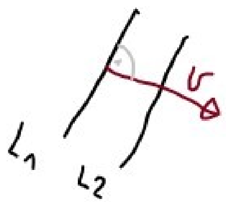
# KLASYFIKACJA IZOMETRII PŁASZCZYZNY

Punkt wyjścia:
Każda izometria płaszczyzny jest złożeniem:
- albo translacji i obrotu,
- albo translacji, obrotu i odbicia.

## REGUŁY SKŁADANIA IZOMETRII

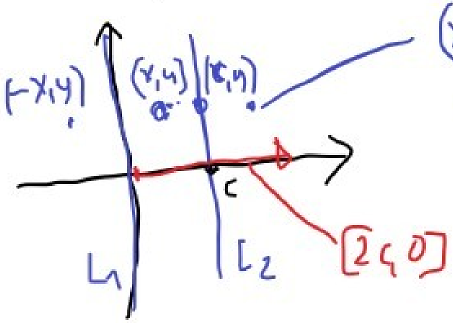
FAKT. Translacja o wektor $v$, $T_v$, jest złożeniem $S_{L_2} \circ S_{L_1}$ dwóch odbić t.że
- $L_1 \| L_2 \perp v$
- odległość między $L_1$ i $L_2$ $= \frac{1}{2}|v|$.




- zwrot wektora $v$ jest zgodny ze zwrotem od $L_1$ do $L_2$.

Dowód:

układ współrz. $Oxy$ t.że




$(x',y) = (2c-x,y)$

$x' - c = c - x$

$x' = 2c - x$

$L_1 = Oy$

$L_2 = \{x = c\}$

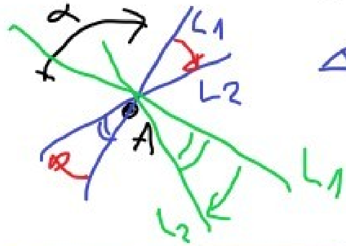
$S_{L_1}(x,y) = (-x,y)$

$S_{L_2}(x,y) = (2c-x,y)$

$S_{L_2} \circ S_{L_1}(x,y) = S_{L_2}(-x,y) = (2c-(-x),y) = (x+2c,y)$ – wzór na translację o wektor $[2c,0]$ $\square$

FAKT 2. Niech $R_A^\alpha$ będzie obrotem wokół $A$ o kąt $\alpha$.

Wówczas $R_A^\alpha = S_{L_2} \circ S_{L_1}$, gdzie
- $L_1, L_2$ przecinają się w $A$
- kąt między $L_1$ i $L_2$ wynosi $\frac{1}{2}\alpha$
- obrotowy kierunek od $L_1$ do $L_2$ jest zgodny z kierunkiem obrotu o $\alpha$ dla $R_A^\alpha$.

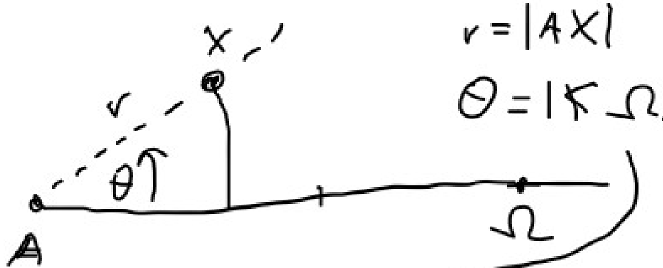



$\measuredangle = \frac{1}{2}\alpha$

UWAGA. $L_1$ można obrać dowolnie przez $A$. $L_2$ jest wtedy jednoznaczna.

# Dowód FAKTU 2

(wzory w układzie biegunowym)



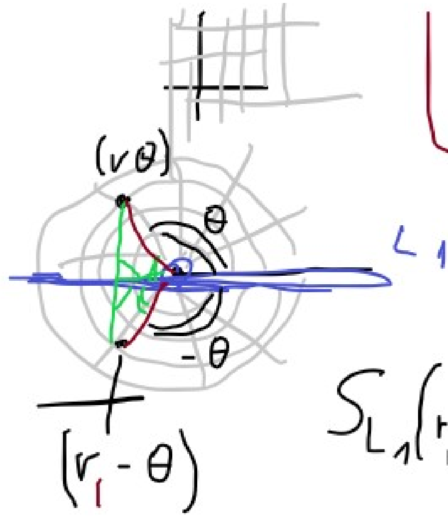

$r = |AX|$

$\theta = |\sphericalangle\, \Omega A X|$

mierzona w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara

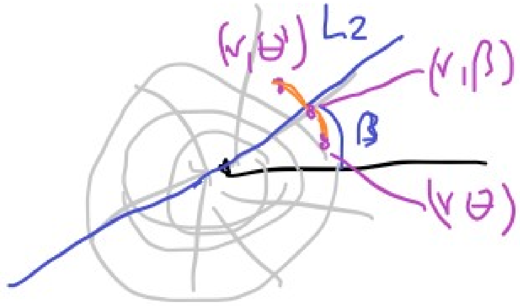
$X = (r, \theta)$.

$$R_A^{\alpha}(r,\theta) = (r, \theta+\alpha)$$




$$S_{L_1}(r,\theta) = (r, -\theta)$$

$$S_{L_2} \circ S_{L_1}(r,\theta) = S_{L_2}(r,-\theta) = (r, 2\beta - (-\theta)) = (r, \theta + 2\beta) = R_A^{2\beta}(r,\theta)$$



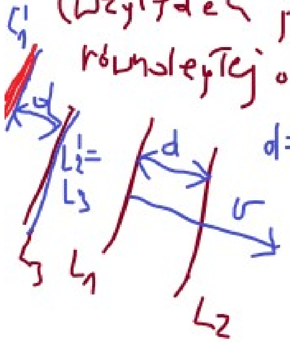

$$S_{L_2}(r,\theta) = (r, 2\beta - \theta)$$

$$\theta' - \beta = \beta - \theta$$

$$\theta' = 2\beta - \theta$$

WNIOSEK 1.

Złożenie 3 odbić o osiach równoległych jest odbiciem (względem pewnej prostej równoległej do tamtych).

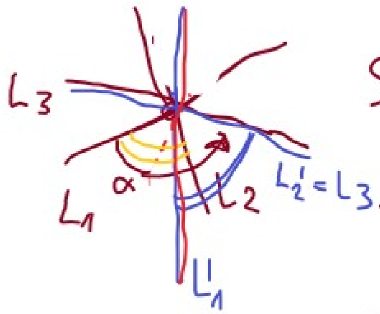



$d=\frac{1}{2}|v|$

$$S_{L_3}\circ S_{L_2}\circ S_{L_1} = S_{L'}$$

WNIOSEK 2.

Złożenie 3 odbić o osiach przecinających się w jednym punkcie (A) jest odbiciem (względem pewnej prostej także przechodzącej przez A).




$$S_{L_3}\circ(S_{L_2}\circ S_{L_1}) \overset{F2}{=} S_{L_3}\circ R_A^{\alpha} \overset{F2}{=} S_{L_3}\circ(S_{L_2'}\circ S_{L_1'}) = (\underbrace{S_{L_3}\circ S_{L_3}}_{Id})\circ S_{L_1'} = S_{L_1'} \quad \square$$

Dowód:

$$S_{L_3}\circ S_{L_2}\circ S_{L_1} = S_{L_3}\circ(S_{L_2}\circ S_{L_1}) \overset{FAKT}{=}$$

$$= S_{L_3}\circ T_v \overset{FAKT}{=} S_{L_3}\circ(S_{L_2'}\circ S_{L_1'}) = (\overbrace{S_{L_3}\circ S_{L_3}}^{Id})\circ S_{L_1'} = Id\circ S_{L_1'} = S_{L_1'}. \quad \square$$

TWIERDZENIE. Każda izometria płaszczyzny jest złożeniem conajwyżej 3 odbić.

Dowód: F - dowolna izometria

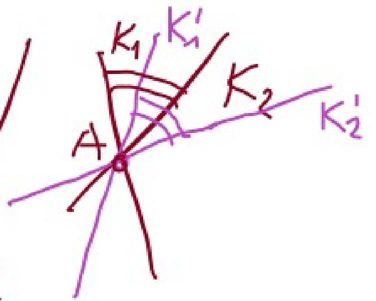
1°. F jest złożeniem translacji i obrotu

2°. F — " — i odbicia.

Ad 1°

$$F = R_A^{\alpha} \circ T_v = \underbrace{S_{K_2} \circ S_{K_1}}_{= S_{K_2'} \circ S_{K_1'}} \circ S_{L_2} \circ S_{L_1} = S_{K_2'} \circ \overbrace{S_{K_1'} \circ S_{L_2} \circ S_{L_1}}^{S_{L'}} = $$

$$= S_{K_2'} \circ S_{L'} . \square$$


$L_1 \| L_2$

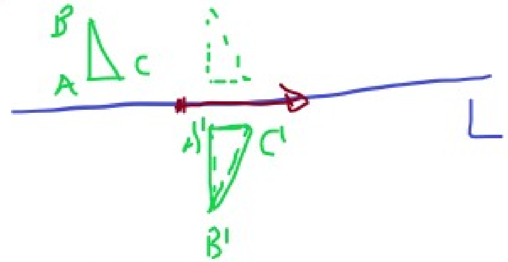
$K_1' \| L_1 \| L_2$

Ad 2°. $F = S_M \circ R_A^{\alpha} \circ T_v = S_M \circ \underbrace{S_{K_2} \circ S_{K_1} \circ S_{L_2} \circ S_{L_1}}_{S_{K_2'} \circ S_{L'}} =$

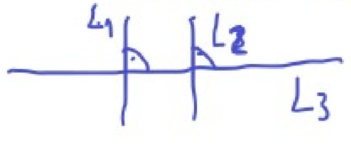
$= S_M \circ S_{K_2'} \circ S_{L'}$ $\square$

SYMETRIA Z POŚLIZGIEM

$S_L \circ T_v \quad : \quad v \| L$




UWAGA: $S_L \circ T_v = T_v \circ S_L = S_{L_2} \circ S_{L_2} \circ S_{L_1}$




**TWIERDZENIE (klasyfikacyjne).**

Każda izometria płaszczyzny jest jedną z następujących izometrii:

(1) tożsamość

(2) translacja

(3) obrót

(4) odbicie

(5) symetria z poślizgiem.

**Dowód:** niech $F$ - dowolna izometria. Zachodzi jeden z przypadków: $F$ jest złożeniem:

(a) 1 odbicia

(b) 2 odbić

(c) 3 odbić.

Ad (a) $F = S_L$ - jest odbiciem

Ad (b). $F = S_{L_2} \circ S_{L_1}$.

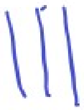
- $L_1, L_2$ - przecinają się. $F = S_{L_2} S_{L_1} = R_A^{\alpha}$ - obrót
- $L_1 \parallel L_2$ - $F$ - translacja
- $L_1 = L_2$ - $F$ - tożsamość

Ad (c)

$F = S_{L_3} \circ S_{L_2} \circ S_{L_1}$

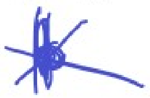
- $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$

  $F$ - odbicie

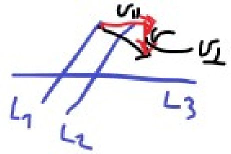


- $L_1, L_2, L_3$ przecinają się w $A$

  $F$ - odbicie



- $L_1 \parallel L_2 \nparallel L_3$

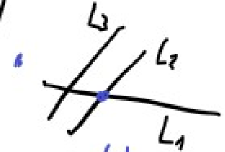


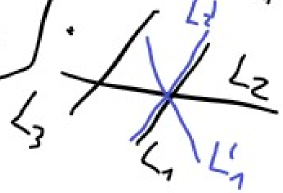

$$F = S_{L_3} \circ \underbrace{S_{L_2} \circ S_{L_1}}_{T_v} = S_{L_3} \circ T_v =$$

$$= \underbrace{S_{L_3} \circ T_{v_\perp}}_{= S_{L_5} \circ S_{L_4} = S_{L'}} \circ T_{v_\parallel} = S_{L'} \circ T_{v_\parallel} = \begin{cases} \text{odbicie } S_{L'} & \text{gdy } v_\parallel = 0 \\ \text{symetria z poślizgiem} & \text{gdy } v_\parallel \neq 0 \end{cases}$$

$L_5 \parallel L_4 \parallel L_3$

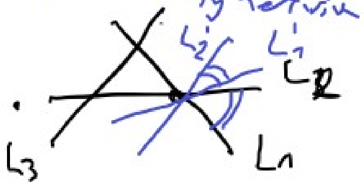
$L' \parallel L_3$ $\quad L' \parallel v_\parallel$




- analogicznie j.w.

$F = \begin{cases} \text{odbicie lub} \\ \text{symetria z poślizgiem} \end{cases}$




$L_2' \parallel L_3$ $\square$