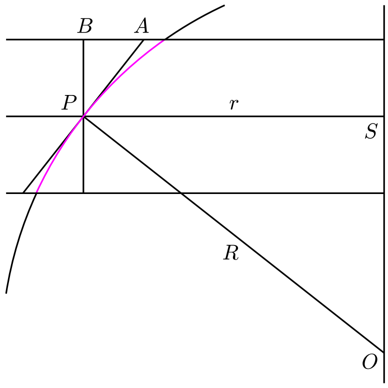
mała delta

Co można obliczyć

za pomocą wzoru πr^2? Oczywiście, pole koła. Ale co jeszcze? Okazuje się, że także pole czaszy, takiego koła na sferze (czyli powierzchni kuli). A oto dlaczego.

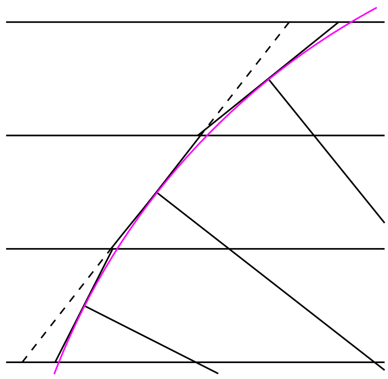


Rys. 1. $h = 2 \cdot BP$, $l = 2 \cdot AP$.

Zastosujmy sposób obliczania powierzchni sfery wymyślony przez Archimedesa. Sferę o promieniu R dzielimy płaszczyznami równoległymi na warstwy o wysokości h. W połowie wysokości warstwy prowadzimy w pionowych płaszczyznach styczne do sfery. Styczne te tworzą powierzchnię boczną stożka ściętego; oznaczmy długość jego tworzącej przez l. Okazuje się, że pole tej powierzchni zależy jedynie od wysokości warstwy, a nie zależy od tego, która to warstwa. Rzeczywiście (przy oznaczeniach z rysunku 1) trójkąty OPS i APB są podobne, skąd

$$\frac{R}{r} = \frac{OP}{PS} = \frac{AP}{PB} = \frac{\frac{1}{2}l}{\frac{1}{2}h}, \text{ czyli } rl = Rh \text{ albo } 2\pi rl = 2\pi Rh.$$

A lewa strona ostatniej równości to właśnie pole powierzchni bocznej stożka ściętego. Bo pole powierzchni stożka ściętego to (jak napisano w każdym podręczniku czy tablicach) $\pi(r_1 + r_2)l$, czyli $2\pi rl$, gdy r jest średnią arytmetyczną r_1 i r_2, a tak jest dla promienia poprowadzonego w połowie wysokości stożka ściętego.

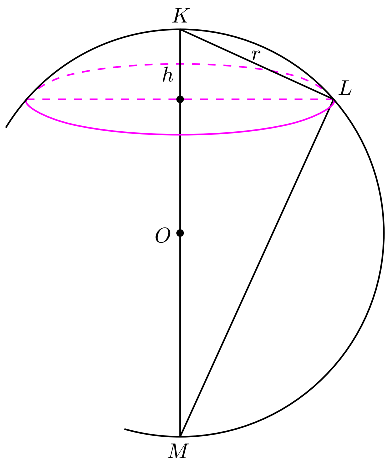


Rys. 2

Z tego, że pole zależy tylko od h, wynika, że gdy podzielimy warstwę na drobniejsze warstwy (na rysunku 2 na trzy), to suma powierzchni bocznej otrzymanych stożków będzie równa powierzchni bocznej poprzedniego, większego stożka.

(Bo gdy $h = h_1 + h_2 + h_3$, to $2\pi Rh = 2\pi Rh_1 + 2\pi Rh_2 + 2\pi Rh_3$.)

Ale dla bardzo cienkich warstw suma powierzchni bocznych stożków ściętych bardzo dobrze, dowolnie dobrze przybliża pole sfery. Zatem pole powierzchni warstwy sfery jest takie samo, jak pole powierzchni bocznej stycznego w połowie jej wysokości stożka ściętego, czyli $2\pi Rh$. Wynika stąd w szczególności, że pole całej sfery ($h = 2R$) jest równe $4\pi R^2$.



Rys. 3

Ale nas interesuje czasza. Jej pole powierzchni (rys. 3) to

$$2\pi Rh = \pi \cdot 2R \cdot h = \pi r^2,$$

bowiem trójkąt KLM jest prostokątny (KM to średnica!) i wobec tego

$$\frac{h}{r} = \frac{r}{2R}, \quad \text{czyli} \quad 2R \cdot h = r^2.$$

Okazuje się więc, że πr^2 to wzór nie tylko na pole koła na płaszczyźnie, lecz także na pole czaszy, pod warunkiem jednak, że litera r będzie rozumiana w ogólniejszy sposób: jako odległość środka od brzegu. Zauważmy, że ten wzór pasuje też do całej sfery! W ten sposób wzór na pole koła staje się po prostu szczególnym przypadkiem ogólniejszej zależności.

A swoją drogą, czy nie peszy, że Archimedes wiedział o wzorze πr^2 więcej, niż można się nauczyć w XXI-wiecznej szkole?

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS