'B'$$

$$\Downarrow$$

$$|AB| = |A'B'|. \ \square$$

(3) odbicia (symetrie osiowe) względem prostych:

są izometriami, bo



$\Delta RSA' \equiv \Delta RSA$
BKB

$\Delta RA'B' \equiv \Delta RAB$
BKB

$$\Downarrow$$

$$|A'B'| = |AB| \ \square$$

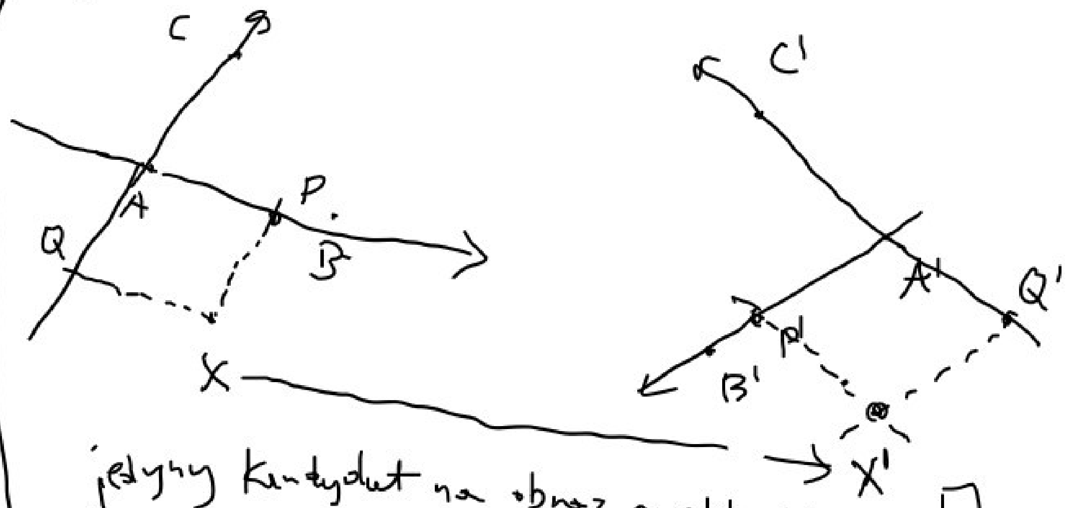
CEL: klasyfikacja izometrii płaszczyzny (opis wszystkich, wraz z uzasadnieniem że innych nie ma).

FAKT. Izometria jest w pełni zdeterminowana przez obrazy A', B', C' trzech wybranych niewspółliniowych punktów $A B C$.

To znaczy, że jeśli φ, ψ są takimi izometriami, że $\varphi(A)=\psi(A)=A'$, $\varphi(B)=\psi(B)=B'$, oraz $\varphi(C)=\psi(C)=C'$, to $\varphi=\psi$, czyli $\varphi(X)=\psi(X)\ \forall X \in E^2$.

SZKIC DOWODU:

pomocnicze układy ABC, $A'B'C'$.



jedyny kandydat na obraz punktu X. $\square$

WNIOSEK. Każda izometria jest złożeniem:

- albo translacji z obrotem i z odbiciem.
- albo translacji z obrotem.

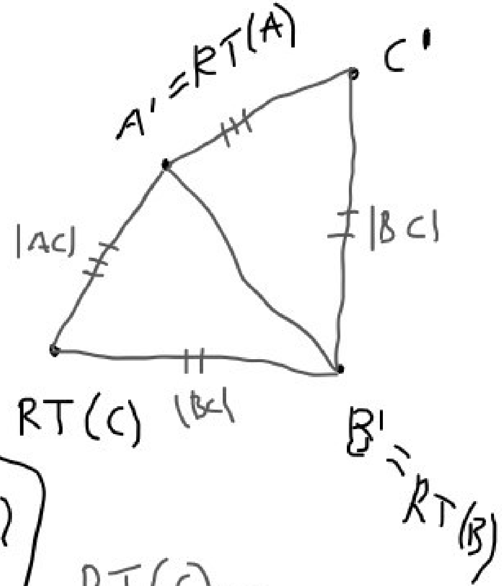
Dowód:

Niech φ - dowolna izometria

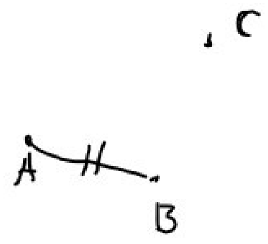
Niech A, B, C niewspółlin.

A', B', C' - ich obrazy przez φ.

$T = T_{\overrightarrow{AA'}}$ $\quad T(A) = A'$



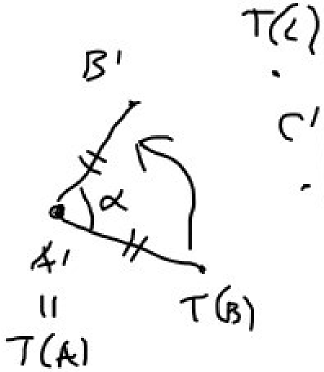
Złożenie $R \circ T$ zgadza się z φ na punktach A i B.



R = obrót wokół A' o kąt α

$R(T(B)) = B'$

$R(A') = A' = R(T(A)) = A'$



$RT(C) =$

$= \begin{cases} C' & \text{(I)} \\ \text{punkt symetr. względem } A'B' \text{ od } C' & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $\varphi = RT$

(II) $\varphi = S_{A'B'} RT$