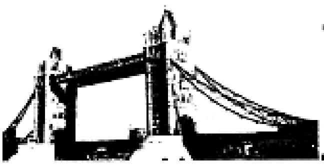
Wykład XIII



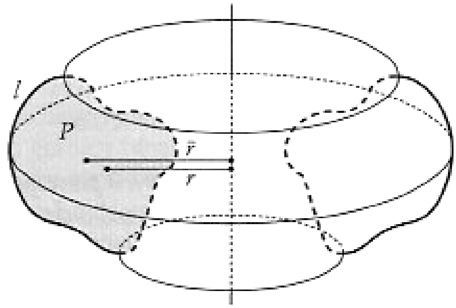
Powszechne ciążenie

Jeszcze znacznie przed XVII wiekiem na czoło listy ważnych problemów filozoficznych (dla wielu znaczyło to prawie to samo co matematycznych) wysunął się problem zmienności. Chodziło o wypracowanie metod pozwalających ze znanej zmienności odtworzyć nieznany stan zjawiska, jak też na to, by znając stan, odtworzyć zmienność. To nie całkiem czytelne przedstawienie problemu znacznie zyskuje na jasności, gdy zamiast o jakimś tam zjawisku mówić będziemy np. o ruchu: stanami nazwiemy długości przebytej drogi, a zmienność będzie prędkością – pytanie będzie wówczas takie: jak określić prędkość pojazdu za pomocą przebywanej drogi, jak też określić przebywaną drogę za pomocą prędkości. Tak istotnie jest jaśniej i dlatego wprowadzenie przez Galileusza trafnych pojęć opisujących ruch spowodowało, że inspiracja fizyczna w badaniach zmienności była dominująca. Zbyt jednak daleko zawędrowano w badaniu (choć prawie bezowocnym) tej problematyki w Średniowieczu, aby teraz cała sprawa dawała się zamknąć w obrębie fizyki, a już tym bardziej w obrębie kinematyki i dynamiki.

Najbardziej popularnym tematem badań był środek ciężkości. Warto zwrócić uwagę, że matematycznie jest to mocno skomplikowane pojęcie. Świadczy o tym choćby fakt, że dla wielokąta środek ciężkości wierzchołków (masy umieszczamy tylko w wierzchołkach, a reszta jest nieważka) wypada na ogół w innym punkcie niż środek ciężkości brzegu (ważą tylko odcinki-patyczki) i niż środek ciężkości całej płaskiej figury (masa równo rozsmarowana po wielokącie-deseczce). A dla wielościanów mamy jeszcze więcej możliwości. Matematycznie operowanie środkami ciężkości wymaga pojęcia momentu statycznego i średniej ważonej. Znaczące prace na temat środków ciężkości napisał wspomniany w wykładzie XI Simon Stevin, a także Luca Valerio (1552; 1618). Najbardziej dojrzała praca na ten temat to wydane w 1641 roku *Centrobaryca* Paula Guldina (1577; 1643). Najistotniejszy wynik tej pracy to wzory zwane dziś *regułami Guldina*:

Objętość bryły powstałej przez obrót figury płaskiej wokół nieprzecinającej jej i leżącej w tej samej płaszczyźnie prostej jest równa iloczynowi pola powierzchni

Jedynie dla wielokątów mających środek własnego obrotu (nakładającego wielokąt na niego samego) te wszystkie trzy środki ciężkości znajdują się w tym samym punkcie. Pierwszy i trzeci środek pokrywa się ponadto dla trójkątów.



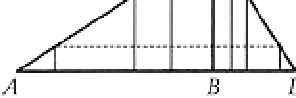
Rys. XIII.1. $V = 2\pi \cdot r \cdot P$, $S = 2\pi \cdot \bar{r} \cdot l$, gdzie V i S to objętość i pole bryły obrotowej, P i l to pole i obwód figury obracanej, a r i $\bar{r}$ to odległości środka ciężkości powierzchni i obwodu obracanej figury od osi obrotu.

> *figury przez drogę środka ciężkości tej powierzchni podczas obrotu, a pole takiej bryły – iloczynowi długości obwodu figury przez drogę środka ciężkości tego obwodu podczas obrotu* (rys. XIII.1).

Dziś wzory te można znaleźć w podręcznikach rachunku całkowego i to bynajmniej nie na początku. Nie jest to przypadek – w istocie operacja całkowania (pamiętajmy – całkowanie jest mierzeniem; oczywiście, w specjalnych sytuacjach i w specjalny sposób) jest do rozwiązywania zadań dotyczących momentów statycznych (dynamicznych zresztą też) niezbędna. Patrząc więc na takie prace, jak dzieło Guldina, widzimy w nich dzisiaj prapoczątki rachunku całkowego w sensie dzisiejszym, taki łącznik między Eudoksosem i Riemannem.

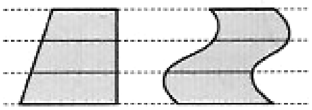
Jeszcze bardziej dzisiejszy rachunek całkowy przypomina praca Keplera *Stereometria doliorum viniarorum*, o której była mowa w wykładzie XI.

Inne podejście do problemu obliczania pól i objętości, a co więcej – nadanie takim operacjom pewnego uzasadnienia metodologicznego, zaprezentowali dwaj uczniowie Galileusza – Evangelista Torricelli (1608; 1647) i Bonaventura Cavalieri (1598; 1647). Jest to dobrze widoczne w pracy Cavalieriego *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635). Owe *niepodzielne kontinua* są jakby elementami, z których przez ruch powstają inne kontinua: z ruchu punktu rodzi się linia, z ruchu linii – powierzchnia, z ruchu powierzchni – bryła. Podczas tego ruchu narasta miara figury czy bryły; jest to próba matematyzacji rozważania Archimedesa o nalewaniu wody do naczyń o przekrojach równej wielkości (ale niekoniecznie tego samego kształtu) – była o tym mowa w wykładzie VII. Matematyzacja ta była początkowo bardzo niestaranna – Cavalieri w pierwszej redakcji napisał, że figury (bryły) mają równe pola (objętości), gdy mają równe przekroje. Tu można jednak zobaczyć, jak wielkie miało znaczenie, że w owych czasach pracowano zespołowo: Torricelli publicznie wykpił swego przyjaciela, twierdząc, iż udowodnił on, że dowolne dwa trójkąty prostokątne mają takie samo pole – istotnie (rys. XIII.2), każdemu przekrojowi pionowemu trójkąta ABC odpowiada



Rys. XIII.2

dokładnie jeden równy mu pionowy przekrój trójkąta *BCD*. Trzeba było więc jakoś znaleźć odpowiednik matematyczny jednakowej prędkości ruchów powołujących do życia nowe kontinua. Jedyne, co dało się uzyskać, to twierdzenie znane dziś pod nazwą *zasady Cavalieriego*, choć znał je już Archimedes:



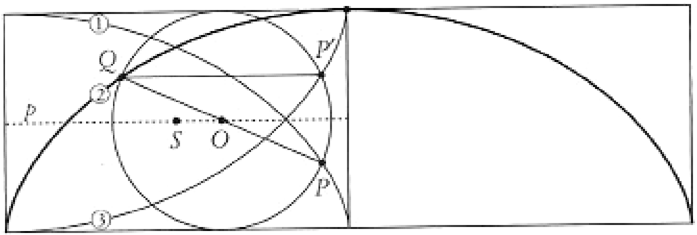
Rys. XIII.3

dwie figury, których przecięcia z dowolną spośród prostych (płaszczyzn) o danym kierunku są jednakowej długości (mają jednakowe pole), mają równe pola (objętości) (rys. XIII.3).

Ale nie na uzyskaniu tego wyniku polega znaczenie pracy Cavalieriego. To, co będzie towarzyszyło matematyce jak wyrzut sumienia, a bez czego nie będzie się umiała obyć aż do połowy XIX wieku, to owe niepodzielne kontinua, które rodzą się z czegoś mniejszego, z jakichś nieskończenie małych, których nieskończenie wiele daje obiekty o zwykłych już własnościach. Takie sformułowanie nie powstało jednak po to, by jeżyć włosy na głowie zwolennikom Arystotelesa, zakazującym aktualnej nieskończoności – to było coś, bez czego kroku ku nowej matematyce zrobić nie umiano.

Skoro już tyle zostało powiedziane o cykloidzie, kontynuujmy ten temat. Pole pod (jednym) łukiem cykloidy też zostało obliczone elementarnie. Upraszczając nieco, można metodę zastosowaną przez Gilesa Robervala (1602; 1675) zrelacjonować tak.

Umieśćmy cykloidę w dwóch prostokątach $2r \times \pi r$. Z lewej strony narysujmy dodatkowo obrazy jej lewej połowy w symetrii względem środka lewego prostokąta i jego pionowej osi symetrii (Rys. XIV.6).



Rys. XIV.6

Okaże się zatem, że dwa nowe łuki, (2) i (3), są symetryczne względem poziomej osi symetrii prostokąta, nazwijmy ją p. Łuk (3) ma jeszcze jedną charakteryzację – to po nim porusza się koniec średnicy przeciwległy do punktu biegnącego po cykloidzie (1) – aby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że jest to przesunięty łuk cykloidy z prawego prostokąta. Narysujmy teraz wyznaczający cykloidę okrąg w dowolnym położeniu. Środek O tego okręgu leży, oczywiście, na p. Oznaczmy przez P punkt wyznaczający cykloidę, przez Q drugi koniec wychodzącej z P średnicy i przez P' obraz P w symetrii względem p. Zatem P' leży zarówno na okręgu, jak na łuku (2), a ponieważ odcinek PP' jest pionowy (jako prostopadły do p) i kąt $PP'Q$ jest prosty, więc odcinek $P'Q$ jest poziomy. Wykazaliśmy tym samym (dowolne położenie okręgu!), że poziome przekroje soczewki (1) (2) są wszystkie takie same (te same!), jak przekroje koła. Zgodnie z zasadą Cavalieriego (patrz wykład XII) soczewka ma zatem pole równe πr^2. Myślę, że każdy już bez trudu zauważy, iż pole pod cykloidą to 2 razy (1/2 pola prostokąta plus 1/2 pola soczewki), czyli $3\pi r^2$.